EL PRERENACIMIENTO CAROLINGIO Y SU INFLUENCIA EN LAS MATEMATICAS

750 DC A 110O DC

INDICE:

1. Introducción 1
2. Situación de la época 1
3. Los elementos disponibles para la cultura 3
   3.1. Boecio como base principal de las matemáticas de la época 4
   3.2. La geometría de Boecio 5
4. El papel de las matemáticas en la época 6
5. Autores destacados 8
   5.1. Alcuino de York 8
   5.2. Gerberto 9
      5.2.1. Gerberto y los agrimensores romanos 9
      5.2.2. Gerberto y los numerales hindú-arábigos...................................... 10
      5.2.3. La geometría de Gerberto 11
   5.3. Prefacio de la obra "Opera Matemática de Gerberto", traducción 12

6. La geometría en las universidades del siglo XI 24
   6.1. Francon, de Liège 24
   6.2. Raimbaud, de Cologne, y Raoul, de Liège 27

7. Bibliografía 30

*En el CD que contiene este trabajo se ha incluido la obra Opera Matemática de Gerberto, escrita en latín por Nicolaus Bubnov.

1.INTRODUCCIÓN

El estado esclavista romano se derrumbó tras encarnizadas luchas sociales de las clases oprimidas y bajo el empuje de los enemigos exteriores. La disolución política del Imperio Romano fue acompañada del declive económico. El comercio exterior y la producción manual de las ciudades se vinieron abajo, ciudades y calzadas se desmoronaron. La aldea se convirtió en el centro de la economía. Se formo así entre el siglo V y el siglo XI el feudalismo europeo, que se caracterizó por su economía natural, la ligazón de los campesinos a la tierra (servidumbre), la presión extraeconómica y un ínfimo nivel de la técnica. Hay que añadir a ello, en los primeros siglos, la postura anticientífica, o al menos el marcado desinterés científico, de la Iglesia cristiana.

La matemática europea en el feudalismo temprano (s.VIII-IX) estaba a un nivel realmente ínfimo. Se limitó al cálculo elemental con el ábaco y a un complicado sistema de cálculo con los dedos, a la agrimensura y al cálculo (llamado computus) de los días de fiesta movibles de la Iglesia, como por ejemplo la Pascua.

Fue alrededor de 1100 cuando nuevas influencias comenzaron a afectar a la atmósfera intelectual.

2. SITUACIÓN DE LA EPOCA

La Alta Edad Media se extiende aproximadamente desde el 400 hasta el 1100; setecientos años, durante los cuales la civilización europea podría haber desarrollado algunas matemáticas. Pero no fue así, y las matemáticas durante este periodo no experimentaron ningún progreso.

La razón primordial del bajo nivel de las matemáticas era la ausencia de interés por el mundo físico.

La Cristiandad, que dominaba Europa, prescribía sus propios fines, valores y modos de vida. Las preocupaciones importantes eran espirituales, de tal manera que los interrogantes sobre la naturaleza que estuvieran estimulados por la curiosidad o por fines practicos eran considerados como frívolos y sin valor.
La realidad última era la vida eterna del alma; y la salud del alma se reforzaba mediante el aprendizaje de verdades morales espirituales. Las doctrinas del pecado, del miedo del infierno, de la salvación y del deseo del cielo eran dominantes. Puesto que el estudio de la naturaleza no contribuía a alcanzar tales fines o a prepararse para la vida futura, era rechazado como algo sin valor e incluso herético.

Hasta 1100, el periodo medieval no produjo ninguna cultura grande en las esferas intelectuales. Las características de su situación intelectual eran la falta de matización en las ideas, dogmatismo, misticismo, y confianza en las autoridades, que eran constantemente consultadas, analizadas y comentadas.
Lo poco que existía como ciencia era estático. La Teología encerraba todo el conocimiento, y los Padres de la Iglesia desarrollaron sistemas de conocimiento universal. Pero no buscaron principios diferentes de los contenidos en las doctrinas cristianas.

La Europa Occidental era la sucesora de la Roma cristianizada, y ni Roma ni la Cristiandad se habían inclinado hacia las matemáticas. La civilización romana no fue productiva en matemáticas porque estaba demasiado preocupada por la obtención de resultados prácticos e inmediatamente aplicables. La civilización de la Europa medieval no lo fue tampoco, precisamente por la razón opuesta. No estaba preocupada por el mundo físico y los asuntos y problemas mundanos no tenían importancia. Aparentemente las matemáticas no pueden florecer ni en una civilización demasiado ligada a la tierra ni en una demasiado ligada al cielo.

3. ELEMENTOS DISPONIBLES PARA LA CULTURA

A medida que la Iglesia extendía su influencia, iba favoreciendo e imponiendo una determinada cultura. El latín era la lengua oficial de la Iglesia y por ello se convirtió en la lengua internacional de Europa y en la lengua de las matemáticas y de la ciencia.

Resultó inevitable que los europeos buscaran el conocimiento sobre todo en libros latinos, esto es, romanos. Puesto que la matemática romana era insignificante, todo lo que los europeos aprendieron fue un sistema de números muy primitivo y unos pocos conocimientos de aritmética. También conocieron un poco de la matemática griega a través de algunos traductores.

El principal traductor, cuyas obras fueron ampliamente utilizadas hasta el siglo XII, fue Anicio Manlio Severino Boecio (480-524). Utilizando fuentes griegas, reunió selecciones latinas de tratados elementales sobre aritmética, geometría y astronomía.

Otros traductores fueron el romano Aurelio Casiodoro (475-570), quien expuso unas pocas partes de las obras griegas en matemáticas y astronomía en su propia pobre versión. Isidoro de Sevilla (560-636), quien escribió las Etimologías, una obra en veinte libros sobre temas que abarcan desde las matemáticas hasta la medicina. Y el inglés Beda el Venerable (674-735). Estos hombres fueron los eslabones principales entre las matemáticas griegas y los primeros tiempos del mundo medieval.

En todos los problemas que aparecen en los libros escritos por los primeros matemáticos medievales solo aparecen las cuatro operaciones con enteros. Puesto que, en la práctica, los cálculos se hacían en varios tipos de ábacos, las reglas de estas operaciones estaban especialmente adaptadas para ello. Las fracciones rara vez se utilizaban, y cuando se hacia se utilizaban fracciones romanas con nombres específicos.

Por ejemplo, uncia era 1/12, quincunx era 5/12, dodrans era 9/12. Los números irracionales no aparecían en absoluto.

En el siglo X, Gerberto (940-1003), mas tarde el Papa Silvestre II, contribuyeron a mejorar el estudio de las matemáticas. Sus escritos, sin embargo, se limitaron a la aritmética y geometría elementales.

3.1. Boecio

Es el principal traductor, sus obras fueron ampliamente utilizadas hasta el siglo XII. Descendiente de una de las más antiguas familias romanas, se dedico, además de a la matemática y a la filosofía, a la política.

A pesar de ser considerado probablemente como el matemático más importante que produjo la antigua Roma, el nivel de su obra presenta un fuerte contraste con el de la de los matemáticos griegos. Boecio fue autor de libros de texto para matemáticas, pero estos libros no eran más que simples abreviaturas a un nivel muy elemental de los clásicos anteriores.

De los elementos de Euclides, puede haber traducido lo mismo cinco libros que dos, y estos constituyeron una parte de su geometría. En este tema dio definiciones y teoremas, pero no demostraciones. También incluyo en este trabajo algún material sobre geometría de la medición. Algunos resultados son incorrectos y otros, solo aproximaciones. Curiosamente la geometría también incluía material sobre ábacos y las fracciones.

También escribió Institutos arithmetica, una traducción de la Introductio arithmetica de Nicómano, aunque omitió algunos de los resultados de este. Este libro fue la fuente de toda la aritmética que se enseñó en las escuelas durante casi mil años.

Tradujo algunas obras de Aristóteles, y escribió una astronomía basada en Ptolomeo y un libro sobre música basado en trabajos de Euclides, Ptolomeo y Nicómano.

3.2. La geometría de Boecio

Las discusiones que se han producido sobre la autenticidad de la geometría de Boecio han tenido por objeto el origen de las cifras modernas y del cálculo sobre el ábaco.

Existen dos obras geométricas esencialmente diferentes, que en los manuscritos, son atribuidas a Boecio.

A. Una de ellas, editada por Friedlein bajo el titulo "Ars Geometrix", esta dividida en dos libros. El primero comprende la traducción de los enunciados de Euclides, algunas definiciones tomadas de los agrimensores y la descripción del ábaco de fichas marcadas con cifras.

El segundo libro contiene datos metrológicos, una colección de problemas de agrimensura sacada de los agrimensores (algunos con errores absurdos) y por ultimo el autor vuelve sobre el ábaco y propone emplear, en lugar de signos especiales de fracciones romanas, la serie de letras del alfabeto (esta proposición no ha tenido ninguna consecuencia).

B. La segunda obra no tiene en común con la primera nada mas que la traducción de Euclides, que el manuscrito más antiguo que se le conoce, ocupa los libros III y IV. Los dos primeros libros están recopilados con gran desorden. Un quinto libro encierra resúmenes metrológicos de Isidoro de Sevilla, otros fragmentos de agrimensores y una serie de definiciones.

Pero es necesario remarcar que:

1. El manuscrito más antiguo conocido de A es a lo sumo de finales del siglo XI, mientras que de B se conoce uno que es del siglo IX.
2. B no ofrece ningún fragmento o pasaje que haga sospechar la autenticidad de A.
3. Por la traducción de Euclides, del texto A, ha sido evidentemente deformado el de B.

Se entiende que, la obra B no ha sido compuesta por Boecio. Pero él habría debido, por lo menos, traducir una parte.

Hay diferente opiniones sobre las obras de Boecio. Algunos autores le atribuyen unas obras y otras no. También, se le atribuyen obras en las que se duda que el autor sea él o Gerberto (del que hablaremos después) o viceversa.

4. EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN EUROPA EN LA ALTA EDAD MEDIA (S.V- XII)

Aunque los elementos disponibles para la enseñanza de las matemáticas eran escasos, éstas eran relativamente importantes en el curriculum de las escuelas medievales. El curriculum estaba dividido en el quadrivium y el trivium.
El quadrivium incluía la aritmética, la música, la geometría y la astronomía.
El trivium cubría la retórica, la dialéctica y la gramática.

Incluso el aprendizaje de las pocas matemáticas que hemos descrito servía para varios propósitos. Después de la época de Gerberto fueron aplicadas para obtener alturas y distancias, para lo que se utilizaban el astrolabio y el espejo como instrumentos de campo. Se esperaba de la clerecía que defendiera la

teología y refutara argumentos en contra mediante razonamientos, y las matemáticas eran consideradas como un buen entrenamiento para el razonamiento teológico.
La Iglesia también abogaba por la enseñanza de las matemáticas por su aplicación para el cumplimiento del calendario y la predicción de las fiestas. En cada monasterio había al menos una persona que podía realizar los cálculos necesarios para ello, y en el curso de este trabajo fueron diseñadas numerosas mejoras en aritmética y en el método de cálculo del calendario.
Otra motivación para el estudio de algunas matemáticas fue la astrología. La doctrina básica de la astrología era, por supuesto, que los cuerpos celestes influían y controlaban los cuerpos humanos y su destino. Para entender las influencias de los cuerpos celestes y para predecir lo que presagiaban acontecimientos celestes especiales, tales como conjunciones y eclipses, eran indispensables algunas matemáticas.
La astrología fue especialmente importante en la Edad Media. Todas las cortes tenían astrólogos y las universidades tenían profesores de astrología y cursos sobre el tema.

A través de la astrología, se estableció una relación entre las matemáticas y la medicina. Aunque la Iglesia menos preciaba el cuerpo físico como falto de importancia, los médicos no estaban necesariamente de acuerdo con ello. Puesto que los cuerpos celestes influían presumiblemente en la salud, los médicos estudiaban, por otra parte, las constelaciones y, por otra, la salud de los individuos. Se recogían y conservaban los datos de las constelaciones que aparecían en los nacimientos, matrimonios, enfermedades y muertes de miles de personas y se utilizaban para predecir el éxito de los tratamientos médicos. Para realizar todo esto se requería un conocimiento tan amplio de las matemáticas que los médicos tenían que ser personas ilustradas en este campo. De hecho, eran más astrólogos y matemáticos que estudiosos del cuerpo humano.

5. AUTORES DESTACADOS DE LA EPOCA

5.1. ALCUINO DE YORK (735-804). Monje procedente de Inglaterra. Carlomagno, quien no consiguió en toda su vida, a pesar de sus esfuerzos, aprender a leer y escribir correctamente, se preocupó, interesado en el fortalecimiento de su estado, de elevar el nivel formativo del clero y de los altos funcionarios. Por ello llamo en el año 781 a Alcuino para intentar revitalizar la educación en Francia y le encargó la dirección de un colegio Palatino.

Por iniciativa suya se levantó en Tours un centro cultural superior permanente, en el que se posibilitó también el desarrollo del saber matemático. Para fines didácticos se escribieron sus compendios sobre las asignaturas del trivium ; el cálculo de la fecha de Pascua de Resurrección, quiere facilitar el cumplimiento de la orden real según la cual debía haber en cada monasterio por lo menos un fraile capaz de determinar independientemente la fecha de Pascua.

Alcuino fue el autor de un tratado de problemas matemáticos llamado Propositiones ad acuendos juvenes (Problemas para la ejercitacion de los jóvenes), que está ligado claramente a otros de origen oriental y de la Antigüedad clásica; por ejemplo, aparece en el un problema de Herón sobre el llenado de un recipiente de agua. Los problemas geométricos se refieren a modelos romanos y utilizan solo aproximaciones extremadamente groseras para el cálculo de áreas y para el valor de π. Como ejemplo, valga la aproximación del área del circulo, llevada a cabo mediante la raíz cuadrada de un cuarto del perímetro circular.

5.2. GERBERTO (940-1003), nació en Francia y se educó en España e Italia para servir mas tarde en Alemania como tutor y consejero del sacro emperador romano Otón III.

Después de ocupar el puesto de arzobispo, primero en Reims y más tarde en Ravena, Gerberto fue elegido Papa en el año 999, tomando el nombre de Silvestre II.

Gerberto se mostró activo en política, tanto eclesiástica como laica, pero también dispuso de tiempo para ocuparse de cuestiones educativas.

Escribió tanto sobre aritmética como geometría, siguiendo probablemente la línea de la tradición que partía de Boecio, quien había dominado la enseñanza de las escuelas eclesiásticas de Occidente durante quinientos años sin experimentar ninguna mejora.

- **Gerberto y los agrimensores romanos**

Los escritos de los agrimensores romanos forman una parte poco difundida. Se encuentra en ellos, sin embargo, diversas series de definiciones geométricas y metrológicas y otros problemas de agrimensura.

Algunos datos sacados de esta colección, como la medida del área de un circulo o el volumen de la esfera, circulaban cada vez menos durante esa época. Pero se podría haber sacado de ahí mucho más, especialmente del Teorema de Pitágoras del que los agrimensores romanos hacen frecuentes aplicaciones.

Gerberto parece ser el primero en reconocer la importancia de esto. Y por una de sus cartas a Adelbold sabemos que Gerberto envió a este ultimo " Las figuras geométricas", que era probablemente un resumen de un manuscrito de los agrimensores.

Uno de los autores recopiladores (Vitrivio Rufo) daba, para la medida del área de los polígonos regulares, las formulas griegas aplicables al cálculo de los nombres de los polígonos (nombres de progresiones aritméticas de términos enteros, comenzando por la unidad).

Adelbold pregunta a Gerberto como la medida del triángulo equilátero, según la fórmula (*), no coincidía con la medida del mismo triángulo siguiendo otros procedimientos.

$$(*) \rightarrow \frac{a\,(a+1)}{2}$$

En su respuesta Gerberto explica convenientemente la dificultad de que no coincidiera, lo que no impide conservar (hasta el siglo XVI), en las obras de geometría elemental, al menos sí no las fórmulas del triángulo sí la de otros polígonos.

- **Gerberto y los numerales hindú- arábigos**

Gerberto fue probablemente el primero en Europa que enseño el uso de los numerales hindú-arábigos.

No está claro como llegó a conocerlos. Una posible explicación es la de que cuando viajo a España, en el año 967, se pusiera en contacto, en Barcelona quizá, con la cultura árabe.

Una copia española de los Orígenes de Isidoro (año 992) contiene los numerales, sin el cero, y Gerberto probablemente nunca llegó a conocer este último aspecto del sistema hindú-arábigo. Sin embargo, en algunos manuscritos de las obras de Boecio aparecen ciertas formas numerales parecidas como signos para ser utilizados en una tabla de computación o un ábaco, y quizá fuese de estos manuscritos de los que Gerberto aprendió el nuevo sistema.

● La geometría de Gerberto

En cuanto a la geometría de Gerberto, esta es la reunión occidental, bajo el nombre de Gerberto, de solo dos manuscritos. El nombre de Gerberto solo se justifica en la tercera parte. Pero esta tercera parte ha sido aumentada por copias de orígenes diversos.

La segunda parte es también una recopilación de problemas de agrimensura, pero en lugar de tener (como la tercera parte) por objeto los cálculos de longitudes, superficies o volúmenes, en ella enseña procedimientos de medidas indirectas sobre terreno y el empleo para ello de diversos instrumentos o artificios, que suponen la utilización de triángulos semejantes. La composición de esta recopilación es muy variable según los manuscritos, y el primer original es desconocido.

Queda la primera parte que, a diferencia de las otras dos, es un trabajo original, y por lo mismo bastante interesante. El autor se ha esforzado en hacer una exposición metódica de la geometría, añadiendo nociones teóricas de las reglas de cálculo. Gerberto no llevó muy lejos su trabajo, por lo que se considera una obra incompleta.

Sería interesante saber como se desarrolló, en aquella época, la geometría en el Occidente latino, sí esté había quedado aislado dominando solo algunos elementos y no presentando conocimientos superiores.

Pero afortunadamente para el progreso de la humanidad del siglo XII, la infiltración de la ciencia árabe y las traducciones de los originales griegos hicieron que nuestros antepasados reencontraran por ellos mismos lo que los antiguos habían descubierto.

Durante el siglo XI, la geometría queda relativamente descuidada con respecto a la aritmética y al álgebra.

5.3. PREFACIO DE LA OBRA "OPERA MATEMÁTICA" DE GERBERTO (traducción).

DATOS DE LA OBRA:

· Autor: Nicolaus Bubnov

· Fecha: Enero de 1898

· Idioma: Latín

*Esta obra esta incluida en el idioma original en el CD que contiene este trabajo.

PREFACIO

Quince años antes, aún muy joven decidí estudiar las cartas de Gerberto, estas eran una fuente importante para los asuntos de los Franco galos, también lo eran para los germanos y para los latinos del siglo X, todos estaban dispuestos a conocerlas. Al principio solo lo hacia para escribir sobre la vida de aquel ilustre hombre. Pero cuando comencé este trabajo, fueron tantas y tan grandes las dificultades que casi me desesperó y me faltó poco para que desistiera de esta empresa. Pues me di cuenta de que las observaciones de los eruditos sobre este asunto, no solo en los libros sino también en los tratados, muchos se apoyaban en Gerberto a pesar de las cartas de éste en donde muchas cosas importantes sobre su vida no aparecían. Aún no están explicadas para la teoría crítica ni apenas se puede escribir sobre su vida que fue juzgada por los sabios jueces.

En verdad yo mismo, después de empezar a estudiar a fondo las cartas de Gerberto por medio de la teoría crítica, enseguida fui a dar con dos cuestiones apartadas hace doscientos años, sin embargo aún están separadas, a pesar de que hay un gran interés por debatirlas.

Al principio se preguntaban en qué época se escribieron las cartas de Gerberto, después qué temas de aquel influirían a través de las notas mas secretas del libro, que a veces se encuentran en sus cartas. Se permitía hacer una tercera pregunta – lo que era muy importante- en donde Gerberto había tenido conocimiento de los temas matemáticos, pero en aquella época me propuse informar de este asunto lo menos posible. En la mayor parte del tiempo me convenía exponer en qué orden cronológico estaban escritas las cartas.

En verdad ahora, cuando veía que eran publicadas las diferentes opiniones de los estudiosos casi desconfié, aunque se me ocurrió preguntar cómo aquella copia era origen de las cartas de Gerberto.

Sin embargo, ni en la que se me presento en aquel momento, en la última edición de Olleris que abarca toda la obra de Gerberto (Olleris, Oeuvres de Gerberto, Clemont-Ferrand et París 1867, in 4), ni en anteriores ediciones de las cartas se encontró algo sobre este asunto. En general, a causa de esto muchas veces al consultar la edición Ollerisiana y al reunir a esta con algunos libros manuscritos, los cuales me estaban permitidos hacer uso de los Parisis – en los Parisis sin duda en ese momento se basaba en las cartas-, comprendí con esto algo mas, en esta edición nada era creíble, este hecho es poco exacto y superficial y la opinión crítica es muy descuidada.

Era evidente que la obra matemática de Gerberto no fue mejor expuesta por Olleris que por todos los demás, mostró los libros manuscritos muy poco exactos, a veces desordenados, el aparato crítico de los textos y su inconstancia dio pie a muchos errores. Y así solo quedaba que yo mismo acudiera a los libros manuscritos, a aquellos fiables triarios para investigar aquellos asuntos tratados y reanudara todo el trabajo de Olleris y triunfara por su parte, estudié esto en breve, lo cual pude encontrar en los catálogos examinados con cuidado de los libros manuscritos.

Investigue los códices de Gerberto en la biblioteca parisina, me dirigí a Inglaterra, donde los meses de septiembre y octubre de 1883 continué mis estudios en Londres, Cambridge, Oxford, Chelster (en aquella insigne biblioteca formada por un libre mercenario de Phillips). En el mes de febrero de 1884 una vez más salí de la Francogalia y emprendí un viaje más largo todavía, me traslade Berlín desde allí a Baviera, Mónaco, Salzburgo, Roma al monasterio de Montecasino, Nápoles, Berna. Desde Berna volví a París en el mes de agosto de 1884 donde Leopoldo Delisle con una sorprendente amabilidad me había guardado algunos libros enviados por los holandeses.

En todos los libros que examine, observe siempre el espíritu que había hacia las obras de Gerberto las cuales se extienden sólo hacia la investigación de la ciencia, sobre todo hacia el trabajo matemático, incluso observe que los libros mostraban una gran colección. Hice estos viajes y me fije en estas investigaciones pero no me atreví a confesar que eran inútiles. Sin embargo, tuve la suerte de que encontré muchos libros desconocidos en esta época, en otros catálogos ya publicados que primero utilice para elaborar el texto después encontré alguna obra de Gerberto completamente desconocida.

En el mes de febrero de 1885 después de que volví a Petropoli comencé a trabajar con empeño y a perfeccionar aquel fértil tema recogido por mí. Decidí utilizar este tema para terminar con tres disertaciones, de las cuales una pertenecía a la copia de las cartas de Gerberto y a la fuente de este, otra se basaba en los libros de arte de Gerberto, no solo para saber sino también para explicar, la tercera abarcaba una nueva edición de las cartas.

Acabe la primera cuestión. En efecto el libro fue considerado de derecho público en Petropoli, escrito en lengua rusa, titulado “Sbornik pissem Gerbert, Kak istoriceskii istocnik (983-997). Kriticeskaja momografija po rukopisjam” (Acerca de las cartas del ejemplar de Gerberto y de su importancia histórica.

Critica monográfica escrita en el crédito de l libro), P.I, 1888, (XXII 1-369 pp.), P. II fasc. 1, 1889, fasc. 2, 1890 (XX 1- 1038 pp.).

En la parte anterior establecí el orden y la relación de las cartas, que se muestran en los manuscritos de los libros y mencione que estas relaciones habían surgido del cuadernillo de los comentarios en el que Gerberto recomendó cada epístola de la obra, antes de que este tal le remitiera la carta, terminara el tan cuidado y elegante ejemplar descrito. El mismo reconoció al mismo Gerberto aa.996-988 que aquellas series de cartas habían salido de sus comentarios y en a. 996, al examinar y perfeccionar sus comentarios en la Francogalia oculto que había dedicado su buen hacer para con la voluntad de la familia imperial y no temió a que el adversario le presentara ante la autoridad del Papa romano. En aquel momento presenté a Gerberto, después de que inútilmente hubiera estado dispuesto a que se mantuviera contrario al Papa del arzobispado de Reims y el mismo fue forzado a marcharse a Italia, y en el 998 a tener cuidado de sus comentarios por diferentes razones. Así que no temió que su amigo le presentara ante la familia de Ottoniano, pero destruyó todos los escritos en donde se apreciaba cierta pertinencia contra el Papa.

Enseguida rehice el orden de las cartas de Gerberto, cual hubiera sido el de los comentarios y en que orden cronológico, que contienen sobre todo anales o crónicas de los hechos acaecidos entre el 983-997, cuando las cartas de Gerberto se mezclan en mi narración con aquello con lo que hubiesen sido colocadas en orden en los comentarios, me parece que conseguí que no solo algunos inconvenientes provienen de este orden sino también que estas cartas se hallan claras, de las cuales hasta ahora estuviera oculta su realidad y sentimiento.

Un año después la primera parte de mis comentarios h asido de derecho público, en efecto en 1889, salió la nueva edición de las cartas de Gerberto regulada por J. Haveto, titulada “Lettres de Gerbert” (Cartas de Gerberto), París, 1889.

Haveto, hombre de gran importancia y muy amable no sólo no le había disgustado el trabajo de leer por completo mi libro redactado en un estilo muy familiar del cual era poco mas que inexperto, sino que también hizo uso de este en su edición y lo que más me alegra es que expuso una brillante opinión acerca de esto (p.XXLII adn.3). Aunque Haveto se servia de mi libro no pude hacer nada que no reconozca que el orden de las cartas fue establecido por propio gusto y con esto declaro públicamente con mucho gusto que yo habría propuesto más o menos este mismo orden. En verdad, algo me salió bien que presentara a Haveto, por esta razón, las cartas de Gerberto que estaban colocadas por orden de tiempo, con aquel ilustre hombre sucedió que me enseño el libro marcado por los caracteres y de qué manera habían sido escritos a través de aisladas notas para explicar aquella postura de Gerberto.

Ya en el mes de octubre de 1884, cuando volví a París, encontré aparte en aquellos lugares unas notas Tironianas silábicas que habían sido falsificadas por unos copistas y no comprendí ninguna palabra, ni tampoco las descifre rápidamente, ni las hice públicas, pero en la primera parte de mis siguientes comentarios decidí disertar mucho sobre este tema desde su peculiar origen, lo cual hice en pp.262-289. Este origen se reprodujo en los caracteres y en el mismo mes de mayo de 1887 (cf.p, 289 adn.34) corregía las hojas, cuando reconocí el 11 de marzo de 1887 que Haveto había propuesto su método en la Academia de inscripciones de las artes liberales de París, en donde se expusieron aquellas notas (cf. Revue critique, 21 Mars.1889). Esta descripción de Haveto esta expresada en los caracteres que poco después me fue enviada antes del mes de agosto de 1887 a Petropoli (C.R. de l´Acad. Des Inscript. Et Belles Lettres t. XV, 4 serie, pp.94-112; después en el singular librillo sé titularía “ La escritura secreta de Gerberto” París 1887). Por este motivo, además de la primera parte de mi discurso que yo había considerado mas en serio (pues antes había querido hacer toda la disertación en un único impulso, por así decirlo, entonces fue cuando supe que el volumen había sido más amplio, y decidí dividir este en dos partes y tres fascículos) publiqué un tercer apéndice de la primera parte (pp.349-354) y pude publicar mi opinión sobre el comentario de Haveto. Y me alegré de que Haveto aceptara su publicación, aquellas notas fueron expuestas por su consejo y mi opinión. Cf . p. LVII adn.4: " En el momento que leí en la academia mi primera memoria, N. Bubnnov por su parte ofreció una partida de su libro ya impreso pero no publicada, una teoría y el desciframiento de la escritura secreta de Gerberto, que no había tenido conocimiento de que en 1888 había aparecido su libro. Allí habíamos coincidido en los puntos más importantes, pero disentíamos en otros muchos detalles". (cf.p.LIX adn.1 et 2).

De la tercera, como antes he dicho, era mi propósito publicar las cartas de Gerberto de diez en diez, porque había decidido comenzar el trabajo al mismo tiempo que lo había reconocido, que pensarían los entendidos acerca de mi disertación. En verdad mientras la edición de Haveto se hacía publica era al menos necesaria otra edición. Puesto que aunque no hubiera sido comprendido por un entendido con una preparación critica ni con sus anotaciones (cf. Infra pp. 98-106) siempre puede estar de acuerdo, sin embargo no dudo que me apoye en ellos, que me habían dado la opinión acerca de la edición de Haveto y declaro públicamente que ésta ha sido terminada con todos los conceptos con agrado.

Por lo que llegué a la segunda disputa histórica a la que presté mucha atención a la disputa crítica acerca de los libros de Gerberto, en relación a las correspondientes artes. Cuando hube reconocido que era un asunto muy difícil y complicado y que ciertos propósitos y términos se disponían para mí, decidí disertar acerca de los únicos libros matemáticos con aquel ilustrísimo erudito. Estos libros ante todo me servían para divulgar la opinión critica, lo que me parece que había perfeccionado en esta obra.

En los apéndices publiqué otros asuntos que me parecieron tener una estrecha conexión con estos libros. Me dediqué a algunas cuestiones después de que aparecieran. Si no hubiera emprendido la edición, en el libro que fue escrito, era conveniente disertar sobre muchas otras cuestiones que se han empleado preferentemente en anotaciones críticas y que son desarrolladas en una edición mucho más fácil y mejor.

En estos tratados tuvo lugar un hecho evidente, por qué elegí por encima de todo este tema para declararlo públicamente. Sin embargo este mismo en algún pasaje de mi edición conservó los textos de los libros de Gerberto, los verdaderos, los falsos o los dudosos (pp. 1-151); los apéndices reúnen la mayor parte del volumen, lo cual me parece que no es inútil.

El apéndice I esta unido a los libros de Gerberto que se extienden hasta el ábaco (pp.1-24). En el apéndice de mi libreto, el que lo lea descubrirá que hay detalles que son examinados minuciosamente.

I.Gerberto enseña cosas acerca del ábaco que no son sacadas de Boecio (App. I.A).

1. La geometría que llevo a Boecio al ábaco se muestra, muy similar a la de Gerberto, esta fue falsificada en el siglo XI: el falsificador por una parte hizo uso de otros libros que pertenecían a los siglos VII-XI, por otra parte empleó las leyes de Gerberto falsificando el texto acerca de los cálculos de los números del ábaco (pp. 155-161; 188-196).
2. La verdadera geometría de Boecio, en una sola versión, era propia de los Principios de Euclides, fue escrita mas o menos al pie de la letra (pp. 161-164). Ejemplar cuya versión fue descubierta por Gerberto en el monasterio Bobiense en el 983, cuando él y había dejado de trabajar en su geometría (p.180 ll. 1-10; cf. P. 46 adn. 1; 48 and. 3; 100 and. 6); aunque en realidad

parece que estuvo perdida mientras algunos fragmentos fueron recapitulados, de los cuales se encontraron:

a) En Casidioro (p. 164 ll. 21-369)
b) En el libro Gudiano (p. 165 ll. 1-11)
c) En cierto libro aritmético y geométrico de agrimensura, el cual en los manuscritos de los libros se titula Geometría y Aritmética de Boecio (Boethii Geom.. subd. No.1; pp. 165 l 12-1661. 7; 180-188)
d) En "Geometría de Boecio" que fue escrito en el siglo XI (Boethii Geom.. subd. No. 2; pp. 166-174; 188-196) cuyo autor retiró los fragmentos de la obra pequeña, en cierto modo dijimos que fue inventada. (Boethii Geom.. subd. No.1)
e) En geometría, que era mostrada en los libros Mon. 13021 y 23511 del siglo XII, cuyo autor por una parte se sirvió de otra supuesta geometría de Boecio y por otra de la versión de Euclides que fue realizada por Adelardo Arábigo desde su conversación.(pp. 174-179)

II. Terminando el siglo X el ábaco no solo fue conocido por Gerberto sino también por otros estudiosos que habían agotado este conocimiento científico al menos no desde Gerberto (App.IB), sin desde sus fuentes. Cualesquiera que fueran las fuentes, estas no eran de Arábigo. Sin embargo, aquellos que pensaran que el ábaco pertenecía a Arábigo después dedujeron que era falso, porque Gerberto ya lo había utilizado en Europa y por eso forzosamente este era de Marca, la que se denomina Hispánica, en donde los árabes se habían instalado o bien creían y hacían conjeturas sobre si el ábaco se había trasladado a Hispania.

Pero Gerberto en una carta que yo descubrí declaro que en este asunto él era partidario de la antigua cultura (p.24 n.9). Esto parece que es verdad. Parece que Gerberto en la doctrina del ábaco antes de los caracteres romanos de los números y de las letras del alfabeto que se utilizaban, había introducido los caracteres de los números árabes los cuales pudo conocer en la Marca Hispánica o en la parte de los Montes Pirineos. Sin embargo esto no interesa para el origen de su doctrina.

III.Por otra parte se deduce que el ábaco había sido conocido por los antiguos, no esta permitido afirmar en nada, Boecio había escrito sobre esto (s. V/VI) y Arquitas (s. IV a. Chr. n.) y que este fuese descubierto por los pitagóricos o por el mismo Pitágoras. Este tema fue inventado por aquel falsificador del siglo XI que escribió la geometría de Boecio subd. No.2. pues siendo esto así las reglas que se han considerado "del señor Odonis sobre el ábaco" no son de Odones, del abad Cluniacense, sino de otro escritor que se dedicaba a estos temas depuse de aquel falsificador (P. 157 N. 17).

Las restantes partes del Apéndice I (app I,C,D,E) y estas mismas pertenecen al ábaco de Gerberto como el que más.

Los Apéndices II y III están unidos estrechamente, uno con la escuela de Gerberto en la Boethii Arithm. Inst. (p.31), el otro con la carta de Gerberto hacia Adelboldum (p.43).

En el Apéndice IV se dedicó a los asuntos que solían tratar hasta ahora como la pequeña parte de la geometría de Gerberto.

Pero comprobé que este era el fragmento del dudoso autor de la geometría. El libro IV de la geometría es de suma importancia. Pero el memorable libro de los antiguos agrimensores es corregido por esto, en donde el texto de Epafrodito y de Rufo Vitrubio fue entregado mucho mas completo, que en estos que nos habían llegado de los manuscritos de los libros.

El Apéndice V corresponde al Libro del astrolabio que se parece al que se atribuirá al mismo Gerberto. Notifique esto porque me pareció necesario, si alguien quería preguntar por el origen del libro.

En el Apéndice VI recogí los testimonios sobre el matemático Gerberto, lo que pude.

En el Apéndice VII al que decidí añadir después pp. 1-392 los caracteres que ya expuse. El conocer mejor las fuentes acerca de la geometría de Gerberto y de sus cartas a Adelboldum es sumamente importante.

Quizá alguien diga que el aparato critico lo muestro más completo de lo que haya sido necesario para volver al trabajo de Gerberto. Con razón, alguno me reprochara esto, lo hice para que se tuviera en cuenta el texto verdadero. Aunque si quisiera definir con exactitud la genealogía del código (lo cual hice, dondequiera que fuera necesario, en el libro sacado del astrolabio, del cual se me otorga la posibilidad de reunir unos pocos códigos) no pude hacer que no anotara también estas lecturas que no fueran importantes por si mismas. Ni se me culpo de lo que hice. Sin embargo algunas cuestiones casi perdidas, siendo determinada la genealogía del código, tuve la dicha de explicarlo abiertamente. O en una sola palabra, a fin de que el que lea mi libro, pueda el mismo verificar y examinar, que cosas he ido examinando acerca de la genealogía de un libro, en la conocida diversidad de lecturas no me ha disgustado soportar la acusación de demasiado ingenio.

El ejemplar de Haveto es perseguido- sin embargo en la edición de Haveto me ha parecido que es un ejemplo digno de imitación- por eso añadí muchas anotaciones del texto, porque estas pueden concluir al pie del texto con poquísimas palabras con claridad y abiertamente, con mas amplitud y detalle- no muy recargado- carecen de explicación si se exponen aparte.

Confió que los sabios jueces no tengan que rechazar mi edición que me ha llevado no solo mucho tiempo sino también trabajo y dinero, como si fuera inútil o que no tuviera valor alguno, de lo cual no se deduce nada si alguien quisiera saber de donde Gerberto Sacó el conocimiento de las matemáticas.

Esa es la razón por la que deseo dedicar este libro a la respetuosa memoria de Juliani Haveti, a quien me encontré al investigar en los asuntos del siglo X, en aquella remota y poco visitada región. Con el mayor respeto me aflijo por terminar de forma prematura su laboriosa vida en una inexorable muerte y por sus cartas privadas. Siendo un investigador no solo muy sabio y astuto sino también muy ingenuo que se dedico al estudio de las letras, que sin duda no le importo la dificultad del estilo de Rossici. Recogí este tema de los libros en 1883 y 1884 para disertar sobre los libros matemáticos de Gerberto, comencé a clasificarlos y a examinarlos con cuidado no antes del 1893 en Kijoviae, donde me uní a un gran número de profesores de la Universidad de las letras de St. Volodimeri. Pero al estudiar el tema de nuevo, examine otros libros otra vez y no lo pude dejar, en 1894 me atribuí los códigos de Vinodobonam, Salzburgo, Monaco, París, en 1895 los de Berlín, Bruselas y los holandeses.

Al no poder acumular todo en estos dos viajes hechos por mí, tuve que recurrir a veces a la bondad y amabilidad de otros estudiosos. Sobre algunos temas que fueron importantes para mí, me informe en el apógrafo de los lugares y aún hay mas en 1895 recogí libros de cuentas de los ilustres estudiosos como F. Ehrle S.J. Romano, A. Clerval Carnutensi, W.R. Morfill Oxoniensi, a. 1896 a V. Mortet Parisino, a. 1896 a F. Boll etc... a los que doy gracias.

Mi libreto salió a la luz mucho más serio de lo que yo esperaba. Por eso salió el librillo para explicar los caracteres de Gerberto, no deje de ofrecer mi estudio y mi trabajo a ciertas investigaciones y encontré muchas otras nuevas o más verdaderas.

Retire el apéndice V a causa de los verdaderos y los falsos caracteres imitados en las obras de Gerberto. Decidí insertar el apéndice V en mi librillo. Desde entonces el sexto apéndice reproducido por los caracteres y cuando los uní al séptimo metí nuevas paginas examinadas, quería que se estudiaran. Por lo que estas se publican en notas de Geometría y Astronomía desde las fuentes de Gerberto hasta su misma Geometría, la carta de Adelboldun, el libro sobre el astrolabio, algunos habrá que rectificar y otros ampliar.

En cuanto al benévolo lector que me perdone y que antes de que empiece a leer corrija las observaciones, añadidos y correcciones. Ruego, pido y suplico.

Escrito en Kijoviae el 22 de enero de 1898.

Prof. Dr. Nicolaus Bubnov.

6. LA GEOMETRÍA EN LAS UNIVERSIDADES DEL SIGLO XI

6.1. FRANCON, DE LIÉGE

La cuadratura del circulo es el titulo de un opúsculo (obra científica de poca extensión) compuesto hacia 1050 por un maestro de Liége llamado Francon.
No se conoce de esta obra más que un manuscrito completo que se encuentra en el Vaticano, pero este manuscrito es bastante incorrecto y el texto de la edición es demasiado incomprensible.

El problema de la cuadratura del círculo, no lo conoció Francon por ninguna obra de geometría sino por un tratado de lógica, "El Comentario de Boecio" sobre las categorías de Aristóteles. El maestro había considerado este problema como ejemplo de una pregunta cuya solución era posible pero desconocida.
Para comprender el problema, Francon mira una fórmula transmitida por los agrimensores romanos: la superficie del círculo se obtiene exactamente, multiplicando el cuadrado del diámetro por 11 y dividiendo por 14.

$$S_{circulo}= 11D^2 / 14$$

Así pues, por ejemplo, si un circulo tiene un diámetro de 14 pies, se construyo aisladamente un rectángulo de 11 x 14 pies cuya superficie (154 pies cuadrados) será equivalente a la del circulo. Francon considera perfectamente conocida la solución del problema imposible, al que le llamó *la cuadratura del círculo.*

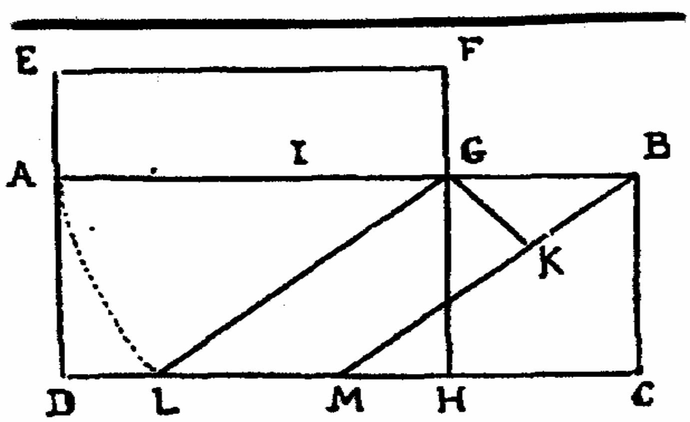
Pero se trata dado el rectángulo 11 x 14 de construir un cuadrado equivalente, sobre esto Francon escribió 6 libros, sin llegar a ninguna conclusión.

Ignora la construcción de la media proporcional entre dos rectas tanto como ignora el teorema de Pitágoras. La única relación métrica entre líneas rectas que conoce es la que Platón (en el Menón) ha tomado como ejemplo de una verdad de intuición que es que: el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es el doble de este cuadrado.

Habría que preguntarse que idea tenía Francon de la forma a la que se llega al establecimiento de una fórmula que permite construir un rectángulo equivalente a un círculo. No hay duda que él lo había mirado como un hecho de experiencia; por procedimientos empíricos, cortando trozos de pergaminos.

Resolución del problema:

Dado el rectángulo ABCD y el cuadrado equivalente EFHD que es necesario construir (figura 1). Y considerando AI = AD.



Se trata, a continuación, de determinar entre I y B un punto G tal que el rectángulo GBCH sea equivalente al rectángulo GFEA. Pero GBCH es equivalente al paralelogramo GBML q ue se obtiene construyendo GL = GA y llevando BH paralelo a GL. Ahora para que GFEH sea equivalente a GBML, es necesario y suficiente que GF sea igual a GK (la perpendicular bajada de G sobre BM. Pero para que EFHD sea un cuadrado es necesario además que GK o GF sean igual a GI.

De hecho esto no da el punto G, pero impone solamente una condición que uno puede tratar de resolver gráficamente buscando. Francon propone una solución, que es tomar G en medio, entre I y B.

Esta claro que entonces EFHD no es de ninguna manera un cuadrado, y que Francon transforma solamente el cuadrado *ab* en otro equivalente cuyas cotas:

$$(a + b)/2 \qquad y \qquad 2ab/(a + b)$$

Tienen una diferencia menor que la de a y b. Cada uno de ellos podría por aproximación estar tomado por la cota del cuadrado, buscando mientras que respetamos la operación sobre un segundo rectángulo se puede obtener una mejor aproximación.

6.2.RAIMBAUD, DE COLOGNE, Y RAOUL, DE LIÉGE

Aquí se hace alusión a una discusión, que al igual que la cuadratura del circulo, fue provocada por un pasaje del "Comentario de Boecio" sobre las categorías de Aristóteles: "Nosotros sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectas".

Es éste el tema principal de una correspondencia inédita intercambiada, probablemente hacia el 1025, entre un maestro de la escuela de Liége de nombre Raoul y Raimbaud maestro de Cologne.

Francon mira particularmente estas cartas, cuyo estudio conduce a las mismas conclusiones que el del opúsculo de la *cuadratura del círculo.*

Se produjo entonces una especie de torneo científico.

A Raoul, Raimbaud le formula una pregunta, y lo que le preocupa sobre todo al maestro de Cologne, no es la demostración de la proposición que aquí se trata (de la extraída del pasaje del comentario de Boecio) es la significación atribuida a la palabra *interior*. Pues si hay en un triángulo dos ángulos interiores, debe haber dos ángulos exteriores, ¿cuáles son?.

Un día, en Chartres, Raimbaud, había discutido esta cuestión con el obispo Fulbert. Ellos estaban de acuerdo que la palabra *interior* debía ser sinónimo de agudo, y que un Angulo *exterior* sería un ángulo obtuso. Pero ellos diferían sobre la razón de este sinónimo. Fulbert y Raimbaud conocían los enunciados del primer libro de Euclides por la traducción de Boecio.

La interpretación del enunciado de Euclides I, 32 es: "En todo triángulo, el ángulo exterior es igual a la suma de dos ángulos interiores y opuestos".

Cuando se habla de un triángulo sin epíteto debe ser un triángulo equilátero (como en la aritmética de Boecio). Para un triángulo tal, el ángulo exterior debe ser el ángulo obtuso teniendo su vértice en el centro O y subentendido por uno de sus lados.

Este ángulo, tal que BOC (de 120º) es igual a la suma de los ángulos ABC y ACB del triángulo (cada uno de 60º).

Raimbaud hace prevalecer esta extraña interpretación sobre la de Raould, quien había respondido que él termino *interior* debía aplicarse a los ángulos considerados en una figura plana, mientras que *exterior* seria un ángulo considerado sobre la superficie de un sólido (por ejemplo, un cubo).

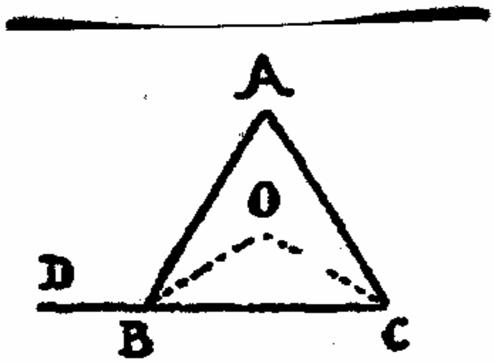
Francon rechazará la opinión de Raimbaud y señalará que el ángulo *exterior* debe significar un ángulo donde un lado es exterior al triángulo. Pero él traza este lado, a partir de un vértice, en una dirección cualquiera. El no adivino el sentido especial: El ángulo formado por un lado del triángulo con la prolongación de otro. El no tenia todavía la clave del enunciado euclidiano (que el ángulo ABD, por ejemplo, es igual a la suma de los ángulos BAC y ACB).

En cuanto a la proposición sobre la suma de los tres ángulos de un triángulo, es justo reconocer que Raoul se esforzó en demostrarla. Él lo hizo convenientemente para el triángulo rectángulo isósceles (como mitad de un circulo). Pero el trata de ir mas lejos, él declara que es más fácil comprender intuitivamente que explicar por el lenguaje, y habla de verificaciones recortando trozos de pergaminos.

Mas tarde, él tendrá la idea de que la diagonal de un rectángulo descompone a este en dos triángulos iguales, pero no llega a poner en forma la demostración, igual para un triángulo cualquiera.

Después Francon, Wazzon, maestro de liège en 1025, su sucesor Adelman, Razegin, amigo de Raimbaud y otros estarían ensayando la misma demostración. La de Adelman parece la única que puede explicar el caso general (al menos para un triángulo rectángulo). Francon declara que todas estas tentativas son imperfectas, pero él no llega a hacerlo mejor.

Así, en posesión del enunciado de uno de los teoremas, el más elemental para la geometría plana, los maestros mas renombrados del siglo XI son incapaces de comprender exactamente el sentido y ellos fracasan mas al intentar demostrarlo. Con este ejemplo, se puede juzgar lo difícil que era construir la geometría teórica por hombres instruidos para razonar y calcular.



BIBLIOGRAFIA

- Morris Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días (volumen I). Alianza Editorial, 1992

- H. Wussing, Lecciones de historia de las matemáticas
  Siglo XXI de España Editores, 1ª Edición en castellano 1979

- Carl B. Boyer, Historia de la Matemática
  Alianza Editorial, 6ª Edición 1999

- Nicolaus Bubnov, Gerberti Opera Matemática
  Georg Olms Hildesheim, 1963

- Paul Tannery, La Géométrie au XI Siècle
  Editado por el autor, París 1897