LA MATEMATICA
EN
LA INDIA

500 D.C A 1200 D.C.

ÍNDICE

1. Introducción

Esta época (500-1200d.c.), es la más importante en la India en lo que se refiere a las matemáticas.
Anterior al 500d.c. sólo sabemos que había cierta cultura (excavaciones de Mohenjo Daro) y la existencia de los Sulvasutras o reglas de la cuerda, así como de los Siddhantas o sistemas astronómicos; tenemos pocos escritos y textos de esta época.
Posterior al 1200d.c se sabe que vivieron matemáticos indios, pero no de la talla de los de nuestra época (500-1200d.c); esta por ejemplo Ramanujan (sigloXX).
A finales del siglo V nació Aryabhata, del cual nos quedó su obra más importante llamada *Aryabhatiya*, en el que trata temas matemáticos entre otros.
Sabemos que el sistema de numeración arábiga, aunque de hecho se originó en la India, fue adoptado en esta época por la civilización islámica y después transmitido a occidente, donde, desde entonces, ha venido siendo utilizado académica y regularmente.
Los números naturales son de lo más importante que adoptó la matemática india. Entre las operaciones aritméticas cabe destacar la multiplicación en celosía, en celdilla o en cuadrilátero, y la división larga o método de la galera.
Otros matemáticos destacados fueron Al-Biruni, que aunque no fue hindú, desarrolló en su obra Historia de la India algunos temas referidos a las matemáticas.
Brahmagupta, que vivió en la India central, expuso temas trigonométricos, y en su obra *Brahmasphutasiddhanta* plantea fórmulas para circunferencias, cuadriláteros, etc.
Pero fue sin duda Bhaskara el matemático hindú más importante de ésta época; en el *Lilavati* y *Vijaganita* trata de ecuaciones lineales y cuadráticas como temas más importantes, y en el *Siddhantasiromani* trata de cuestiones aritméticas y trigonometría.
Se dijo de su obra *Lilavati* que la escribió para distraer a su hija.
La astronomía también juega un papel muy importante en la India, tanto, que era su principal herramienta para combinarla con las matemáticas y obtener así lo que deseaban en algunos casos. Por ello, veremos también más adelante algunas referencias astronómicas que mucho tienen que ver en lo que nos atañe.
Y finalmente, aunque no menos importantes, también existieron otros matemáticos (en algunos casos con mucha sabiduría en astronomía) que pusieron su granito de arena en el desarrollo de las matemáticas, aunque en algunos casos ni siquiera se saben

aproximadamente sus fechas de nacimiento o muerte y si fueron simplemente matemáticos o algo más (obispos, artesanos, sacerdotes, etc.); este es el caso de Baudhayana, Lalla, etc.

2. Aryabhata

Nació en Pataliputra (actualmente Patna) en el 476, y murió en el 550; fue astrónomo y matemático indio. Sus escritos ejercieron una influencia considerable sobre la ciencia árabe. En matemáticas, resolvió ecuaciones de segundo grado, aunque muchas de sus fórmulas geométricas eran incorrectas. El único trabajo que nos ha quedado ha sido el *Aryabhatiya*, una serie de reglas y propuestas astronómicas y matemáticas escritas en sánscrito; es uno de los textos matemáticos hindúes más antiguos que conocemos.

Esta obra data alrededor del 500, es decir, no mucho tiempo después de la composición de los Siddhantas.

En esta época también se sabe de la existencia de más matemáticos hindúes de los cuales sabemos que escribieron libros sobre el mismo tipo de materia.

Se conocen los nombres de varios matemáticos hindúes anteriores a esta época, pero no se ha conservado nada de sus obras salvo unos breves fragmentos. A este respecto, pues, la posición del *Aryabhatiya* de Aryabhata es bastante análoga para en caso de la India a la de los elementos de Euclides para Grecia ocho siglos antes. Las dos obras son, en efecto, recopilaciones de desarrollos anteriores compiladas para un autor único. Y, sin embargo, hay más diferencias, y más sorprendentes, que semejanza entre estas dos obras; los elementos constituyen una síntesis bien ordenada lógicamente de la matemática pura, expuesta con un alto grado de abstracción y con un objetivo pedagógico evidente.

2.1. El Aryabhatiya

Es una breve obra descriptiva escrita en 123 estrofas métricas, con el objeto de suplementar las reglas del cálculo utilizadas en astronomía y en las técnicas de medición matemáticas, sin ninguna relación con la lógica o la metodología deductiva. Una tercera parte aproximada de la obra trata de ganitapada, es decir, de matemáticas; esta sección comienza con los nombres de las potencias de diez hasta el lugar décimo, y a continuación formula un conjunto de instrucciones para calcular raíces cuadradas y cúbicas de números enteros. Sigue un sistema de reglas para el cálculo de áreas, la mitad de las cuales son más o menos erróneas; para el área de un triángulo se da la regla correcta de calcular la mitad del producto de la base por la altura, para el volumen de la pirámide también se toma la mitad del producto de la base por la altura[1]. El área del círculo se calcula correctamente como la mitad del producto de la circunferencia por la mitad del diámetro, pero el volumen de una esfera viene expresado incorrectamente como el producto del área de un círculo máximo por la raíz cuadrada de esta área. Al tratar del cálculo de áreas de cuadriláteros aparecen de nuevo reglas correctas e incorrectas unas al lado de otras: el área de un trapecio viene dada como la semisuma de los lados paralelos por la distancia perpendicular entre ellos, y a continuación sigue la regla absurda e incomprensible de que el área de cualquier figura plana se calcula determinando dos de sus lados y multiplicándolos. Hay una regla en el *Aryabhatiya* que señalan con orgullo los historiadores hindúes de la matemática, que es la siguiente[2]:

> Suma 4 a 100, multiplica por 8 y súmale 62.000.El resultado te da aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 20.000.

Aquí podemos ver utilizado el equivalente a 3,1416 como valor de π, lo cual es ciertamente notable, pero tenemos que recordar que éste es esencialmente el valor que había usado Ptolomeo. El hecho más que probable de que Aryabhata estuviera influenciado en este contexto por sus predecesores griegos viene reforzado por su adopción de la miriada o 10.000 unidades como medida del radio de la circunferencia.

Una parte típica del *Aryabhatiya* es la que trata de progresiones aritméticas, la cual contiene reglas para calcular la suma de los términos de una progresión, y también para hallar el número de términos de la progresión conocido el primer término, la diferencia de la progresión y la suma de todos los términos. La primera de estas reglas había sido ya conocida mucho antes por otros escritores; la segunda aparece formulada en la siguiente forma, tan curiosa como complicada:

> Multiplíquese la suma de la progresión por ocho veces la diferencia común, súmese el cuadrado de la diferencia entre el doble del primer término y la diferencia común; tómese la raíz cuadrada de este número, réstese el doble del primer término, divídase por la

[1] *The Aryabhatiya of Aryabhata,* traducido por W. E. Clark (1930), pág. 26.

[2] *Aryabhatiya,* pág. 28. Estas traducciones y las que se utilizarán son de la edición de Clark de la nota 1.

diferencia común, añádase uno y divídase por dos. El resultado será igual al número de términos.

Aquí, al igual que a todo lo largo del *Aryabhatiya*, no se da ninguna motivación ni justificación para esta regla. Probablemente fue obtenida resolviendo una ecuación de segundo grado, cuyo conocimiento podría muy bien haber venido de Mesopotamia o de Grecia. A continuación de algunos problemas realmente complicados sobre interés compuesto(es decir, sobre progresiones geométricas), el autor del libro trata, en un lenguaje muy florido y fácilmente comprensible, del problema bien elemental de calcular el cuarto proporcional a tres números dados:

En la regla de tres multiplica el fruto por el deseo y divide por la medida. El resultado será el fruto del deseo.

Esta es, desde luego, la regla bien conocida que nos dice que si a/b =c/x, entonces x =bc/a, donde a es <<la medida>>, b <<el fruto>>, c <<el deseo>> y x <<el fruto del deseo>>.

Realmente puede decirse que la obra de Aryabhata es un <<potpourri>> de lo sencillo y lo complicado, a la vez que de lo concreto y lo incorrecto; es decir, que tiene una mezcla de todo lo bueno y todo lo malo. El sabio árabe Al-Biruni caracterizaba, medio milenio más tarde, la matemática hindú como una mezcla de vulgares guijarros y valiosos cristales, descripción que cuadra perfectamente al *Aryabhatiya*.

3. El sistema de numeración hindú

La segunda mitad del *Aryabhatiya* trata de la medida y cálculo de tiempos y de trigonometría esférica, y aquí es donde nos encontramos con un elemento nuevo que iba a dejar una huella permanente en la matemática de las generaciones futuras: el sistema de numeración posicional decimal. No sabemos exactamente de qué manera efectuaba sus cálculos Aryabhata, pero en su afirmación de que <<de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede>> hay una clara indicación de que en su mente estaba de una manera consciente la aplicación del principio posicional. La idea del <<valor local o posicional>> había sido ya un elemento absolutamente esencial del sistema de numeración babilónico, y quizá lo que los hindúes hicieron fue darse cuenta de que esta idea era aplicable también al sistema de notación decimal para los números enteros, que ya se estaba usando en la India.

El desarrollo histórico de las notaciones numéricas en la India parece haber seguido más o menos los mismos pasos que nos hemos encontrado en Grecia; las inscripciones procedentes del período cultural más primitivo de Mohenjo Daro muestran al principio un sistema consistente simplemente en el uso de palotes verticales reunidos en grupos, pero hacia la época de Asoka (siglo IIIa.C.) se usaba ya un sistema parecido al herodiánico. En este esquema nuevo se seguía usando el principio repetitivo, pero se adoptaron a la vez nuevos símbolos para unidades de orden superior, concretamente para cuatro, diez, veinte y cien. Esta manera de escribir los números, llamada escritura Karosthi, fue evolucionando gradualmente para dar lugar a otro sistema de notación, conocido como el de los caracteres Brahmi, que recuerda mucho el cifrado alfabético del sistema jónico griego; cabe preguntarse, por lo tanto, si el hecho de que el cambio de sistema tuviera lugar en la India poco después del período durante el cual los numerales herodiánicos se vieron desplazados por los jónicos en Grecia, fue una simple coincidencia o no.

De los numerales cifrados del sistema Brahmi a nuestra notación moderna para los números naturales hay que superar únicamente dos breves etapas; la primera consiste en reconocer que, utilizando estrictamente el principio posicional, las cifras que representan los nueve primeros números pueden servir también como cifras para los correspondientes múltiplos de diez o, por la misma razón, como cifras para representar los múltiplos correspondientes de cualquier potencia de diez. El reconocer este hecho básico habría convertido de golpe en superfluas todas las cifras Brahmi salvo las nueve primeras. No se sabe cuando se produjo exactamente esta reducción a nueve cifras y, de hecho, lo más probable es que la transición a la notación <<más económica>> se hiciera de una manera gradual. Parece seguro, si nos basamos en la evidencia disponible, que este importante cambio tuvo lugar en la India, pero los orígenes de la inspiración para llevarlo a cabo son, en cambio, poco claros. Posiblemente los llamados numerales hindúes fueran el resultado de un desarrollo interno únicamente; quizá se desarrollaron primero en el contexto de los intercambios occidentales de la India con Persia, en cambio, ya que el conocimiento de la notación posicional babilónica pudo haber conducido a una modificación del sistema Brahmi. Es posible también que el nuevo sistema tuviera sus orígenes en los contactos hacia el Este, con China, donde el sistema pseudoposicional de barras pudiera haber sugerido la reducción a nueve cifras. Hay incluso una teoría que afirma que esta reducción pudo haber tenido lugar por primera vez en Alejandría, dentro del sistema alfabético griego, y que esta idea debió propagarse más tarde a la India[3]. Durante el período alejandrino tardío, la costumbre griega de escribir las fracciones usuales poniendo el numerador debajo del denominador se invirtió, y ésta es precisamente la forma que adoptaron los hindúes, sin la barra que los separa. Desgraciadamente los hindúes no aplicaron el nuevo sistema de numeración para los enteros al campo de las fracciones decimales, y así se perdió la ventaja potencial más importante del cambio de la notación de tipo jónico.

La referencia específica más antigua a los numerales hindúes data del 662 y se encuentra en los escritos de Severo Sebokt, un obispo sirio. Como consecuencia del cierre de las escuelas filosóficas atenienses ordenado por Justiniano, algunos de los sabios que enseñaban en ellas se trasladaron a Siria, donde establecieron varios centros en los que se cultivaba el saber griego, y Severo Sebokt debió sentirse evidentemente molesto con el desprecio que mostraban algunos de ellos por la cultura y por el saber no griegos, y consideró necesario por lo tanto el recordar a aquellos que <<hablaban griego>> que <<hay otros también que saben algo>>. Y para ilustrar este punto llama la atención sobre los hindúes y sus <<sutiles descubrimientos en astronomía>>, y especialmente <<sus valiosos métodos de cálculo y sus operaciones que sobrepasan toda descripción. Quisiera decir solamente que sus cálculos se hacen por medio de nueve signos>>[4]. Sabemos también que por aquella época los numerales hindúes ya se habían estado usando durante bastante tiempo, como revela el hecho de que el primer documento propiamente hindú sea un plato que data del año 595, en el que aparece escrita la fecha del año 346 en notación decimal posicional[5].

[3] Véase Harriet P. Lattin, "*The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov*", Isis, 19 (1933), págs. 181-194.

[4] Citado de D. E. S Smith, *History of Mathematics*, volumen I, pág. 167.

[5] Véase D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3ª edición. (New York: Dover), pág. 71.

4. El símbolo para el cero

Hay que hacer notar que la referencia a nueve símbolos y no a diez implica evidentemente que los hindúes no habían superado aún la segunda etapa en la transición hacia el sistema de numeración moderno, es decir, la que consiste en la introducción de una notación especial para una posición que falta o, lo que es lo mismo, de un símbolo para el cero. En la historia de las Matemáticas se presentan muchas situaciones anómalas, y no es precisamente la menor la que revela el hecho de que <<la primera aparición indudable del cero en la India es una inscripción del año 876>>[6], es decir, más de dos siglos después de la primera referencia que conocemos a los otros nueve numerales.

No está demostrado ni siquiera que el número cero (en tanto que idea conceptualmente distinta de un símbolo para una posición vacía) surgiera al mismo tiempo que los otros nueve numerales hindúes. Es muy posible, en cambio, que el cero tuviera su origen el mundo griego, quizá en Alejandría, y que desde allí se propagara a la India después de que el sistema decimal posicional se hubiera consolidado allí[7].

La historia del cero como símbolo para representar una posición vacía en los sistemas de notación posicionales se complica aún más por el hecho de que ésta idea apareció, independientemente según todos los indicios, tanto en el mundo occidental y seguramente mucho antes de la época de Colón, como en el mundo oriental asiático. Los mayas del Yucatán utilizaban una numeración posicional para representar intervalos de tiempo entre distintas fechas de su calendario, generalmente con 20 como base principal y 5 como base auxiliar (que corresponden así al 60 y al 10 usados por los babilonios). Las unidades simples venían representadas por puntos y los grupos de cinco por barras horizontales, de manera que el número 17, por ejemplo, se escribía como
, es decir, $3 \cdot 5 + 2$. La ordenación posicional era vertical, con las unidades de tiempo
de orden mayor encima y decreciendo hacia abajo, por ejemplo, la expresión representaba $352 = 17 \cdot 20 + 12$. Debido al hecho de que este sistema se utilizaba principalmente para contar días dentro de un calendario que consistía en un año de 360

---

[6] Smith, *History of Mathematics,* volumen II, pág. 69.

[7] Véase, por ejemplo, B. L. Van der Waerden, *Science Awakening* (1961), págs. 56-58.

días, la tercera posición se vio usualmente modificada, de manera que no representaba múltiplos de 20 · 20 como ocurre en un sistema vigesimal puro, sino múltiplos de 18 · 20 = 360. No obstante, a partir de esta posición volvía a funcionar permanentemente la base 20. En este sistema de notación posicional, los mayas representaban las posiciones vacías por medio de un símbolo que aparece en diversas formas, pero que recuerda en todas ellas un ojo semiabierto. Así pues la expresión representaba en este sistema el número 17 · (20 · 18 · 20) + 0 · (18 · 20) + 13 · 20 + 0.

Con la introducción del décimo numeral en el sistema de notación para representar el cero, en la forma de un redondo huevo de oca, quedaba completo el moderno sistema de numeración para los enteros. Aunque las formas hindúes medievales de las diez cifras numerales son muy diferentes de las que usamos hoy en día, los principios teóricos del sistema quedaban ya definitivamente establecidos.

El nuevo sistema de numeración que llamamos usualmente el sistema hindú no consiste mas que en una nueva combinación de tres principios básicos, todos ellos con un origen mucho más antiguo: 1) una base decimal; 2) una notación posicional, y 3) una forma cifrada para cada uno de los diez numerales básicos. Ninguno de estos tres principios se debía, como hemos dicho, originalmente a los hindúes, pero lo que sí se debió a ellos probablemente la idea de reunir por primera vez los tres para construir el sistema de numeración moderno.

Puede ser interesante decir, para finalizar, un par de palabras acerca de la forma del símbolo hindú para el cero, que es también el nuestro. Hubo una época en la que se admitía que esta forma redonda tuvo su origen en la letra griega <<omicrón>>, que es la inicial de la palabra griega <<ouden>> o vacío, pero investigaciones más recientes parecen cuestionar tal explicación de su origen. Aunque el símbolo para representar una posición vacía en algunas de las versiones que conocemos de las tablas de cuerda de Ptolomeo se parece a una <<omicrón>>, los símbolos primitivos para el cero en las fracciones sexagesimales griegas son formas redondas decoradas de diversas maneras y que difieren mucho de un simple huevo de oca. Además, cuando se adoptó al fin un sistema decimal posicional en el Imperio Bizantino durante el siglo XV, partiendo del viejo sistema alfabético para los numerales, suprimiendo las 18 últimas letras y añadiendo a las nueve primeras letras un símbolo para el cero, este símbolo adoptó formas muy distintas de la de una <<omicrón>>[8]; a veces se parecía a una h minúscula invertida, y otras veces aparecía simplemente como un punto.

4.1. Ceros + unos (dígitos)

La mayor parte de lo que hoy en día se consideran términos y axiomas de las matemáticas occidentales son, en realidad, de origen árabe o hindú. La palabra álgebra procede de Al-gebr wel mukabala, un libro escrito en el siglo IX por uno de los más sofisticados matemáticos árabes, Alkarismi, que dio su nombre al término algoritmo. El libro *Al-gebr* está, a su vez, basado en la obra de Brahmagupta, un matemático y astrónomo hindú quien, en el siglo VII, consolidó los principios aritméticos sofisticados, aunque algo pesados, de la India en forma de veinte procesos básicos <<esenciales a todos quiénes deseen ser calculadores>>. El sistema de anotación y cálculo que surgió de la fusión de la aritmética hindú y árabe se introdujo en Occidente a través de sabios árabes y comerciantes asiáticos. Los mercaderes ya habían llevado la aritmética india hasta Bagdag y se dice que la destreza aritmética de Alkarismi la adquirió de sus viajes por la India. Se trataba de un dispositivo que ahorraba mucho espacio si se le comparaba con sus homólogos más engorrosos que, en su mayoría, se habían desarrollado de una forma paralela al ábaco, un dispositivo que desconocían en la India pero que había sido ampliamente utilizado en los mundos egipcio, babilónico, griego y romano. Mientras que el ábaco había eliminado la necesidad de procesar y archivar números en una forma escrita concisa, la India había desarrollado un sofisticado sistema de notación que servía para calcular y registrar resultados.

La India, de hecho, había desarrollado un ábaco escrito, al usar números escritos en lugar de guijarros y cuentas, dándoles los mismos signos sin importar la posición que tenían y utilizando un cero o un punto para indicar una columna vacía en el ábaco virtual. Mientras quienes usaban el ábaco utilizaban signos completamente distintos para números con diferente valor - como, por ejemplo, I para el uno y X para el diez en cifras romanas -, el sistema hindú podía utilizar la misma cifra - I - para designar uno, diez, cien y, obviamente, una gran cantidad otros números. <<Es la India la que nos dio el ingenioso método de expresar todos los numeró mediante diez símbolos>>, escribió

[8] Véase O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity,*2ª edición (Providence, R. L: Brown University Press, 1957), pág. 14.

Pierre-Simon Laplace, <<cada símbolo recibía un valor de posición y un valor absoluto.>> En otras palabras, los números eran cardinales y ordinales al mismo tiempo, expresando cada uno su lugar en la serie (primero, segundo, tercero...), y un valor propio. En contraste con las cifras romanas en las cuales dos es simplemente dos unos juntos, el dos del sánscrito es un número cualitativamente diferente al uno, una entidad o carácter por sí mismo. Como indica Laplace, la nueva aritmética era <<una idea profunda e importante que nos parece tan simple ahora que ignoramos su verdadero mérito, pero su misma simplicidad, la gran facilidad con que se ha adaptado a todo tipo de cálculos, coloca a nuestra aritmética al frente de las invenciones útiles>>. Aunque esta expresión <<nuestra aritmética>> se apropia sutilmente del nuevo sistema como si fuera una <<invención>> de Occidente, Laplace prosigue, <<apreciaremos la grandeza de este logro si recordamos que escapó a los genios de Arquímedes y Apolonio, dos de los más grandes hombres de la antigüedad>>.

<<Ciertamente mis tropas deben estar formadas por números, o no existir en absoluto y dejarían de ser ese tipo concreto de tropas en cuestión. Pero entonces ¿qué son esos números? Eso es el enigma>> Ada Lovelace.

5. La trigonometría hindú

El desarrollo de nuestro sistema de notación para los números naturales fue sin duda una de las dos contribuciones más importante de la India a la historia de la matemática. La otra consistió en la introducción de lo equivalente a la función seno en trigonometría, para reemplazar las tablas de cuerdas griegas; las tablas más antiguas de la relación seno que han llegado hasta nosotros son las que figuran en los Siddhantas y en el *Aryabhatiya*, donde se dan los senos de los ángulos menores o iguales que $90°$ para 24 intervalos angulares iguales de $3(3°/4)$ cada uno. Para expresar la longitud del arco y la del seno en términos de la misma unidad, se tomaba como radio 3.438 unidades y la circunferencia correspondiente como $360 \cdot 60 = 21.600$ unidades; estos valores implican un valor de π que coincide con el de Ptolomeo hasta la cuarta cifra significativa, pero Aryabhata utiliza en otros contextos el valor $\sqrt{10}$ para π, valor que aparece tan frecuentemente en la India que se le conoce a veces como <<el valor hindú>> de π.

Para el seno de $3(3°/4)$ tanto los Siddhantas como el *Aryabhatiya* toman exactamente el número de unidades que contiene el arco, es decir 60 $[3(3°/4)]$ = 225; traducido a lenguaje moderno, el seno de un ángulo pequeño es casi igual a la medida del ángulo en radianes, que es justamente lo que hacían los hindúes. Para las entradas restantes de la tabla de senos utilizaban los hindúes una fórmula de recursión que puede expresarse en la forma siguiente: si designamos por S_n el n-ésimo seno en la sucesión que va de n = 1 a n = 24, y si la suma de los n primeros senos es R_n, entonces $S_{n+1} = S_n + S_1 - R_n / S_1$. A partir de esta regla uno puede deducir fácilmente que sen 7 $(1°/2)$ = 449, sen 11 $(1°/4)$ = 671, sen 15° = 890, y así hasta seno 90° = 3.438, que son los valores que aparecen en las tablas de los Siddhantas y del *Aryabhatiya*. Las tablas incluyen además los valores de lo que nosotros llamamos hoy el seno verso de un ángulo, es decir, de $1 - \cos\theta$ en forma trigonométrica moderna, o de $3.438 \cdot (1 - \cos\theta)$ en forma trigonométrica hindú, desde sen vers. 3 $(3°/4)$ = 7 a sen vers. 90° = 3.438. Si dividimos los números que figuran en la tabla por 3.438 nos encontramos con resultados que se aproximan mucho a los valores correspondientes en las tablas trigonométricas modernas[9].

6. El método de multiplicación hindú

La trigonometría hindú fue evidentemente una herramienta auxiliar para la astronomía tan útil como precisa. El cómo llegaron los hindúes a resultados tales como la fórmula de recursión para los senos antes mencionados, nos es desconocido, pero sí se ha sugerido[10] que tales reglas pudieron venir motivadas por un desarrollo intuitivo o empírico del cálculo con ecuaciones en diferencias y de la práctica de la interpolación; de hecho, se suele caracterizar frecuentemente a la matemática hindú en general como <<intuitiva>>, para ponerla en contraste con el severo racionalismo de la geometría griega. A pesar de que es evidente la influencia griega en la trigonometría hindú, parecen no haber tenido ocasión de adoptar la geometría griega, o bien no aprovecharon

[9] En Smith, *History of Mathematics,* volumen II, se reproduce la tabla del *Surya Siddhanta.*

[10] Véase E. S. Kennedy en su artículo “Trigonometry”, en el *Yearbook on History of Mathematics* del National Council of Teachers of Mathematics.

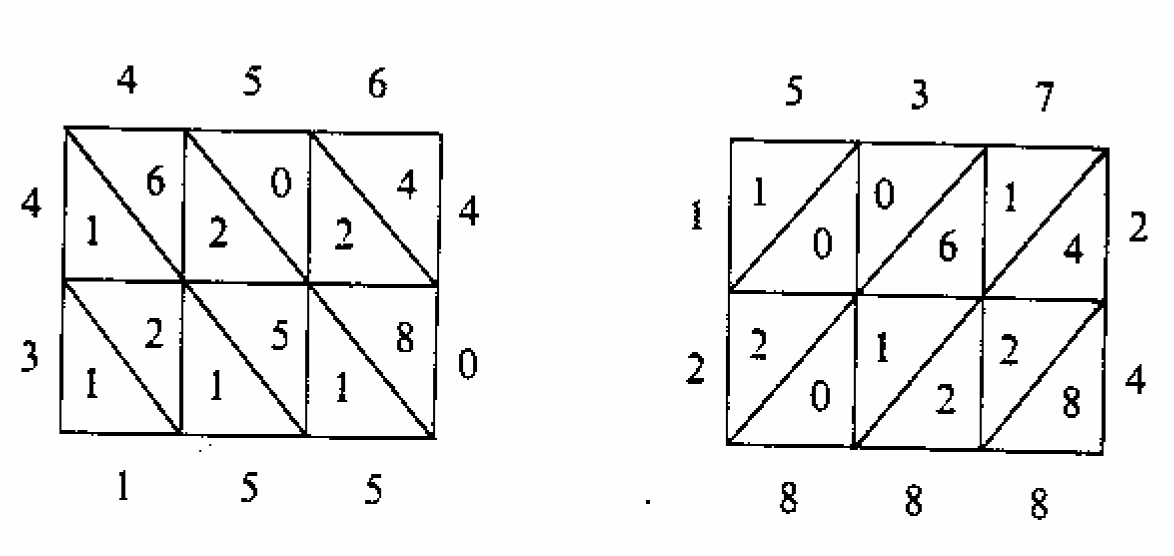
la ocasión, interesados como estaban únicamente en reglas de medición sencillas. Hay muy escasa evidencia en la India del estudio de problemas geométricos que podríamos llamar clásicos, o de curvas distintas de la circunferencia, e incluso las secciones cónicas parecen haber sido ignoradas por los hindúes, lo mismo que por los chinos. En cambio, a los matemáticos hindúes les fascinaban las cuestiones numéricas, ya tuvieran que ver solamente con las operaciones aritméticas usuales o con la resolución de ecuaciones determinadas o indeterminadas. La suma y la multiplicación se hacían en la India casi de la misma manera como las hacemos hoy, excepto en que los hindúes parecen haber preferido al principio escribir los números con las unidades de orden menor a la izquierda, y procedían por lo tanto de izquierda a derecha, utilizando pequeñas pizarras cubiertas de pintura blanca no permanente que se iba quitando al escribir sobre ellas, o bien una tabla cubierta de arena o harina.

Entre los métodos utilizados para multiplicar había uno que se conoce con varios nombres distintos: multiplicación en celosía o multiplicación en celdillas o en cuadrilátero.

6.1. Multiplicación en celdilla o celosía

Para explicar el esquema en el que se basa, lo mejor es recurrir a un par de ejemplos. En el primero de ellos el número 456 aparece

FIGURA1



multiplicado por 34;el multiplicando está escrito en la parte superior del retículo y el multiplicador a la izquierda, y los productos parciales ocupan las celdas cuadradas, de manera que al sumar los dígitos en diagonal de arriba a la izquierda abajo a la derecha se obtiene el producto 15.504 que aparece en la parte inferior y derecha del rectángulo. En la figura 2 se da otro ejemplo para indicar que los datos se podían disponer también de otras maneras; aquí vemos el multiplicando 537 situado de nuevo en la parte superior y el multiplicador 24 en cambio a la derecha, mientras que el producto 12.888 se lee por la izquierda y la parte inferior del rectángulo. Son posibles aún otras modificaciones de detalle, pero, en su principio fundamental, la multiplicación por celosía es la misma que la nuestra, desde luego, y la distribución de los dígitos por celdillas no es más que un hábil recurso para evitar el trabajo mental de <<llevar>> de un lugar al siguiente las decenas que van apareciendo en los productos parciales; la única operación de <<llevar>> que no se evita en este método de multiplicación por retículo es la que resulta al sumar al final los productos parciales diagonalmente.

7. La división larga (método de la galera)

No sabemos dónde tuvo su origen exactamente el método de multiplicación por celosía, pero parece lo más probable que fuera en la India, puesto que allí se utilizaba ya en el siglo XII como mínimo, y de la India parece ser que se extendió a China y a Arabia.

De los árabes pasó a Italia durante los siglos XIV y XV, y aquí fue donde recibió el nombre de celosía debido a la semejanza del diagrama con las rejillas de madera que adornaban y protegían las ventanas en Venecia y en otras ciudades italianas. De hecho, la palabra <<celosía>> parece provenir del italiano celosía, y es de uso común en España, Francia, Alemania, Holanda y Rusia por lo menos, para designar las persianas venecianas. Los árabes, y a través de ellos más tarde los europeos, adoptaron la mayor parte de sus artificios aritméticos de los hindúes, y por lo tanto es muy probable que también provenga de la India el método de división larga conocido como el <<método de la galera>>, por su semejanza con un barco con las velas desplegadas. Para ilustrar este método, supongamos la división de 44.977 por 382; en la figura 2.1 aparece hecha esta división por el método moderno, y en la figura 2.2 por el método de la galera[11]. Este segundo se parece mucho al primero excepto en que el dividendo aparece en el medio, ya que las restas se hacen cancelando los dígitos y poniendo las diferencias encima de

FIGURA2

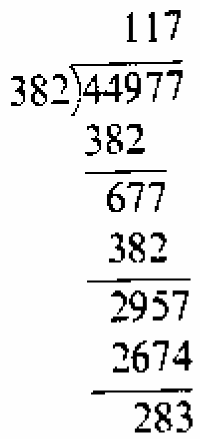


figura 2.1

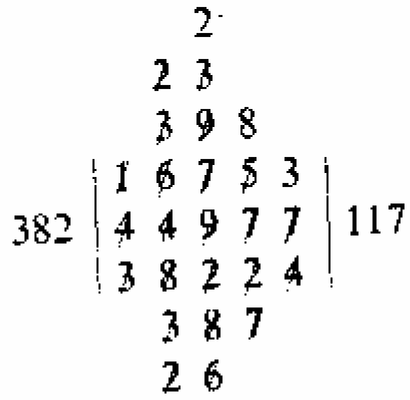


figura 2.2

los minuendos y no debajo. Así pues, el resto final 283 aparece en la parte superior derecha y no en la parte inferior.

El proceso reproducido en la figura 2 es fácil de seguir si tenemos en cuenta que los dígitos de un substraendo dado, como el 2674, o de una diferencia dada, como la 2957, no figuran todos ellos necesariamente en la misma fila, y que los substraendos aparecen escritos por debajo de la línea central y las diferencias por encima; por otra parte, la posición en una columna es importante, pero no la posición en una fila. El cálculo de raíces de números probablemente siguió un esquema análogo al de la <<galera>>, ligado en la época posterior al teorema del binomio en la forma del <<triángulo de Pascal>>, pero los matemáticos hindúes no daban nunca explicaciones de sus cálculos ni demostraciones de sus reglas; es posible que las influencias china o babilónica jugaran un papel importante en el proceso de evolución del cálculo de raíces. Se oye

[11] Para una descripción más completa de los innumerables métodos de cálculo que se han utilizado, véase F. A. Yeldham, *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (1926).

decir a veces que <<la prueba de los nueves>> es un invento hindú, pero parece que los griegos ya conocían esta propiedad mucho antes, aunque no la usaron de una manera general, y que este método se popularizó solamente con los árabes hacia el siglo XI.

8. Brahmagupta

Nació (posiblemente) en Ujjain, India, en el 598; y murió también en la India en el 670. Los últimos párrafos pueden haber dejado la impresión injustificada de que en la matemática hindú hubo un alto grado de uniformidad, puesto que varias veces hemos calificado diversos desarrollos simplemente como <<de origen hindú>>, sin especificar el periodo al que corresponden. El problema está precisamente en que la cronología hindú es muy insegura. Por poner sólo un ejemplo, el material que aparece en el importante manuscrito de Bakshali, que contiene una aritmética anónima, data, según algunos historiadores, del siglo III o IV; según otros, del siglo VI; según otros, del siglo VIII o IX o más tarde aún, y hay incluso opiniones que mantienen que puede no ser ni siquiera de origen hindú[12]. Nosotros hemos situado la obra de Aryabhata alrededor del año 500, pero esta fecha no es segura, ya que hubo dos matemáticos con el mismo nombre de Aryabhata, y no podemos atribuir con toda seguridad los resultados a nuestro Aryabhata, el más viejo. La matemática hindú presenta problemas históricos más difíciles de resolver que la matemática griega, debido a que los autores hindúes raramente mencionan a sus predecesores, a la vez que muestran una sorprendente independencia en sus planteamientos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, que Brahmagupta (fl. 628), que vivió en la India central algo más de un siglo después que Aryabhata, tiene muy poco que ver con su antecesor que había vivido en la región oriental de la India. Brahmagupta menciona dos valores de π, el <<valor práctico>> 3 y el <<valor exacto>> $\sqrt{10}$, pero no menciona en cambio el valor más aproximado de Aryabhata, y en la trigonometría que incluye su obra más conocida, el *Brahmasphuta Siddhanta*.

8.1. Su obra más conocida: *Brahmasphutasiddhanta*

En esta obra Brahmagupta adopta como el radio del círculo el valor 3.270 en vez de 3.438 de Aryabhata (como puede verse, los distintos matemáticos indios a lo largo de la historia dan valores relativamente distintos de sus investigaciones). Este trabajo denominado también (La apertura del Universo) lo realizó en el 628, y lo escribió en 25 capítulos; Bramahgupta nos dice en el texto que lo escribió a Bhillamala, que hoy es la ciudad de Bhinmal; esta era la capital de las tierras gobernadas por la dinastía de Gurjara. Brahmagupta se desplazó del observatorio astronómico a Ujjain, que era el principal centro matemático de la antigua India en ese momento. Los buenos matemáticos como Varahamihira trabajaron allí y construyeron una gran escuela en astronomía matemática. En un aspecto al menos sí se parece a su predecesor, y es en la mezcla indiscriminada de resultados correctos e incorrectos. Brahmagupta calcula el <<área bruta>> de un triángulo isósceles multiplicando la mitad de la base por uno de los lados iguales; para el triángulo escaleno de base 14 y lados 13 y 15 calcula el <<área bruta>>

Multiplicando la mitad de la base por la media aritmética de los otros dos lados. En cambio, para hallar el área <<exacta>> utiliza la fórmula de Arquímedes-Herón. Para el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo da lo equivalente al resultado trigonométrico correcto 2R =a/senA=b/senB=c/senC, pero esto no es, desde luego, más que una reformulación de un resultado conocido ya por Ptolomeo en su lenguaje de cuerdas. El resultado quizá más bello en la obra de Brahmagupta es su generalización de la <<fórmula de Herón>> para calcular el área de un cuadrilátero; esta fórmula, K $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, donde a, b, c, d, son los lados del cuadrilátero y s el semiperímetro, aún lleva su nombre, pero la gloria de este descubrimiento queda un tanto empañada por su fracaso en darse cuenta de que tal fórmula sólo es correcta en el caso de un cuadrilátero cíclico[13] (puede verse que Brahmagupta no iba mal encaminado y anduvo muy cerca). La fórmula correcta para un cuadrilátero arbitrario es la K

[12] Véase Florian Cajori, *A History of Mathematics* (1919), págs. 84-85; D. E. Smith, *History of Mathematics, volumen I*, pág. 164; Hofmann, *Geschichte der Mathematik, volumen I,* p

[13] Puede verse una demostración de esta fórmula en R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York, Houghton Mifflin, 1929), págs. 81-82.

$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot\cos^2\alpha}$, donde α es la semisuma de dos ángulos opuestos en el cuadrilátero. Brahmagupta da también como regla para hallar el <<área bruta>> de un cuadrilátero la fórmula prehelénica que consiste en multiplicar las medias aritméticas de los dos pares de lados opuestos, y así, por ejemplo, para un cuadrilátero de lados a = 25, b = 25, c = 25, d = 39, da como <<área bruta>> el valor 800.

Brahmagupta entendió que los sistemas de numeración fueron más allá, a excepción de otros matemáticos del periodo. En esta obra él definió el cero como el resultado de restar un número de sí mismo. Él dio algunas propiedades:

1) Cuando el cero se suma a un número o se resta de un número, el número permanece inalterado.

2) Un número multiplicado por cero es cero.

Él también da reglas aritméticas en términos de fortunas (números positivos) y deudas (números negativos):

1) Una deuda menos el cero es una deuda.
2) Una fortuna menos el cero es una fortuna.
3) Una deuda restada del cero es una fortuna.
4) Una fortuna restada del cero es una deuda.
5) El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.
6) El producto o cociente de dos fortunas es una fortuna.
7) El producto o cociente de dos deudas es una fortuna.
8) El producto o cociente de una deuda y una fortuna es una deuda.
9) El producto o cociente de una fortuna y una deuda es una deuda.

Bramahgupta intentó extender la aritmética para incluir la división por cero, entonces:

1) Cero dividido por cero es cero.
2) Cero dividido por negativo o los números positivos son o cero o se expresa como una fracción con cero como numerador y la cantidad finita como denominador.

Realmente, Brahmagupta está diciendo que *n* dividido por cero es n/0. Él se equivoca cuando dice que cero dividido por cero es cero. Sin embargo es un esfuerzo inteligente de Brahmagupta por extender la aritmética.

A continuación describiremos los métodos de multiplicación a los que acostumbraba; que es más o menos de la misma manera que lo utilizamos hoy. El primer método que nosotros describimos se llama "gomutrika" realizado por Bramahgupta. Ifrah traduce "gomutrika" como "la trayectoria de la orina de una vaca". Considérese el producto de 235 multiplicado por 264. Empezamos poniendo la suma fuera como sigue:

2 235

6 235

4 235

Ahora multiplico los 235 de la 1ª fila por el 2 que hay a su lado. Empiezo así: $2 \cdot 5 = 10$, poniendo el 0 debajo de la fila de los 5, llevándonos 1 de la forma en que se hace.

2 235

6 235

4 235

470

Ahora multiplico los 235 de la segunda fila por el 6 que tiene a su lado, poniendo la operación resultante debajo de la cantidad que nos ha dado en la multiplicación realizada anteriormente

2 235

6 235

4 235

470

1410

Ahora, multiplico los 235 de la tercera fila por el 4 que hay al lado, y el resultado lo colocamos debajo de 1410, moviéndose un lugar a la derecha como antes.

2 235

6 235

4 235

470

1410

940

Ahora sumo las tres cantidades anteriores:

2 235

6 235

4 235

470

1410

940

62040

Posteriormente, realizamos el siguiente cambio en los números:

235 4

235 6

235 2

940

1410

470

62040

Y finalmente, la operación nos quedará así:

235

----

940 4

1410 6

470 2

62040

Otro resultado aritmético presentado por Brahmagupta es su algoritmo para el cálculo de raíces cuadradas, el cual es discutido y se demuestra que es equivalente a la fórmula reiterativa de Newton-Raphson.

Brahmagupta desarrolló algunas anotaciones algebraicas y presenta métodos para resolver ecuaciones cuadráticas (ecuaciones indeterminadas entre otras). Majumdar escribe: Brahmagupta utilizó el método de fracciones continuas quizás para encontrar la solución íntegra de una ecuación indeterminada.

Majumdar da los versos sánscritos originales del *Brahmasphutasiddhanta* de Brahmagupta y su traducción inglesa con interpretación moderna.

Brahmagupta también resuelve ecuaciones indeterminadas cuadráticas del tipo que veremos a continuación: $ax^2 + c = y^2$ y $ax^2 - c = y^2$. Por ejemplo él resuelve $8x^2 + 1 = y^2$ que obtienen las soluciones (x, y) = (1, 3), (6, 17), (35, 99), (204, 577), (1189, 3363),... Para la ecuación $11x^2 + 1 = y^2$ Brahmagupta obtuvo las soluciones (x, y) = (3, 10), (161/5, 534/5),... Él también resuelve $61x^2 + 1 = y^2$ en donde x = 226153980, y = 1766319049 como solución más pequeña.

Un ejemplo del tipo de problemas que Brahmagupta propone y resuelve en el *Brahmasphutasiddhanta* es el siguiente:

Se prestaron 500 *drammas* con una proporción desconocida de interés; se prestó el interés en el dinero durante 4 meses a otro a la misma proporción de interés y se sumó en diez meses a 78 *drammas*. ¿Puede decirnos la proporción de interés?.

También se dan reglas para sumar series. Brahmagupta da números naturales a la suma de los cuadrados de los *n* primeros como n(n+1)(2n+1)/6 y la suma de los cubos de los *n* primeros números naturales. Esto no se realiza así, y nosotros no sabemos como descubrió Brahmagupta estas fórmulas.

En el *Brahmasphutasiddhanta*, Brahmagupta dio unas fórmulas notables para el área de un cuadrilátero cíclico y para las longitudes de las diagonales en términos de los lados. Él único punto discutible aquí es que Brahmagupta no dice que las fórmulas son sólo correctas para el cuadrilátero cíclico que algunos historiadores lo toman como error, mientras que otros sólo quisieron decir las reglas para aplicarlas a nuestro cuadrilátero cíclico.

Mucho material del *Brahmasphutasiddhanta* trata de los eclipses solares y lunares, conjunciones planetarias y posiciones de los planetas. Brahmagupta creyó en una Tierra estática y dio algunas longitudes haciendo una gran conjunción entre las matemáticas y la astronomía: en su primer trabajo dio como la longitud del año como 365 días, 6 horas, 5 minutos y 19 segundos, cambiando el valor a 365 días, 6 horas, 12 minutos y 36 segundos en el segundo libro (*Khandakhadyaka*). Este segundo valor, no es desde luego una mejora del primero; uno tiene que preguntarse si el segundo valor de Brahmagupta para la longitud del año lo toma de Aryabhata.

El *Khandakhadyaka* está constituido por ocho capítulos, y descubre temas como: las longitudes de los planetas, los tres problemas de rotación diurnal, eclipses lunares, eclipses solares, subidas y escenas, la media luna de la luna y conjunciones de los planetas. Contiene un apéndice con versiones con un capítulo, en otras versiones tienen tres.

De particular interés para las matemáticas en este trabajo de Brahmagupta tiene la fórmula de interpolación en el que acostumbra a calcular valores de senos. Esto se estudió en casos más particulares como la fórmula más general de interpolación de Newton-Stirling.

8.2. La fórmula de Brahmagupta

Las contribuciones de Brahmagupta al álgebra son mucho más importantes que sus reglas para el cálculo de áreas, ya que nos encontramos aquí con soluciones generales de ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa; de hecho, la primera vez que aparece sistematizada la aritmética de los números negativos y del cero es en la obra de Brahmagupta.

Reglas esencialmente equivalentes a las que controlan las operaciones aritméticas con magnitudes negativas aparecían ya en los teoremas del álgebra geométrica de los griegos, pero referidas siempre a propiedades de la operación de restar, tales como, por ejemplo, $(a-b) \cdot (c-d) = ac + bd - ad - bc$, pero a los hindúes corresponde el mérito de haber dado un paso decisivo al convertir estas reglas en reglas propiamente numéricas acerca de números positivos y negativos. Además, aunque los griegos tuvieron un concepto de la nada o el vacío, no lo interpretaron nunca como un número, tal como hicieron los hindúes. Sin embargo, es justamente en este contexto donde Brahmagupta vuelve a estropear un poco las cosas afirmando que 0/0=0, mientras que en la cuestión clave acerca del valor del cociente a/0, para a $\neq$ 0, simplemente no se pronuncia:

> Positivo dividido por positivo, o negativo por negativo, es afirmativo. Cifra dividido por cifra es nada. Positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por afirmativo es negativo. Positivo o negativo dividido por cifra es una fracción que la tiene por denominador[14].

Hay que decir también que los hindúes consideraban igualmente como números las raíces irracionales de otros números, cosa que no hicieron nunca, desde luego, los griegos. Este paso supuso una ayuda enorme para el álgebra, y los matemáticos hindúes han sido muy elogiados por decidirse a adoptar esta medida, pero hay que recordar, no obstante, que en este caso la contribución hindú fue el resultado de una inconsciencia de tipo lógico más que de una profundidad matemática. Ya hemos visto que los matemáticos hindúes carecieron de una distinción clara entre los resultados exactos y los inexactos, y en consecuencia era lo más natural que no tomaran en consideración seriamente las diferencias profundas entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Para ellos no había ningún impedimento en aceptar los números irracionales, y las generaciones posteriores siguieron su mismo camino de una manera alegre e ingenua, hasta que en el siglo XIX consiguieron al fin los matemáticos fundamentar el sistema de los números reales sobre una base sólida.

La matemática hindú consistió, como hemos dicho ya, en una mezcla de bueno y malo, pero parte de lo bueno fue extraordinariamente bueno, y a este respecto Brahmagupta merece que no se le regateen elogios. El álgebra hindú es notable especialmente por su desarrollo del análisis indeterminado, al que Brahmagupta mismo hizo varias contribuciones; para mencionar sólo una, nos encontramos en su obra con una regla para la formación de ternas pitagóricas expresada en la forma m, $(1/2)m^2/m-n$, $(1/2)m^{2/}/m+n$ aunque esta sea solamente una forma modificada de la vieja regla

[14] Véase H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (1817).

babilónica que Brahmagupta pudo muy bien conocer. La fórmula de Brahmagupta del área para cuadriláteros, que hemos comentado más arriba, la utilizaba junto con las fórmulas

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}$$

para las diagonales[15], para hallar cuadriláteros cuyos lados, diagonales y áreas fueran todos ellos números racionales. Entre estos cuadriláteros se construye el que tiene por lados a = 52, b = 25, c = 39 y d = 60, y por diagonales 63 y 56. Brahmagupta da como <<área bruta>> de este cuadrilátero 1.933 3/4, pese al hecho de que en este caso su fórmula da el área exacta 1.764.

8.3. La teoría de las ecuaciones indeterminadas

Es evidente que Brahmagupta amaba la matemática por sí misma, al igual que muchos de sus paisanos, ya que ningún ingeniero con mentalidad práctica se hubiera planteado nunca cuestiones tales como las que se planteaba Brahmagupta sobre los cuadriláteros. Cabe admirar aún más su actitud matemática al descubrir que él fue aparentemente el primero que dio una solución general de la ecuación diofántica lineal ax + by = c, con a, b y c enteros. Para que esta ecuación tenga soluciones enteras, el máximo común divisor de a y b debe dividir a c, y Brahmagupta sabía que si a y b son primos entre sí, entonces todas las soluciones de la ecuación vienen dadas por las fórmulas x = p + mb, y = q – ma, donde m es un entero arbitrario. Brahmagupta estudió también la ecuación diofántica cuadrática $x^2 = 1 + py^2$, que recibe erróneamente el nombre de John Pell (1611-1685) y que apareció por primera vez en el problema de los bueyes de Arquímedes. Esta ecuación de Pell fue resuelta en algunos casos particulares por el matemático Bhaskara (1114-1185), hindú como Brahmagupta.

Es realmente muy notable el mérito de Brahmagupta al dar todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica lineal, mientras que Diofanto se había contentado con dar una única solución particular de una ecuación indeterminada. Dado que Brahmagupta utiliza en algunos casos los mismos ejemplos que Diofanto, podemos ver

[15] Véase Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), págs. 202-203, para un esbozo de demostración de estas fórmulas.

de nuevo reforzada la evidencia de una influencia griega en la India, o bien la posibilidad de que ambos hicieran uso de una fuente común, verosímilmente de la antigua babilonia. Un detalle interesante a subrayar es el de que el álgebra de Brahmagupta es sincopada como la de Diofanto: la suma se indica por una simple yuxtaposición, la resta colocando un punto sobre el substraendo, y la división escribiendo el divisor debajo del dividendo como en nuestra notación para las fracciones, pero sin la barra separadora. Las operaciones de multiplicación y de <<evolución>> (o de extracción de raíces), así como las cantidades incógnitas, vienen representadas por medio de abreviaturas de las palabras correspondientes.

9. Al-Biruni

Su nombre completo fue Abu Raihan Muhammad Al-Biruni. Nació en el actual Uzbekistan en el 973, y murió en 1050 en Ghazna (Afganistán), después de 40 años de una ilustre carrera. Aunque fue árabe, tuvo mucha relación con la India al igual que la mayoría de la matemática árabe. Los árabes tomaron de los hindúes muchas cosas de matemáticas. Este científico árabe escribió sobre una gran variedad de temas. Su contribución más importante fueron sus agudas observaciones de los fenómenos naturales más que sus teorías. En algunas ocasiones se le llamó "el maestro" o "Al-Ustadh" y se convirtió en uno de los científicos más destacados de la civilización islámica de su tiempo.

Algunos historiadores han llamado al periodo de su actividad como "La edad de Al-Biruni".

Sus documentos muestran que escribió 113 obras, pero se han perdido la mayor parte. Los temas que trató incluyen astronomía, astrología, cronología, geografía, matemáticas, mecánica, medicina, farmacología, meteorología, mineralogía, historia, religión, filosofía, literatura y magia.

Entre las obras más importantes está *Canon*, su estudio más amplio sobre astronomía. Tiene además, una importante obra en la que se estudia la densidad de diversos metales líquidos y gemas, y otra en la que se realiza una de las descripciones más valiosas acerca del astrolabio. Es autor, asimismo, de *Historia de la India*, su obra más conocida, en la que utiliza sus conocimientos de del sánscrito para describir las costumbres, lengua, ciencia y geografía de la India.

Según Max Meyerhoff, Al-Biruni es quizás universalmente la figura más prominente en la falange de aquéllos estudiosos musulmanes sabios característicos de aquella edad dorada de ciencia islámica.

Él estudió ley árabe, islámica y varias ramas de conocimiento. Después él estudió griego, sirio y sánscrito. Su conocimiento de varios idiomas le ayudó a entender el trabajo disponible y reúne un acercamiento fresco y original en el mismo.

La filosofía de Al-Biruni era que en cada asunto cada uno debía usar la fuente disponible en su forma original, debe investigar este trabajo de una manera objetiva, y debe llevar a cabo la investigación a través de la observación directa y de la experimentación.

Él era un contemporáneo del médico Ibn Sina (Avicenna) y se conoce por haber colaborado con él. Las contribuciones de Al-Biruni son tan extensas que los índices de sus tapas de trabajo escritas presentan más de sesenta páginas.

Su trabajo científico se combinó con contribuciones de Al-Haitham (Al-Hazen) y otros científicos musulmanes extendieron la temprana fundación de la ciencia moderna.

Al-Biruni hizo contribuciones originales e importantes a la ciencia. Él descubrió siete maneras diferentes de encontrar la dirección del norte y sur, y descubrió técnicas matemáticas para determinar los principios exactos de la estación. También escribió sobre el sol y sus movimientos y el eclipse. Además, inventó unos pocos instrumentos astronómicos. Muchos siglos antes de los que se pueda imaginar, discutió que la tierra giraba sobre su eje e hizo cálculos exactos de la latitud y longitud. Estas observaciones están en su libro "Al-Athar Al-Baqia". Escribió un tratado en el año1000.

Fue el primero en dirigir experimentos detallados en relación a los fenómenos astronómicos. Él declaró que la velocidad de la luz es inmensa y la comparó con la velocidad del sonido. Describió la Vía Láctea como una colección de fragmentos innumerables de la naturaleza de estrellas nebulosas, y también comentó el eclipse solar del 8 de abril de 1019 y el eclipse lunar del 17 de septiembre del mismo año. En el eclipse solar que él observó en Lamghan, un valle rodeado de montañas entre los pueblos de Qandahar y Kabul, él escribió: ... a la salida del sol nosotros vimos que aproximadamente un tercio del sol fue cubierto y este se tapaba poco a poco. Él observó el eclipse lunar en Ghazna y dio detalles precisos de la altitud exacta de varias estrellas muy conocidas en el momento del primer contacto. Al-Biruni en el libro “Al-Tafhim-li-Awail Sina´at al-Tanjim” resume un trabajo en matemáticas y astronomía. Fue traducido por Ramsay Wright en 1934, Luzac.

Las contribuciones físicas de Al-Biruni incluyen trabajos en primaveras y la determinación exacta del peso específico de 18 elementos y compuestos que incluyen muchos metales y piedras preciosas. Su libro “Kitab-al-Jamahir” discute las propiedades de varias piedras preciosas. Él era un pionero en el estudio de los ángulos y en trigonometría; además trabajó en las sombras y cordones de círculos y desarrolló un método para la trisección de un ángulo. Elaboró el principio de posición y discutió los números indios.

Al-Biruni es normalmente conocido por su asociación con Mahmood Ghaznavi, un rey musulmán famoso que también gobernó la India, y el hijo del sultán Masood. El sultán, impresionado por Al-Biruni, se lo llevó con él a la India durante muchos años. Al-Biruni viajó a muchos lugares en la India y estuvo aproximadamente allí alrededor de unos 20 años en los que estudió filosofía hindú, matemática, geografía y religión de las Autoridades. A cambio, él les enseñó las ciencias griegas y musulmanas y filosofía.

Al-Biruni escribió su libro famoso “Al-Qanun Al-Masudi Fi Al-Hai’a Wa Al-Nujum” aproximadamente en el año 1030. Este libro fue escrito después de que el volviera de la India y se lo dedicó al Sultan Masood. Discute varios teoremas de trigonometría, astronomía, movimientos solares, lunares y planetarios y contiene una colección de 23 observaciones de equinoccios.

Sus otros libros muy conocidos son “Al-Athar Al-Baqia” y “Kitab-al-Saidana”. El libro anterior da cuenta de historia antigua de naciones y el último es un tratado que sintetiza la medicina árabe con la medicina india. Sus investigaciones también tuvieron que ver con gemelos siameses. También se sabe que él escribió el astrolabio y un calendario mecánico.

Al-Biruni fue un verdadero científico musulmán que benefició al Islam y las investigaciones científicas. Él dijo: “Mi experiencia en el estudio de la astronomía y geometría y experimentos en física me revela que debe haber una mente con una planificación de potencia ilimitada. Mis descubrimientos en astronomía mostraron que hay complejidades fantásticas en el universo que demuestra que hay un sistema creativo y un mando meticuloso que no pueden explicarse a través de las puras causas físicas y materiales". Al-Biruni fue una persona que nunca se aprovechó de su trabajo como un medio para la fama, autoridad o ganancias. Prueba de esto es que el sultán Masood le envió tres camellos cargados de monedas de plata en apreciación por su trabajo enciclopédico "Al-Qanon al-Masodi" (El canon de Mas'udi), y Al-Biruni educadamente le devolvió el regalo diciendo: "yo doy conocimiento por conocimiento y no para ganar dinero".

La suma de una progresión geométrica pertinente del juego del ajedrez le llevó al número:

$1616^{\circ} - 1 = 18,446,744,073,709,551,$

También desarrolló un método para la trisección de ángulos y otros problemas que no pueden resolverse solamente con un compás entre otras cosas.

Él fue considerado como uno de los más grandes científicos del Islam, y todos lo consideraron como el más grande. Su espíritu crítico, amor a la verdad y el acercamiento científico lo combinó con el sentido de la tolerancia. Dijo que la frase Alá no justifica ignorancia.

Este artículo fue realizado por el Doctor A. Zahoor

10. Bhaskara

Fue uno de los matemáticos indios más notables (1114-1185), y sobre todo el más importante del siglo XII. Destacó de forma importante como representante de la escuela Ujjain, uno de los centros del renacimiento de las matemáticas indias durante la edad media.

Este matemático fue el que completó algunos de los huecos de la obra de Brahmagupta, como hizo al dar una solución de la ecuación de Pell y al enfrentarse con el problema de la división por cero. Aristóteles ya había hecho observar que no hay ninguna razón en la que un número tal como el cuatro exceda al número cero[16], pero lo cierto es que la aritmética del cero no formó parte de la matemática griega, y Brahmagupta no se había pronunciado sobre la división de un número distinto de cero por cero.

[16] Véase C. B. Boyer, "An Early Reference to Division by Zero", *American Mathematical Monthly*, 50 (1943), págs. 487-491.

Así pues, la primera vez que nos encontramos con la afirmación de que tal cociente es infinito es en el *Vijaganita* de Bhaskara:

> Proposición: Dividendo 3. Divisor 0. Cociente de la fracción 3/0. Esta fracción de la que el denominador es cifra se llama cantidad infinita. En esta cantidad que consiste en lo que tiene cifra como divisor, no hay alteración posible por mucho que se añada o se extraiga, lo mismo que no hay cambio en Dios infinito e inmutable.

Esta proposición suena muy prometedora, pero inmediatamente a continuación se revela una falta de entendimiento claro de la situación por parte de Bhaskara al afirmar que $a/0 \cdot 0 = a$.

Sabemos que el *Vijaganita* analiza expresiones algebraicas e investiga soluciones a las ecuaciones cuadráticas.

Bhaskara fue el último matemático medieval importante de la India y su obra representa la culminación de las contribuciones hindúes anteriores a su época. En su tratado más conocido, el *Lilavati*, reunió Bhaskara problemas diversos procedentes de Brahmagupta y de otros matemáticos, añadiéndoles nuevas observaciones de su propia cosecha. El título mismo del libro puede ser tomado como un buen ejemplo de la calidad desigual del pensamiento hindú, al menos desde un punto de vista occidental, ya que el nombre al que se reduce el título es precisamente el de la hija de Bhaskara que, según la leyenda, perdió la oportunidad de casarse debido a la confianza de su padre en sus predicciones astrológicas. Se cree que escribió esta obra para distraer a su hija, cubre aspectos de geometría, aritmética y álgebra. Fue traducida al persa durante la época del emperador mogol Akbar, en el siglo XVI, y se hizo sumamente popular, siendo objeto de numerosos comentarios escritos.

Bhaskara había calculado que su hija sólo podría casarse en condiciones favorables a una hora concreta de un día determinado; el día que debía casarse la impaciente muchacha se encontraba observando atentamente la clepsidra, inclinada sobre ella, mientras se iba acercando la hora de su boda, cuando de pronto cayó al agua inadvertidamente una de las perlas de su tocado, obstruyendo la salida del agua de la clepsidra. Como era de esperar, antes de que se advirtiera el desgraciado accidente había transcurrido ya la hora propicia, y el padre, para tratar de consolar a la desdichada muchacha, puso su nombre al libro que comentamos.

A Bhaskara se le atribuye una comprobación intuitiva. Según él, no es necesaria ninguna explicación y se limita a escribir:

Es una obra muy importante de Bhaskara en la que trata cuestiones de aritmética, álgebra, trigonometría y astronomía. Resume y se basa en el trabajo de antiguos matemáticos indios como Bramahgupta y Padmanabha. En esta obra se encuentran tablas de senos y otras relaciones trigonométricas, e incluso indicios de ideas subyacentes sobre el cálculo que no se iban a desarrollar explícitamente hasta varios siglos más tarde.

El *Siddhantasiromani* se divide en cuatro partes: El *Lilavati* en aritmética, *Bijaganita* en álgebra y *Ganitadhyaya y Goladhaya* en astronomía.

Hay resultados interesantes en trigonometría en este trabajo. En particular Bhaskara parece más interesado en trigonometría para su propia causa que sus predecesores, que sólo lo vieron como una herramienta para el cálculo. Entre los muchos resultados interesantes dados por Bhaskara tenemos:

Sen (a + b) = el pecado un cos b + el cos un pecado b.

Sen (a – b) = el pecado un cos b – el cos un pecado b.

Bhaskara logró una reputación excelente, y su contribución fue muy notable. En 1207 una institución educativa siempre estudiaba sus trabajos.

Una inscripción medieval en un templo indio dice:

Triunfante e ilustre Bhaskara, cuyos hechos son venerados por los sabios. Un poeta dotó de fama y mérito religioso, él estaba como la cresta de un pavo real.

Otros ejemplos encontrados en el *Siddhanta siromani*:

Encuentra cuatro números diferentes cuya suma es igual a la suma de sus cuadrados.

Solución:

Nosotros tenemos: 1 + 2 + 3 + 4 = 10; $1^2+2^2+3^2+4^2=30$. Así, alterando los números en la proporción 10/30=1/3, nosotros obtenemos los números requeridos.1/3+2/3+3/3+4/3=10/3.

$(1/3)^2+(2/3)^2+(3/3)^2+(4/3)^2=1/9+4/9+9/9+16/9=30/9=10/3$.

Por consiguiente, los números buscados son 1/3,2/3,1,4/3.

El Vijaganita de Bhaskara da un ejemplo de solución de una ecuación cúbica:

$x^3+12x=6x^2+35$. Bhaskara vuelve a escribir esta ecuación como:

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$. Por consiguiente, $(x-2)^2 = 3^3$. Tomando la raíz del cubo de ambos lados nosotros conseguimos x - 2 = 3. Así, x = 5.

10.1. El Lilavati

El Lilavati, lo mismo que el Vijaganita, contiene numerosos problemas que tratan de los temas favoritos de los hindúes: ecuaciones lineales y cuadráticas, tanto determinadas como indeterminadas, simples problemas de medida de áreas, progresiones aritméticas y geométricas, raíces ternas pitagóricas y otros. El problema del <<bambú roto>>, popular también en China e incluido ya por Brahmagupta, aparece aquí en la forma siguiente: Si un bambú de 32 codos de altura ha sido roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 16 codos de su base, ¿a qué altura sobre el suelo se produjo la fractura? Otro problema en el que se utiliza el teorema de Pitágoras es el siguiente: Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?.

Estos dos problemas ilustran muy bien el carácter heterogéneo del *Lilavati*, puesto que, a pesar de su aparente semejanza y del hecho de que se pida una única solución, uno de los problemas es determinado y el otro indeterminado. Al tratar del círculo y de la esfera, no consigue tampoco el *Lilavati* distinguir entre resultados exactos y sólo aproximados; el área del círculo, por ejemplo, se expresa correctamente como un cuarto de la circunferencia por el diámetro, y el volumen de la esfera como un sexto del producto del área por el diámetro, pero en cambio Bhaskara sugiere como razón de la circunferencia al diámetro o bien 3927/1250 o bien el <<valor bruto>>22/7. El primero es equivalente a la razón que menciona, pero no utiliza, Aryabhata, pero nada nos hace sospechar, ni en Bhaskara ni en ningún otro matemático hindú, que fueran conscientes de que todas las razones propuestas eran solamente aproximaciones. Sin embargo, Bhaskara se apresura a condenar severamente a sus predecesores por haber utilizado las fórmulas de Brahmagupta para el área y las diagonales de un cuadrilátero en general, basándose en su acertada observación de que un cuadrilátero no queda unívocamente determinado por sus lados. Parece evidente, en cambio, que no se dio cuenta de que las fórmulas en cuestión sí que son correctas para todos los cuadriláteros cíclicos.

Ya hemos dicho que muchos de los problemas de Bhaskara que aparecen en el *Lilavati* y en el *Vijaganita* provienen de fuentes hindúes anteriores, y por lo tanto no constituye una sorpresa el ver al autor mostrando un gran dominio de la situación al tratar problemas de análisis indeterminado. Por lo que se refiere a la ecuación de Pell $x^2 = 1 + py^2$, de la que ya se había ocupado anteriormente Brahmagupta, Bhaskara da soluciones particulares para los cinco valores del parámetro p = 8,11, 32, 61 y 67; para la ecuación $x^2 = 1 + 61y^2$, por ejemplo da la solución $x = 1.776\text{ı}319.049$, $y = 22\text{ı}615.390$. Esto constituye sin duda una verdadera hazaña de cálculo, y sólo comprobar que la solución es correcta pondrá a prueba ya la paciencia del lector.

Los libros de Bhaskara están llenos, por otra parte, de ejemplos variados de problemas diofánticos[17].

A continuación podrá leerse el *Lilavati*, pero el principal problema a la hora de su lectura será el vocabulario utilizado a lo largo de todo el libro (del cual sólo escribiremos algunos fragmentos variados), que en ocasiones, se hará de difícil entendimiento[18].

Entre paréntesis viene dado más o menos lo que significa los términos a los que alude Bhaskara

10.1.1. Definiciones

1. A continuación, indico las reglas aritméticas del cálculo verdadero, *el Lilavati* hermoso, claro y disfrute el sabio de su abastecimiento por sus versos sucintos, encantadores y puros.

---

[17] Puede verse una exposición muy completa de la obra de Bhaskara en J. F. Scott, *A history of Mathematics* (1958). Véase también Colebrooke.

[18] Libro complejo, pero a la vez interesante; realiza similitudes para que su comprensión sea más fácil y entendamos la técnica o pasos utilizados en cada momento.

2. Veinte *varatakas* es un *kakini* (cáscara), y cuatro de estos son un *pana* (moneda de cobre). Los dieciséis de esos se consideran aquí un *dramma* (moneda, “dracma”), y así que el *dramma* de los dieciséis es un *niska* (moneda de oro).

3. Dos *yavas* (grano de cebada, que es una medida de peso) aquí se considera igual a un *gunja* (baya); tres *gunjas es un valla* (grano de trigo) y ocho de esos son un *dharana* (grano de arroz). Dos de esos son un *gadyanaka*, así que un *ghataka* es igual a catorce *vallas.*

4. Los que entienden de pesos llaman la mitad del diez de *gunjas como un masa* (haba), y los dieciséis (los pesos) de *masa* llamado un *karsa*, y cuatro *karsas un pala.* Un *karsa* del oro se conoce como *suvarna* (se encendió. “oro”).

5. Un *angula* (dígito) es ocho *yavodaras* (parte gruesa de un grano de la cebada); un *danda* (barra) es cuatro *hastas,* y un *krosa* (grito) es dos mil de ésos.

6. Diez *karas* (mano, *hasta*) es un *vamsa*.

7. *Un hasta cúbico* se llama en tratados un “*kharika de Magadha”.*

8. Y un *drona* (cubo) es una decimosexta parte de un *khari*; *un adhaka* es una cuarta parte de un *drona*. Aquí, un *prastha* es una cuarta parte de un *adhaka*; por anterior (las autoridades), un *kudava* es definido (como) un cuarto de un *prastha.*

Las definiciones restantes referentes a tiempo y así sucesivamente deben ser sabidas generalmente de uso común. Tanto para las definiciones.
Ahora, la explicación de los lugares de números.

9. Homenaje a Ganesa, con una serpiente negra que se enreda juguetónamente sobre su cuello brillante como el azul y como el loto.

10. En la sucesión, uno, diez, cien, mil, *ayuta* (10^4), *laksa* (10^5), *prayuta* (10^6), *kota* (10^7), *arbuda* (10^8), *abja* (10^9), kharva (10^{10}), *nikharva* (10^{11}), *mahapadma* (10^{12}), *sanku* (10^{13}); después de eso,

11. *jaladhi* (10^{14}), *antya* (10^{15}), *madhya* (10^{16}), *paradha* (10^{17}): éstas, aumentando en múltiplos de 10, son las designaciones[19] de los números en potencias de 10.

[19] Para el lenguaje existente, es una buena descripción de las potencias de 10.

10.1.2. Las ocho operaciones aritméticas

Ahora, adición y substracción: la regla de la operación para la adición y substracción, en la mitad de un verso.

12. La suma o la diferencia de los números según sus lugares debe ser hecha, en orden o en orden inverso.

Ahora, un ejemplo:

13. Oh Lilavati, muchacha inteligente, si usted entiende la adicción y la substracción, me dice la suma de las cantidades 2, 5, 32, 193, 18, 10, y 100, así como (el resto de) ésas cuando está restado a partir del 10000.

Declaración: 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100. Resultado de la adicción: 360, Resultado cuando está restado del *ayuta* (10000): 9640.

Ésa es adicción y substracción.

Ahora, el método para la multiplicación: la regla de la operación para la multiplicación, en dos versos y medio.

14. Uno debe multiplicar en el multiplicando por el multiplicador, (y entonces los otros dígitos), comenzando con el último de al lado, por igual (multiplicador). O, el multiplicando está abajo en varias ocasiones (y multiplicado) al lado (sepárese) de las partes del multiplicador; el producto es la suma (de esos productos separados).

15. O, el multiplicador es dividido por alguno (número), y el multiplicando es multiplicado por ese (número) y por el cociente: (que es) el resultado(existen dos maneras de dividirse encima del número de este modo, es decir, partiendo el multiplicador o el multiplicando). O (cuando es el multiplicando) multiplicado por (el multiplicador) los dígitos separados, (el producto) se agrega encima (de ésos).

16. O, (si el multiplicando) multiplicado por el multiplicador disminuyó o aumentó el número dado, (el producto) aumentó o disminuyó con nuestro multiplicando dado (número).

Ahora, un ejemplo:

17. El niño del cervatillo, me dice: cuánto es el número (que resulta de) 135 multiplicado por 12, si usted entiende la multiplicación por partes separadas y por dígitos separados. ¿Y dígame, cuánto es ese producto dividido por el mismo multiplicador?.

Declaración: Multiplicando 135, multiplicador 12.

Multiplique el último dígito del multiplicando por el multiplicador; cuando se hace de la misma manera (para todos los dígitos), el resultado es 1620. O, cuando el multiplicador de divide en dos partes separadas (4,8), cuando el multiplicando se multiplica por separado (de ésos) y (los productos) se combinan, es resultado es igual, 1620. O el multiplicador es dividido por tres, (y) el cociente es 4. Cuando el multiplicando es multiplicado por ése y por tres, es resultado es igual, 1620. O cuando (el multiplicador) se divide en sus dígitos (1,2), cuando el multiplicando es multiplicado por separado por ésos y (los productos) se suman para arriba según su lugar-valor, el resultado es igual, 1620. O cuando el multiplicando es multiplicado por separado por el multiplicador menos dos (10) y por dos, y (esos productos) se agregan, el resultado es igual, 1620. O cuando el multiplicando es multiplicado por el multiplicador más ocho (20), y disminuido por los tiempos del multiplicando ocho, el resultado es igual, 1620.

Ése es el método para la multiplicación[20].

Ahora división: la regla de la operación para la división, en un verso.

18. En la división, el divisor (multiplicado por un cierto número) se resta del último (dígito(s)) del dividendo; ese multiplicador es el resultado. Pero cuando es posible, uno debe dividir después la reducción del divisor y del dividendo por un campo común (factor).

Ahora para el caso de la división, la declaración de los dígitos del producto y del divisor (antes su multiplicador) en el ejemplo anterior: Dividendo 1620. Divisor 12. El cociente de la división es el multiplicando, 135.

O el dividendo y el divisor son reducidos por tres 540/4, o por cuatro 405/3. Cuando (esos dividendos son) divididos por sus divisores respectivos, es resultado es igual, o sea, 135.

Ésa es la división.

Ahora ajustando: la regla de la operación para el cuadrado, en dos versos.

[20] Muy engorroso, poco aclaratorio y difícil comprensión.

19. El producto de dos números iguales se llama el "cuadrado". El cuadrado del número entero es la suma de todos los productos que resultan, según sus valores de lugar.

20. O, el cuadrado de dos (sepárese) porciones (de un número dado) es su producto multiplicado por dos, agregado a la suma de los cuadrados de esas partes. O, el cuadrado es el producto de dos números iguales por separado, aumentado y disminuido por la cantidad dada, agregado al cuadrado de ese número que nos ha dado.

Aquí está un ejemplo:

21. El amigo dice: dígame el cuadrado de nueve, de catorce, de trescientos menos tres, y del *ayuta* (10000) más cinco, si usted sabe la manera de que den como resultado cuadrados.

Declaración: 9, 14, 297, 10005. Los cuadrados de ésos, realizados según el método indicado, son 81, 196, 88209, 100100025.

O, (hay) dos partes de 9 (4,5). El producto de ésos (20), por dos es (40), se agrega a la suma de los cuadrados de esas partes (41); el resultado es el mismo cuadrado, 81.

O, (hay) dos partes de 14 (6,8). El producto de ésos (48) por dos (es) 96. Los cuadrados de esas partes (son) 36, 64 (96), y se agrega a la suma de ésos (100); el resultado es el mismo cuadrado, 196.

O, las dos partes (son) 4, 10; y de la misma manera el mismo cuadrado es 196.

O, el número (es) 297. Esto se disminuye y se aumenta por separado en tres: 294, 300. El producto de ésos (88200) se agrega al cuadrado de tres (9); el resultado es 88209. Siempre se realiza de esta manera. Ése es el cuadrado.

Ahora la raíz cuadrada: aquí está un ejemplo de la regla de operación para la raíz cuadrada.

22. Amigo, ¿sabe usted la raíz cuadrada de cuatro, y semejantemente de nueve, y de los cuatro cuadrados dados previamente, respectivamente, si su comprensión de este (tema) se ha aumentado?.

Declaración: 4, 9, 81, 196, 88209, 100100025. (Las) raíces cuadradas obtenidas en orden (son) 2, 3, 9, 14, 297, 10005.

Ésa es la raíz cuadrada.

Ahora, el cubo: la regla de la operación para obtener cubos, en tres versos.

23. Y el producto de tres cantidades iguales se define (como) el cubo. El cubo del último (dígito) se establece, y entonces el cuadrado del último es multiplicado por el primero y por tres, y entonces el cuadrado del primero multiplicado por tres y por el último, y también el cubo del primero. Todos (aquéllos).

24. O, en encontrar cuadrados y cubos, el procedimiento se puede realizar (comenzando con) el primer dígito.

25. O la cantidad es multiplicada por (cada uno de sus) dos partes, multiplicadas por tres, y agregada a la suma de los cubos de las partes. El cubo de la raíz cuadrada, multiplicado por sí mismo, es el cubo del número cuadrado.

Aquí está un ejemplo:

26. Amigo, dígame el cubo de nueve, y el cubo del cubo de tres, y también el cubo del cubo de cinco, y entonces la (raíz cúbica) del cubo, si usted (tiene) una comprensión sólida de cubos.

Declaración: 9, 27, 125. Los cubos resultantes, en orden, son 729, 19683 y 1953125.

O, la cantidad es 9, (y) sus dos partes (4,5). La cantidad es multiplicada por sus dos partes (180), multiplicada por tres (540) y agregada a la suma de los cubos de las partes (189); el cubo resultante es 729.

O, la cantidad es 27, (y) sus dos partes (20,7). La cantidad es multiplicada por sus dos partes y por tres después (11340), (y) agregado a la suma de los cubos de las partes (8343); el cubo resultante es 19683.

O, la cantidad es 4, su (raíz cuadrada) es 2, el cubo de ése es 8. Que, multiplicado por sí mismo, es el cubo de cuatro, 64.

O, la cantidad es 9, su raíz cuadrada es 3; el cubo de ése es 27. El cuadrado de ése es el cubo de 9, (729). El cubo de un número cuadrado es justo el cuadrado del cubo de la raíz cuadrada.

Ése es el cubo.

Ahora, la regla de la operación para la raíz cúbica, en dos versos.

27. El primero (el lugar decimal) es un lugar del cubo; hay dos que no tienen cubo entonces (los lugares), y así sucesivamente. Cuando uno ha restado del cubo más alto (el lugar) el cubo (el más grande posible), la raíz (del cubo) se coloca por separado. Divida el siguiente (lugar) por el cuadrado de ése (raíz cúbica) multiplicado por tres.

28. Fije el resultado en la "fila". Substraiga el cuadrado de ese los tiempos (del cociente) tres, multiplicados por el último (dígito de la raíz), del siguiente (lugar); substraiga el cubo del cociente del siguiente (lugar) después de eso. (Procediendo) repetidamente, de la misma manera en varias ocasiones, la "fila" se convierte en la raíz cúbica.

Ahora la declaración de los cubos (dados) previamente, en orden (para encontrar) la raíz cúbica: 729, 19683, 1953125. Las raíces obtenidas en orden: 9, 27, 125.

Ésa es la raíz cúbica.

Éstas son las ocho operaciones.

Ahora, las ocho operaciones para las fracciones.

Ahora, la regla de la operación para reducir fracciones al mismo denominador, en un verso.

29. El numerador y el denominador (de cada fracción) son multiplicados por el otro denominador: de esta manera se reducen al mismo denominador. O, el numerador y el denominador se pueden multiplicar por (nosotros) los denominadores reducidos, por el inteligente (la calculadora).

Aquí está un ejemplo:

30. Tres, un quinto, un tercio: dígame, amigo, (los valores de) ésos (reducidos a) un denominador común, para sumarlos después; y también un sexagésimo tercer y un décimo cuarto, para restarlos luego.

Declaración:3/1,1/5,1/3. Reducido a un denominador común: 45/15,3/15,5/15. La suma es 53/15.

Ahora, la declaración en el segundo ejemplo: 1/63,1/14. (Los numeradores) son multiplicados por los denominadores (cada otro) reducidos por siete: 7, 2. Reducido a un denominador común: 2/126,9/126. El resultado después de la substracción es 7/126, y cuando sea reducido por siete, 1/18.

Ésa es la reducción a un denominador común.

Ahora, la regla de la operación para las fracciones de fracciones, en la mitad de un verso.

31. Los numeradores son multiplicados por los numeradores, los denominadores por denominadores: (que) es el procedimiento que se sigue para simplificar fracciones de fracciones.

Aquí está un ejemplo:

32. Un cuarto de un decimosexto de un quinto de tres cuartos de dos tercios de la mitad de un *dramma*, dio el sabio a un mendigo. Dígame, estimado niño, cuántos *varatakas* fueron ofrecidos a ese tacaño (uno), si usted conoce el procedimiento de la reducción en aritmética por las fracciones de fracciones.

Declaración: 1/1,1/2,2/3,3/4,1/5,1/16,1/4. Cuando simplifico, el resultado es 6/7680; reducido por seis, el resultado es 1/1280. Así que un *varataka* fue dado.

Ésa es la reducción de fracciones de fracciones.

Ahora, la regla de funcionamiento para cantidades aumentadas o disminuidas por una fracción, en un verso y medio.

33. El numerador se agrega o se substrae de un entero multiplicado por el denominador, (dependiendo) si la parte fraccionaria es positiva o negativa. Si la cantidad será aumentada o será disminuida por una parte de sí mismo, multiplique (su) el denominador por el denominador (de la próxima fracción) por debajo de (él), y (multiplique) el numerador por el mismo aumento o disminución por (la fracción) el propio numerador.

Aquí hay un ejemplo:

34. Dígame, cuanto es dos más un cuarto, y tres menos un cuarto, cuando simplifico, si (usted) entiende aumento y disminución por fracciones.

Declaración:

2 3

1/4 1/4

Cuando simplifico, el resultado es: 9/4,11/4.

Aquí hay un ejemplo:

35. ¿Cuánto es un cuarto más su tercera parte, más un cuarto de la suma? ¿y cuánto es dos tercios menos un octavo de eso, menos tres séptimos de la diferencia? .Y dime amigo, ¿cuánto es la mitad menos un octavo de eso, más nueve séptimos de la diferencia, si usted sabe el aumento y disminución por fracciones?.

Declaración:

1/4 2/3 1/2

1/3 1/8 1/8

1/2 3/7 9/7

Cuando simplifico el resultado es: 1/2,1/3,1/1.

Ésas son las cuatro reglas de la simplificación.

Ahora, la regla de funcionamiento para la suma y substracción de fracciones, en la mitad de un verso.

36. La suma o diferencia de numeradores con un común denominador (produce la suma o diferencia de las fracciones). El denominador de un (entero) la cantidad sin el denominador es considerada uno.

Aquí hay un ejemplo:

37. Amigo, dígame cuánto es un quinto, un cuarto, un tercio, un medio y un sexto cuando sumo. Dígame rápidamente el resto (de) tres menos esas fracciones.

Declaración: 1/5,1/4,1/3,1/2,1/6. Después de sumar el resultado que se persigue finalmente es 29/20.

Ahora el resto (de) tres disminuidos por aquéllos: 31/20.

Ese es (el procedimiento) en adicción y substracción de fracciones.

Ahora, la regla de funcionamiento en multiplicación de fracciones en la mitad de un verso.

38. El producto de los numeradores es dividido por el producto de los denominadores; el cociente es el resultado de la multiplicación de fracciones.

Aquí hay un ejemplo:

39. ¿Qué es dos y un séptimo multiplicado por dos y un tercio? Y dime ¿(cuánto es) un medio multiplicado por un tercio, si usted es experimentado en el procedimiento de multiplicar fracciones?.

Declaración:

2 2

1/3 1/7

El resultado que se persigue con la simplificación es 7/3,15/7. En la multiplicación el resultado es 5/1.

Declaración: 1/2,1/3. El resultado final que se persigue con la multiplicación es 1/6.

Ésa es la multiplicación de fracciones.

Ahora, la regla de funcionamiento para la división de fracciones, en la mitad de un verso.

40. En división, después se ha invertido el denominador y numerador del divisor, el resto estará hecho (según) la regla para la multiplicación.

Aquí hay un ejemplo:

41. Dígame (cuánto es) cinco dividido por dos más un tercio, y un sexto (dividido) por un tercio, si lo comprende, afilado como el punto de la vaina de *darbha*-césped, es adecuado para la división de fracciones.

Declaración:

2

1/3

5/1,1/3,1/6. Por la regla declarada, el resultado es 15/7,1/2.

Ésa es la división de fracciones.

Ahora, la regla de funcionamiento para los cuadrados etc. de fracciones, en la mitad de un verso.

42. Por cuadrar, los dos cuadrados de numerador y denominador--- y por cubicar, (sus) dos cubos--- son dados. Para determinar la raíz, (encontrar) las raíces (de numerador y denominador).

Aquí hay un ejemplo:

43. Amigo, dígame rápidamente el cuadrado de tres y un medio, y entonces la raíz cuadrada del cuadrado, y el cubo (de él), y entonces la raíz del cubo, si usted sabe los cuadrados y cubos de fracciones.

Declaración:

3

1/2

Después de que el entero es multiplicado por el denominador, el resultado es 7/2. El cuadrado de eso es 49/4. Entonces la raíz es 7/2. El cubo es 343/8; y finalmente su raíz es 7/2.

Ésas son las ocho operaciones para las fracciones.

Ahora, la regla de operación para operaciones con cero, en dos versos.

44. En suma, el cero (produce un resultado) igual al que se agrega (la cantidad), cuadrando y más adelante (produce) el cero. Una cantidad dividida por cero tiene cero como un denominador; (una cantidad) multiplicada por cero es cero, y (que) el último (el resultado) es (considerado) "(que) cronometra ceros" en operaciones subsecuentes.

45. Una cantidad (finita) se entiende para estar inalterada cuando el cero es (su) multiplicador si el cero es como consecuencia (su) divisor, y semejantemente (si es) disminuido o aumentado por cero.

Aquí hay un ejemplo:

46. Dígame, ¿qué es cero más cinco, (y) el cuadrado de cero, raíz cuadrada, cubo, raíz cúbica, y cinco multiplicado por cero, y diez menos cero?. ¿y qué (número), multiplicado por cero, agregó a su propio medio, multiplicado por tres, y dividido por cero, (da) sesenta y tres?.

Declaración: 0. Que, agregó a cinco, (da) de resultado cinco. El cuadrado de cero es cero; la raíz cuadrada es cero, el cubo es cero y la raíz cúbica también es cero.

Declaración: 5. Que, multiplicado por cero, (da) de resultado cero.

Declaración: 10. Que, dividido por cero, es 10/0.

(Hay) un número desconocido cuyo multiplicador es 0. Su propia mitad se agrega: 1/2. (Su) multiplicador es tres, (su) divisor es cero. El número dado es 63. Entonces, por medio del método de inversión o asunción (de alguna cantidad arbitraria), (qué) se explicará (después), el número deseado que se obtiene: 14. Éste cálculo es muy útil en astronomía.

Ésos son las ocho operaciones que involucran al cero.

10.1.3. Técnicas de cálculo estándares

Ahora, la regla de la operación para el procedimiento de la inversión, en dos versos:

47. Encontrando una cantidad (es decir, un operando) cuando (el resultado) se da, haga un divisor (en) un multiplicador, un multiplicador un divisor, un cuadrado una raíz cuadrada, una raíz cuadrada un cuadrado, un negativo (cantidad), un positivo (uno), (y) un positivo (cantidad), un negativo (uno).

48. Pero si fue aumentada o disminuida por su parte, el denominador, aumentado o disminuido por su (propio) numerador, es el denominador (corregido), y el numerador está inalterado. Entonces el resto (del procedimiento) en la inversión está según lo indicado (arriba).

Aquí está un ejemplo:

49. Dígame, muchacha de rápida mirada, si usted conoce el procedimiento correcto para la inversión, el número que, multiplicado por tres, agregado a los tres cuartos del resultado, divididos por siete, disminuido por una mitad del resultado, multiplicado por sí mismo, disminuido por cincuenta y dos, teniendo su raíz cuadrada, aumentada por ocho, y dividido por diez, produce dos.

Declaración: el multiplicador es 3; (la cantidad) agregada, 3/4; el divisor 7; (la cantidad) restada 1/3; el cuadrado; (la cantidad) restada, 52; la raíz cuadrada; (la cantidad) agregada, 8; el divisor, 10; los dados (el resultado), 2. Por medio del procedimiento indicado, la cantidad que resulta es 28.

Ésa es la regla para la inversión.

Ahora, la regla de la operación para los métodos de asunción (de una cierta cantidad arbitraria), con la reducción de las cantidades dadas y los restos y simplificación de diferencias fraccionarias, en un verso:

50. Como en la declaración del ejemplo, cualquier número deseado es multiplicado, dividido, o disminuido y aumentado en las fracciones. La cantidad dada, multiplicada por el número deseado y dividido por ese (resultado), es la cantidad (requerida); (que) se llama operación con un supuesto (la cantidad).

Ejemplo:

51. ¿Qué cantidad, multiplicada por cinco, disminuida por su tercera parte, dividida por diez, aumentado por un tercio, un medio, y un cuarto de la cantidad (de la original), es setenta menos dos?.

Declaración: el multiplicador es 5; su propia parte es negativa.

0

1/3

(La proporción) substraída, 1/3; el divisor, 10; las partes de la cantidad se agregan, 1/3, 1/2,1/4; la respuesta dada es 68.

La cantidad asumida aquí es 3. (Es) multiplicado por cinco (15), disminuido por su propia tercera parte (10), (y) se dividió por diez (1). (Es) agregado al tercio, la mitad y el cuarto (3/3,3/2,3/4) de la cantidad asumida aquí (3); el resultado es 17/4. La respuesta dada, 68, multiplicada por el supuesto (el número), es dividido por ése. La cantidad que resulta es 48.

Ahora, un ejemplo involucrando la reducción de la respuesta dada:

52. Una mitad, un quinto, y un sexto de una cantidad de lotos limpios (eran) ofrecidos a Siva, a Visnu y al sol, y un cuarto a Parvati. Los seis lotos restantes (eran) ofrecidos en los pies del profesor. Diga rápidamente el número de todos los lotos.

Declaración: 1/3,1/5,1/6,1/4. La respuesta dada es 6.

Tomando la unidad asumida de la cantidad que tenemos aquí (1) (y procediendo) como (lo explicado) previamente, la cantidad que resulta es 120.

Ahora, un ejemplo que implica la reducción del resto.

53. Un viajero en un peregrinaje dio una mitad (de su dinero) a Prayaga, dos novenos del resto a Kasi, un cuarto del resto en honorarios del peaje, y los seis décimos del resto a Gaya. Salió con 63 *niskas* encima suya, (y él) volvió con eso a su propio hogar. Dígame la cantidad (inicial) de su dinero, si el método de reducción de restos está claro para usted.

Declaración: 1/1,1/2,2/9,1/4,6/10. La respuesta dada es 63. Tomando la cantidad supuesta aquí (que es) la unidad (1), restando el numerador de su denominador, multiplicando los denominadores juntos, y procediendo según lo explicado, el resto que resulta es 7/60. Dividiendo esto en la respuesta dada (63), multiplicado por la cantidad supuesta, la cantidad resultante de dinero es 540. Esto se puede hacer también por la regla para la inversión.

Ahora, la regla de la operación para la combinación, en la mitad de un verso:

54. La suma (por separado) es disminuida y aumentada en la diferencia y (en cada caso) partida en dos; eso se llama combinación.

Aquí está un ejemplo:

55. Dígame, querido niño, las dos cantidades cuya suma es ciento uno, y de quien la diferencia es veinticinco, si usted entiende la combinación.

Declaración: la suma es 101, la diferencia 25; las dos cantidades que resultan son 38, 63.

Ahora, la regla de la operación para la combinación que implica cuadrados, en la mitad de un verso:

56. La diferencia de los cuadrados (de las cantidades) divididos por la diferencia de las cantidades (ellos mismos) es la suma; de eso, las dos cantidades (pueden encontrarse) según lo indicado previamente.

Ejemplo:

57. Diga rápidamente, calculadora inteligente: ¿qué son las cantidades cuya diferencia es ocho, y cuya diferencia de cuadrados es cuatrocientos?.

Declaración: la diferencia de las cantidades es 8, la diferencia (de sus) cuadrados es 400. Las dos cantidades que resultan son 21, 29.

Ése es el procedimiento con disímil (es decir, diferencia de las cantidades y diferencia de los cuadrados).

Ahora se explican operaciones para producir ciertos cuadrados:

58. El cuadrado de un supuesto número, multiplicado por ocho y disminuido por uno, después partido en dos y dividido por el supuesto número, es una cantidad; su cuadrado, partido en dos y sumado a uno, es la otra.

La siguiente regla:

59. El cuadrado del cuadrado de un número supuesto, y el cubo de ese número, cada uno multiplicado por ocho y el primer producto aumentado en uno, son tales cantidades, en el manifiesto (aritmética) apenas como en el no manifiesto (que quiere decir el álgebra).

La cantidad supuesta es 1/2. El cuadrado de su cuadrado 1/16, multiplicado por ocho, 1/2, se agrega a 1; la primera cantidad que resulta es 3/2. Una vez más la cantidad supuesta es 1/2; su cubo, 1/8, es multiplicado por ocho. La segunda cantidad resultante es 1/1. Así las dos cantidades son 3/2,1/1.

Ahora con uno como la cantidad supuesta, (son) 9, 8; con dos, 129, 64; con tres 649, 216. Y (el cómputo puede hacerse) a una magnitud ilimitada de esta manera en todos los procedimientos, por medio de cantidades supuestas.

60. El álgebra, (que es) equivalente a las reglas de la aritmética, parece oscura, pero no es oscura al inteligente; y no está hecha de seis maneras, sino en muchas. Respecto (a la regla de) las tres cantidades, (con) la aritmética y el álgebra, el sabio (tiene) una idea clara (uniforme) sobre el desconocido.

Ahora, la regla de la operación para el multiplicador de la raíz cuadrada, en dos versos:

61. La suma o diferencia de una cantidad y un múltiplo de su raíz cuadrada se dan y el cuadrado de la mitad del multiplicador se suma al número dado. La raíz cuadrada de su suma, aumentada o disminuida por la mitad del multiplicador y después ajustada, es la cantidad deseada.

62. Si esa cantidad es disminuida o aumentada en una fracción, divida el número dado y el multiplicador de la raíz por una menos o más la fracción. Entonces con ésos (los resultados) la cantidad se encuentra según lo indicado anteriormente.

Un ejemplo de las operaciones con raíces cuadradas:

63. Oh, doncella, un par de gansos que juegan en el agua; hay siete mitades de la raíz cuadrada (del total) de la bandada, cansándose de jugar, va a la orilla. Dígame el número de la bandada de gansos.

Declaración: el multiplicador de la raíz es 7/2, el número dado, 2. De ese número dado 2, aumentado por el cuadrado de la mitad del multiplicador 49/16 (para dar) 81/16, la raíz cuadrada es 9/4. Sumado a la mitad del multiplicador, 7/4, (es) 4. Ajustado, produce el número de la multitud de gansos, 16.

Ahora un ejemplo del número dado, aumentando en su raíz cuadrada de esa manera:

64. ¿Cuál es el número que, sumado a nueve por su raíz cuadrada es 1240?.

Declaración: el multiplicador de la raíz cuadrada es 9, el número dado es 1240. Por el método indicado, la cantidad que resulta es 961.

Ejemplo:

65. Fuera de una bandada de gansos, diez veces la raíz cuadrada (del total) fue al lago de Manasa cuando una nube se acercó, un octavo fue a un bosque lleno del hibisco, y se vieron tres parejas jugando en el agua. Dígame, doncella, el número que tendremos en la bandada.

Declaración: el multiplicador de la raíz es diez, la fracción 1/8, el número dado 6. “Si esa cantidad se disminuye o aumenta en una fracción”: aquí, después de dividir el número dado y el multiplicador de la raíz por un (1) menos la fracción (7/8), el número dado se convierte en 48/7, el multiplicador de la raíz 80/7. Con éstos, procediendo por la primera regla, el número que resulta de la bandada es 144.

Ejemplo:

66. Enfurecido en la batalla, Partha (Arjuna) tiró una serie de flechas para matar a Karna. Con la mitad de las flechas él se volvió; con cuatro veces la raíz cuadrada del total, él mató sus caballos; con seis flechas, él mató (su auriga) a Salya; entonces con tres flechas destruyó el paraguas, el estandarte, y la inclinación (de su enemigo), y con una, él cortó su cabeza. ¿Cuántas flechas disparó Arjuna? (esto es un episodio en el *Mahabharata*).

Declaración: el multiplicador de la raíz es 4, la fracción 1/2, el número dado 10. “Si esa cantidad es aumentada o disminuida por una fracción”: con la primera regla, el número resultante de flechas resultantes es100.

67. La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas y ocho novenos del enjambre fue a un arbusto del jazmín, y una hembra está zumbando a un macho que también zumba permaneciendo entrampado dentro de un loto, al que su fragancia lo atrajo por la noche. Diga, querido, el número de abejas.

Aquí ocho novenos de la cantidad, y la raíz cuadrada de su mitad, es negativa respecto a la cantidad. El número dado es dos, (y) es negativo. Y el número dado, partido en dos, es (la fuente de) la mitad de la cantidad deseada.

Así la declaración: el multiplicador de la raíz es 1/2, la fracción 8/9, el número dado 1. Aquí, como (explicó) sobre, el resultado es la mitad de la cantidad, 36. Esto dice que dos es el número del enjambre de abejas, 72.

Un ejemplo donde las respuestas dadas se agregan a una raíz y a una fracción:

68. Encuentre rápidamente la cantidad que, se agregó a dieciocho (tiempos) es su propia raíz cuadrada y un tercio de la cantidad, (da) el resultado 1200, si usted tiene habilidad en aritmética.

Declaración: el multiplicador de la raíz es 18; la fracción 1/3; el dado (respuesta) 1200. Entonces divido la respuesta dada, multiplicado por la raíz, por uno más la fracción (4/3); procedimiento que se expresa de esta manera, y la cantidad que resulta finalmente es 576.

Ahora, la regla de la operación para (la regla) las tres cantidades, en un verso:

69. La cantidad dada y la cantidad deseada, (son) el mismo tipo; son (escritos) en la primera y última (posición, respectivamente). El resultado de eso (cantidad dada), (es) un tipo diferente, es (colocado) en la mitad. Eso, multiplicado por la cantidad deseada y dividido por (la cantidad dada) el primero (posición), es el resultado deseado (cantidad). En el inverso (regla de tres cantidades), el procedimiento es al contrario.

Otra proposición:

70. Si uno y un octavo de *kharikas* de arroz pueden ser obtenidos por dos *drammas*, dime enseguida que (cantidad) de eso (puede ser vendido) por 70 *panas*.

Aquí, en orden (de uso) la operación de reducción en la cantidad, la declaración de dos *drammas* es convertido en *panas*.

32 9/8 70

2 *kharis*, 7 *dronas*, 1 *adhaka*, (y) 2 *prasthas* son obtenidos.

Ahora, la regla de operación en el inverso (regla de) tres cantidades:

71. (A veces) una disminución en el resultado ocurre cuando hay un aumento en la cantidad deseada, o aumento en el resultado en caso de disminución (en la cantidad deseada), entonces el inverso (regla de) tres cantidades (es usada).

72. Si una mujer (esclava) de 16 años de edad es comprada por (un precio de) 32, ¿qué precio tendríamos con una de 20?. Si un buey después de 2 años de trabajo es comprado por 4 *niskas*, entonces ¿qué precio deberíamos pagar por seis años de trabajo de nuestro buey?.

16 32 20

El resultado es 25 y 3/4 de *niskas*.

Declaración del segundo problema:

2 4 6

El resultado es 1 y 1/3 de *niskas*.

Ejemplo de subdivisión de cantidades:

73. Si un montón de grano medido en el exterior de un lugar de 7 *adhakas* produce 100 (de esas) medidas, entonces ¿qué tendremos con una cantidad de 5 *adhakas*?.

Declaración:

7 100 5

El resultado es 140.

74. En el caso de cinco, siete, nueve, etc., cantidades, con resultado y divisores invertidos. Cuando el producto del más largo es dividido por el producto del más pequeño, este es el resultado.

Aquí hay un ejemplo:

75. Si el interés en 100 debido a un mes es cinco, dime ¿cual es el interés en 16 cuando el año ha pasado?. Dime también, matemático, el tiempo del principal y del interés, y la cantidad principal cuando el tiempo y el resultado son conocidos.

Declaración:

1 12

100 16

5

El resultado de interés es 9 y 3/5.

Ahora, en orden de conocimiento de tiempo, la declaración es:

1

100 16

5 48/5

Los meses resultantes son 12.

En orden (para encontrar) la cantidad principal, la declaración es:

1 12

100

5 48/5

El resultado principal es 16.

10.1.4. La "red de números"

Ahora, en el caso de la "red de cálculo", la regla de la operación para los diversos números (formados) con los dígitos especificados.

Aquí está un ejemplo:

76. Diga rápidamente cuántos números diferentes se producen con 3, 8, y 9; y luego comenzando con 2 y terminando con 9.

Declaración : 3, 8, 9. Aquí, el producto de los números en la secuencia comenzando con uno (1, 2, 3) es 6. (Hay) muchos números diferentes producidos con esos dígitos. Ahora, ese producto, 6, multiplicado por la suma de los dígitos (20) es 120, (y) dividido por el número de dígitos (3) es 40. Este resultado se suma en tres lugares, (y) el resultado es la suma de los números, 4440.

Declaración en el segundo ejemplo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aquí, de la misma manera (el número de) los números diferentes son cuarenta mil trescientos veinte, 40320. Y la suma de estos números es veinticuatro *nikharvas*, sesenta y tres *padmas*, noventa y nueve *kotis*, noventa y nueve *laksas*, setenta y cinco mil trescientos sesenta: 2463999975360.

Ejemplo:

77. ¿Cuántas estatuas de Sambhu (Siva) puede haber allí con (sus atributos) la cuerda, el gancho del elefante, la serpiente, el tambor, el cráneo, el tridente, el cadáver, la daga, la flecha, y el arco que sostuvo en sus diversas manos? ¿y cuántos de Hari (Visnu), con el club, el discus, el loto y la cáscara de la concha?.

Declaración: El número de lugares es 10. El número de las diversas estatuas que resultan son 3628800, y de la misma manera, el número de estatuas que tenemos de Hari es 24.

78. Dígame rápidamente, matemático, cuántos números son (producidos) con los números dos, dos, uno y uno; y (cuánto es) su suma, y lo mismo con los números cuatro, ocho, cinco, cinco y cinco; si usted es experto en el procedimiento para la "red de números".

Declaración: 2, 2, 1, 1. Aquí, los números diferentes en total que pueden llegar a darse son 6: 2211, 2121, 2112, 1212,1221 y 1122. Y la suma que resulta de los anteriores números es 9999.

Declaración en el segundo ejemplo: 4, 8, 5, 5. Los números diferentes son los siguientes: 48555, 84555, 54855, 58455, 55485, 55845, 55548, 55584, 45855, 45585, 45558, 85455, 85545, 85554, 54585, 58545, 55458, 55854, 54558 y 58554, es decir 20 números diferentes. La suma de todos estos números es 1199988.

Hay más ejemplos en la "red de números", pero con estos ejemplos nos podemos hacer una idea de lo que pensaba Bhaskara acerca de las matemáticas.

10. Varahamihira[21]

Nuestro conocimiento de Varahamihira es muy limitado. Según uno de sus trabajos, él fue educado en Kapitthaka, aunque sin embargo, se discute si él nació verdaderamente en este lugar; nosotros hemos dado esto como una referencia.

Pero lo que sí sabemos, es que él trabajó en Ujjain, que fue un centro importante para la matemática desde más o menos el 400d.c. Esta escuela, que fue uno de los dos centros matemáticos más importantes de la India, aumentó en importancia debido a Varahamihira, y posteriormente, tendría a una figura mayor como fue Brahmagupta.

El trabajo más importante y famoso de Varahamihira fue el *Pancasiddhantika* (Los Cinco Cánones Astronómicos) datado del 575d.c. Este trabajo es importante en sí mismo y también nos da información sobre los textos indios más viejos que están ahora perdidos. El trabajo es un tratado de astronomía matemática y resume los cinco tratados astronómicos más tempranos, y que sepamos son: el *Surya, Romaka, Paulisa, Vasistha y siddhantas de Paitamaha.*

El *Pancasiddantika* de Varahamihira es una de las fuentes más importantes para la historia de astronomía matemática hindú un poco antes de la época de Aryabhata.

Un tratado que Varahamihira resume era el *Romaka-Siddhanta* que estaba basado en la teoría del epiciclo de los movimientos del sol y la luna dado después de Cristo por los griegos en el siglo I. El *Romaka-Siddhanta* estaba basado en el año tropical de Hipparchus y en el ciclo de Metonic de 19 años. Otros trabajos que Varahamihira resume también están basados en la teoría del epiciclo griego de los movimientos de los cuerpos celestes. Él revisó el calendario poniendo al día estos trabajos más tempranos.

El *Pancasiddantika* también contiene muchos ejemplos del uso de un sistema de númeración lugar-valor.

Hay, sin embargo, realmente un debate sobre la interpretación de los textos astronómicos de Varahamihira y de otros trabajos similares.

Algunos creen que las teorías astronómico-matemáticas[22] son babilónicas en origen, mientras otros defienden que los indios extrajeron los modelos babilónicos haciendo

[21] Artículo realizado por J.J. O' Connor y E. F. Robertson, en el que al igual que muchos matemáticos de la época hay algunas fases de su vida y obras que no son conocidos, lo que dificulta realizar una biografía.

observaciones propias. Mucha investigación necesita esta área para clarificar algunas de estas teorías interesantes.

Ifrah, escribió notas en las que decía que Varahamihira era uno de los astrólogos más famosos en la historia de la India. Su trabajo *Brihatsamhita* (La Gran Recopilación) discute temas como:

... las descripciones de cuerpo celeste, sus movimientos y conjunciones, fenómenos meteorológicos, las indicaciones de los agüeros que estos movimientos, conjunciones y fenómenos representan, qué acción tomaran y funcionamiento para lograrlo, búsquedas en animales, humanos, piedras preciosas, etc.,

Entre todo esto hay ciertas fórmulas trigonométricas que tradujeron en nuestra anotación a día de hoy.

Otra contribución importante de Varahamihira a la trigonometría eran sus mesas del seno, donde él mejoró los resultados de Aryabhata (dio valores mucho más exactos que este).

Debe darse énfasis a que la exactitud para estos matemáticos indios era muy importante desde que ellos calculaban mesas del seno para las aplicaciones a la astronomía y astrología. Esto, motivó mucha de la exactitud mejorada que ellos lograron desarrollando nuevos métodos de interpolación.

Los Jaina investigaron reglas para calcular el número de maneras en las que pueden seleccionarse objetos de *r* de los objetos de *n* durante muchos centenares de años. Ellos dieron la regla para computar el nCr de coeficientes de binomio al que suma

¡ nCr = n (n-1) (n-2)... (n-r+1)/r![23]

Sin embargo, Varahamihira propuso el problema de nCr de la informática de una manera bastante diferente. Por supuesto, todo esto no es ninguna otra cosa que el triángulo de Pascal para encontrar los coeficientes del binomio a pesar de verse desde un ángulo diferente de la manera que nosotros lo construimos hoy.

Diversos matemáticos, o simplemente gente interesada en estos temas examina el trabajo de Varahamihira, como por ejemplo Hayashi, que examina este trabajo mediante

[22] En la India de entonces, las matemáticas iban "cogidas de la mano" por llamarlo de alguna manera, de la astronomía.

[23] Mejor forma de expresarlo: triángulo de Pascal.

cuadrados de magia; en particular él examina un cuadrado de magia de pandiagonal de orden cuatro, lo cual ocurre en el trabajo de Varahamihira.

12. Baudhayana[24]

Escribir una biografía de Baudhayana es esencialmente imposible, ya que nada es conocido de él excepto que es el autor de uno de los Sulvasutras más tempranos. No se sabe con exactitud la fecha de su nacimiento ni de su muerte.

Él ni siquiera era un matemático en el sentido que nosotros lo entenderíamos hoy, simplemente copiaba manuscritos como Ahmes. Él habría sido ciertamente un hombre de aprendizaje muy considerable pero probablemente no habría interesado en matemática, sino sólo meramente en propósitos religiosos. Indudablemente él escribió el Sulvasutra para mantener reglas en los ritos religiosos, y con casi toda certeza Baudhayana fue un sacerdote Védico.

Las matemáticas del Sulvasutra habilitan la construcción exacta de altares necesitada para los sacrificios en aquella época. Está claro que siendo sacerdote y con su escritura, tuvo que haber sido un artesano experimentado; los altares, se sabe que fueron de una alta calidad.

A continuación, unos detalles del Sulvasutra de Baudhayana, el cual tuvo tres capítulos que son los más viejos que nosotros conocemos, y sería justo decir que uno de los más importantes.

El Sulvasutra de Baudhayana contiene soluciones geométricas de ecuaciones lineales. Aparecen ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, y $ax^2 + bx = c$.

Baudhayana en construcciones diferentes realiza diferentes aproximaciones para construir formas redondas. Se dan construcciones en las que se toma 676/225 (676/225=3.004), 900/289 (900/289=3.114) y 1156/361 (1156/361=3.202). Ninguno de estos es particularmente exacto, pero a la hora de construir altares no llevarían a los errores notables.

Un valor interesante y bastante exacto aproximado para 2 se da en el capítulo 1 verso 61 del Sulvasutra de Baudhayana. 2 = 1+1/3+1/34-1/3434=577/408, con 9 decimales, 1.414215686. Esto da 2 con cinco lugares decimales. Si la aproximación se diera como

[24] Realizado por J.J. O' Connor y E. F. Robertson.

2 = 1+1/3+1/4 entonces el error es del orden de 0.002 que todavía es más exacto que cualquier otro valor anterior. ¿Por qué creía Baudhayana entonces que tenía que llegar a una aproximación mejor?[25].

13. Lalla[26]

El padre de Lalla era Trivikrama Bhatta y el padre de Trivikrama, el abuelo paterno de Lalla, se llamó Samba. Lalla fue astrónomo y matemático indio que siguieron la tradición de Aryabhata. Nació aproximadamente en el 720 y murió más o menos en el 790. El trabajo más famoso de Lalla se tituló *Shishyadhividdhidatantra*. Este tratado estaba en dos volúmenes. El primer volumen, en el cálculo de las posiciones de los planetas, estaba en 13 capítulos y trataba temas como: falsas longitudes de los planetas, verdaderas longitudes de los planetas, los tres problemas de rotación diurnal, eclipses lunares, eclipses solares, syzygies, subidas y escenas, la sombra de la luna, la media luna de la luna, conjunciones de los planetas entre sí, las conjunciones de los planetas con las estrellas fijas, y un capítulo final en el primer volumen que presenta una conclusión.

El segundo volumen trataba temas de esferas; en este volumen Lalla examinó temas como: representación gráfica, la esfera celestial, el principio de movimiento falso, la esfera terrestre, los movimientos y estaciones de los planetas, geografía, conocimientos erróneos, instrumentos y finalmente solucionó problemas.

En el *Shishyadhividdhidatantra* de Lalla se usan símbolos numéricos en sánscrito. Ifrah escribe:

... durante los siglos, el sánscrito ha prestado cosas admirables a las reglas de versificación y otras tantas. Esto explica porqué los astrónomos indios como Lalla usan símbolos numéricos en sánscrito, basado en un simbolismo complejo que era extremadamente sofisticado, y que cuando se hizo poseía una opción casi ilimitada de sinónimos.

---

[25] Los matemáticos y astrónomos indios eran muy meticulosos con sus escritos o fórmulas, pero muchas veces pasaba que no eran correctas.

[26] De J.J. O' Connor y E.F. Robertson, los cuales hoy en día realizan gran cantidad de artículos acerca de la India, y más en concreto de la matemática.

A pesar de escribir el tratado más famoso, Lalla no aceptó la teoría del *Aryabhatiya* de Aryabhata de que la tierra giraba. ¿Defiende Lalla en su comentario, como muchos otros astrónomos y matemáticos indios ante él como Varahamihira y Bramahgupta que si la tierra girara con su velocidad entonces tendría uno que preguntarse cómo hacen las abejas o pájaros que vuelan en el cielo para regresar a sus nidos?. De hecho Lalla interpretó mal algunas de las declaraciones de Aryabhata sobre la tierra girando. Pero la idea parecía tan imposible que no acababa de hacer caso a Aryabhata. Y todo esto lo interpretó Chatterjee, el cual escribe de Lalla:

... no interpretó los versos pertinentes de la manera entendida por Aryabhata.

La astrología en este momento estaba basado en mesas astronómicas[27] y a menudo los horóscopos permitían identificar estas mesas usadas. Algunos horóscopos árabes estaban basados en mesas astronómicas calculadas en la India. Las mesas frecuentemente utilizadas fueron calculadas por Aryabhata. Lalla mejoró estas mesas y realizó un juego de correcciones para la longitud de la luna. Un aspecto, fue que Lalla siguió con un valor de Aryabhata. Lalla usa 62832/20000 = 3.1416, que es un valor correcto con 4 decimales.

Lalla también escribió un comentario en *Khandakhadyaka*, un trabajo de Brahmagupta. El comentario de Lalla no se tiene, pero hay otro trabajo de Lalla que sí que está en nuestras manos, el *Jyotisaratnakosa*. Éste fue un trabajo muy popular, uno de los principales asuntos en la India durante unos 300 años.

14. Al-Karismi

Al-Karismi o Al-Khwarizmi nació en Asia central en el 830. Su nombre entero era Ibn de Muhammad al-Khwarizmi. Él vivió la mayoría de su vida en Bagdag durante la primera edad dorada de la ciencia islámica. Él desarrolló el sistema decimal usando la notación india de cero, y también inventó el término "álgebra"[28]; el término "el algorism" deriva del título de su libro en números indo-arábigos. En otro libro él presentó más de 800 ejemplos de cálculo de integración y ecuaciones. Sus trabajos eran

[27] Lugares en los cuales se realizaban cálculos referentes a la astronomía.

[28] Término importantísimo para nosotros en el día de hoy en lo referente a las matemáticas.

instrumentales, introduciendo los asuntos del álgebra y números hindú en la matemática europea.

15. La contribución de la India a las matemáticas

En principio decir, que las matemáticas representan un alto nivel de abstracción logrado por la mente humana. En la India, las matemáticas tienen sus raíces en la literatura Védica, que tiene casi 4000 años. Entre el 1000a.c. y 1000d.c. los tratados eran autorizados por matemáticos indios en lo que era por primera vez el concepto para el cero[29], las técnicas para el álgebra y algoritmo, raíz cuadrada y raíz cúbica.

Éste método de cálculo graduado se documentó en el *Pancasiddantika* (alrededor del siglo V o VI). Pero se dice que la técnica está fechada de los tiempos Védicos (hacia el 2000a.c).

Will Durant, historiador americano (1885-1981), escribió para todos nosotros:

"La India era el modelo de nuestra raza y el sánscrito la madre de los idiomas de Europa. India era la madre de nuestra filosofía, de la mayoría de nuestra matemática, de autonomía y democracia. De muchas maneras, Madre India es la madre de todos nosotros".

Como en las ciencias aplicadas, tecnología de la producción, y arquitectura entre otras, los indios en tiempos antiguos hicieron también adelantos en ciencias abstractas como la Matemática y Astronomía. Se ha aceptado ahora generalmente que la técnica de álgebra y el concepto de cero se originó en la India.

Pero sería sorprendente para nosotros saber que incluso se formularon los rudimentos de Geometría (Rekha-Ganita llamado en India antigua). Estos modelos geométricos desplegados fueron usados en muchos motivos de templo.

Muchos motivos en templos hindúes y los palacios despliegan una mezcla de floral y modelos geométricos.

Incluso la técnica de cálculo, algoritmo llamado hoy también (diseño de instrucciones para las computadoras) también se derivó de la matemática india.

[29] Gracias a la India sabemos el concepto de cero, lo cual resultaría difícil pararse a pensar y obtener dicho concepto para cualquier persona en toda la historia.

15.1. ¿Álgebra, la otra matemática?. En India antigua el término de matemática convencional Ganitam era conocido antes del desarrollo de álgebra. Esto es confirmado por el nombre Bijaganitam, que se dio a la forma algebraica de cálculo. Bijaganitam quiere decir “la otra matemática”, o sea, Bija = otra, y Ganitam = matemáticas. Algunos han interpretado el término bija como semilla, simbolizando origen o comienzo. Bijaganitam se deriva de la forma original de cómputo. Aryabhata, que fue matemático indio y vivió en el siglo 5d.c. se ha referido a Bijaganitam en su tratado de astronomía matemática *Aryabhatiya*. Bhaskara, que también fue matemático y astrónomo indio tiene autoridad en este asunto; su tratado que data del siglo 12d.c se titula *Siddhantasiromani*, del cual tiene una parte que se titula *Bijaganitam*.

Así la técnica de cómputo algebraico era conocida y se desarrolló en la India en tiempos más tempranos.

A quien no se le escapó el sistema indio de las matemáticas fue a Al-Biruni, quien estudió su sociedad y política. El sistema de matemáticas que observaron los árabes en la India no se le escapó, y fue adaptado por ellos con el nombre de “Al-Jabr” o “reunión de las partes rotas”. Este nombre dado por los árabes indica que ellos lo tomaron de una fuente externa y lo amalgamaron con sus conceptos sobre matemática.

En 1816, un inglés de nombre James Taylor tradujo el *Lilavati* de Bhaskara en inglés. Una segunda traducción aparecía en el año siguiente (1817) por el astrónomo inglés Henry Thomas Colebroke. Así se hicieron los trabajos de este astrónomo y matemático indio conocido al mundo occidental casi 700 años después de haberlos escrito, aunque sus ideas ya habían alcanzado antes el oeste a través de los árabes hace muchos siglos.

En las palabras del australiano A. L. Basham de la maravilla que era la India se ponen de manifiesto algunas ideas: “el mundo le debe mucho a la India en las matemáticas, que se desarrollaron en el periodo del rey Gupta en una fase más adelantada que cualquier otra nación de la antigüedad. El éxito de la matemática india era principalmente debido al hecho de que los indios tenían una concepción clara del número abstracto como distinto de la cantidad numérica de objetos o la extensión espacial.”

15.2. Geometría y algoritmo. Incluso en el área de la geometría, los matemáticos indios tenían su contribución. Había un área de aplicaciones matemáticas llamado Rekha Ganita (cálculo de la línea). El Sulvasutra da métodos de geometría para construir altares y templos. Los esquemas de templos se llamaron Mandalas. Algunos trabajadores importantes en este campo son Baudhayana, Apastamba, Hiranyakesin, Manava, Varaha y Vadhula.

Las pagodas budistas pidieron prestado su plan de construcción de la reja geométrica del Mandala usado para construir templos en India (una pagoda majestuosa en Bangkok).

El árabe Mahoma estudió el Rekha Ganita y lo introdujo entre los estudiosos árabes Al-Karismi, Washiya y Abe Mashar, que incorporaron el conocimiento recientemente adquirido de álgebra y otras ramas de matemática india en las ideas árabes sobre el asunto

El exponente principal de esta amalgama del Indo-árabe en las matemáticas fue Al-Karismi que desenvolvió una técnica de cálculo de las fuentes indias. Esta técnica fue nombrada como "algorismi", que nos dio el término de algoritmo moderno que se usa en el software de la computadora.

Algoritmo es un proceso de cálculo basado en números de la anotación decimal. Este método fue deducido por Al-Karismi de las técnicas indias de cálculo geométrico que él tenía. El trabajo de Al-Karismi se tradujo en latín bajo el título "De Número Índico".

Esta traducción que pertenece al siglo XII, fue acreditada por Adelard, que vivió en un pueblo llamado Baño en Inglaterra.

Así, Al-Karismi y Adelard tuvieron su parecido en cuanto a pioneros que transmiten números indios al oeste. Casualidades según el Diccionario de Oxford, la palabra algoritmo que nosotros usamos en el idioma inglés es una corrupción del nombre Khwarazmi, que literalmente quiere decir " (una persona) de Khwarazmi", que era el nombre del pueblo donde Al-Karismi vivió.

Los árabes tomaron prestado de la India muchos temas en el campo de las matemáticas, que incluso este asunto se conoció allí como Hindsa, que quiere decir "de India"; hay otro término árabe que se denomina Muhandis o "experto en matemáticas", que posiblemente derivó de la palabra Hindsa.

15.3. El concepto de cero. Este concepto apareció en la India y puede parecer muy ordinario; una demanda a su descubrimiento puede verse como raro. Pero si uno tiene en cuenta este concepto vería que el cero no es justo un número. Aparte de ser un número es también un concepto. Esto es fundamental, porque los términos para identificar objetos visibles o perceptibles no requieren mucha ingeniosidad.

Pero un concepto y símbolo que connotan nulidad representa un avance cualitativo de la capacidad humana de abstracción. En ausencia de un concepto de cero podría haber sólo números positivos en el cálculo; la inclusión de cero en matemática abrió una nueva dimensión de números negativos; también fue importante en el concepto de temperatura.

En la India antigua este número se usó en cálculos, fue indicado por un punto, y nombrado Pujyam. Hoy, nosotros usamos este término para el cero junto con el término más actual Shunyam, que significa espacio en blanco. Pero el término Pujyam extrañamente también quiere decir santo. Param-Pujya es un prefijo usado en comunicación escrita con superiores

La filosofía india ha glorificado conceptos como el ser mundial material (una ilusión maya), el acto de renunciar el mundo material (Tyaga) y la meta de fusión en el nulo de eternidad (Nirvana).

De una manera rara el concepto de “Zero” o “Shunyam” se deriva del concepto del nulo.

Es posible que como la técnica de álgebra, el concepto de cero también alcanzó el oeste a través de los árabes. Los árabes se refieren al cero como Siphra o Sifr; nosotros tenemos el cero de los términos inglés o Cypher. En inglés el término cero connota cero o cualquier número árabe. Así que es evidente que el término cero se deriva del Sifr árabe que a su vez está realmente cerca del término sánscrito Shubra.

En la India antigua el matemático y astrónomo Brahmagupta se acredita como el primero en utilizar el concepto de cero; en su *Brahmasphutasiddhanta* es cuando da a conocer las reglas de funcionamiento del cero, prefigurando la numeración del sistema decimal. Con la integración de cero en los números fue posible notar números más altos con caracteres limitados.

En el romano más temprano y los sistemas babilónicos de numeración, la enumeración y cálculo se llevaban difícilmente. Por ejemplo, en el sistema romano de numeración el número 33 tendría que ser escrito como X; mientras según el sistema decimal sería 30;

más allá el número 33 sería XXXIII según el sistema romano, sería 33 según el sistema decimal. Así está claro como la introducción del sistema decimal hizo posible la escritura de números que tienen un valor alto con caracteres limitados.

A Brahmagupta se le puede llamar el fundador de la rama más alta de la matemática, el análisis numérico; su *Brahmasphutasiddhanta* se tradujo en árabe bajo el título de Sind Hind.

Durante varios siglos esta fue la principal traducción en un texto normal de referencia en el mundo árabe. Era de la traducción de un texto indio en matemáticas, de donde los matemáticos árabes perfeccionaron el sistema decimal y dieron su sistema actual de enumeración, que nosotros llamamos los números árabes y que son números originalmente indios a la vista del mundo.

Bibliografías: libros y páginas web consultadas

1) **Libros:** Título: Historia de las matemáticas; Autor: Carl B. Boyer, versión española de Mariano Martín Pérez, 1986, AUT/94; editorial: Alianza Universidad Textos, Alianza editorial.

2) **Páginas web consultadas:**

   http://www.geometry.net

   http://www.albalagh.net/kids/history/biruni.shtml

   http://www.brown.edu/Departments/History_Mathematics

   http://www.islam.org.br/grandes_cientistas_muculmanos.htm

   http://mtcs.truman.edu

   http://www.ugr.es/~mazimane/albiruni.htm

   http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/

   http://www.math.sfu.ca/histmath/

   http://www.hyperhistory.com/