

1° Problema

**Consiste en determinar si un vector,
es combinación lineal de un conjunto de vectores S**

Los datos del problema son,

un vector V y un conjunto de vectores S ambos de \mathbb{R}^4

In[1]:=

```
v = {1, 2, 3, 4};
```

```
S = {{1, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 1}, {0, 1, -1, 2}, {1, 0, -1, 4}};
```

**¿Cómo expresamos que v es combinación lineal de los vectores
de S ?**

```
v = a.S (1) + b.S (2) + c.S (3) + d.S (4)
```

In[3]:=

```
incognitas = {a, b, c, d};
```

```
sistema = v == Transpose[S].incognitas
```

Out[4]=

```
{1, 2, 3, 4} == {a + b + d, -b + c, -c - d, b + 2 c + 4 d}
```

In[5]:=

```
sistemat = LogicalExpand[sistema]
```

```
Solve[sistemat, incognitas]
```

Out[5]=

```
-b + c == 2 && -c - d == 3 && a + b + d == 1 && b + 2 c + 4 d == 4
```

Out[6]=

```
{{a -> 6, b -> -20, c -> -18, d -> 15}}
```

**Como los valores no son todos nulos,
el vector v depende linealmente de S**

Podemos obviar el desarrollo lógico del sistema s decir

In[7]:=

```
Solve[sistema, incognitas]
```

Out[7]=

```
{{a -> 6, b -> -20, c -> -18, d -> 15}}
```

2° Problema

¿Son los vectores de un conjunto S , linealmente independientes? Para ello será necesario y suficiente que si el vector nulo se expresase como combinación lineal de ellos, todos los coeficientes sería nulos

Utilizaremos el mismo conjunto S , que en el problma anterior, por lo que no es necesario introducirlo de nuevo

In[8]:=

```
v = {0, 0, 0, 0};
sistema2 = v == Transpose[S].incognitas
Solve[sistema2, incognitas]
```

Out[9]=

```
{0, 0, 0, 0} == {a + b + d, -b + c, -c - d, b + 2 c + 4 d}
```

Out[10]=

```
{{a -> 0, b -> 0, c -> 0, d -> 0}}
```

3° Problema

¿Es un conjunto de vectores T , un sistema de generadores del espacio en el que estamos trabajando?

In[11]:=

```
T = {{1, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 1}, {0, 1, -1, 2}, {0, 2, -1, 1}};
```

Para ello debemos probar que un vector genérico u de \mathbb{R}^4 es combinación lineal de los vectores de T

In[12]:=

```
u = {x, y, z, t};
incognitas3 = {a, b, c, d};
sistema3 = u == Transpose[T].incognitas3
Solve[sistema3, incognitas3]
```

Out[14]=

```
{x, y, z, t} == {a + b, -b + c + 2 d, -c - d, b + 2 c + d}
```

Out[15]=

```
{}
```

**El sistema tiene solución vacía,
por lo tanto T no es un sistema de
generadores.**

**Si cambiamos T por T1,
veamos lo que ocurre**

In[16]:=

```
T1 = {{1, 0, 0, 0}, {1, -1, 1, 1}, {0, 1, -1, 2}, {0, 2, -1, 1}};
```

In[17]:=

```
u = {x, y, z, t};
incognitas3 = {a, b, c, d};
sistema3 = u == Transpose[T1].incognitas3
Solve[sistema3, incognitas3]
```

Out[19]=

```
{x, y, z, t} == {a + b, -b + c + 2 d, b - c - d, b + 2 c + d}
```

Out[20]=

```
{ { a → -1/3 (t - 3 x + y + 3 z),
  b → -1/3 (-t - y - 3 z), c → -1/3 (-t + 2 y + 3 z), d → y + z } }
```

Entonces T1 si es un sistema de generadores

4.-Problema

**Si T1 es un sistema de generadores y contiene 4 vectores y el
espacio es \mathbb{R}^4 ,
¿Será una base?**

In[21]:=

```
Det[T1]
```

Out[21]=

3

**¿Podríamos saber las coordenadas de un vector cualquiera,
respecto de esta base?**

In[22]:=

```
coordenadas = {a1, a2, a3, a4}
vector = {v1, v2, v3, v4}
solucion = Solve[Transpose[T1].coordenadas == vector, coordenadas]
```

Out[22]=

```
{a1, a2, a3, a4}
```

```
Out[23]=
```

```
{v1, v2, v3, v4}
```

```
Out[24]=
```

```
{ { a1 → -1/3 (-3 v1 + v2 + 3 v3 + v4),
    a2 → -1/3 (-v2 - 3 v3 - v4), a3 → -1/3 (2 v2 + 3 v3 - v4), a4 → v2 + v3 } }
```

```
In[25]:=
```

```
coordenadas /. solucion[[1]]
```

```
Out[25]=
```

```
{ -1/3 (-3 v1 + v2 + 3 v3 + v4),
  -1/3 (-v2 - 3 v3 - v4), -1/3 (2 v2 + 3 v3 - v4), v2 + v3 }
```

5.-Problema

Primer método :

**dado un conjunto de vectores,
calcular el subespacio vectorial que genera,
calculando una base y sus ecuaciones paramétricas e implícitas.**

```
In[26]:=
```

```
conjunto = {{-5, 4, 1, 2}, {2, 5, -1, -2}, {-1, 3, 4, 4},  
            {-13, 6, 19, 22}};
```

```
In[27]:=
```

```
Det[conjunto]
```

```
Out[27]=
```

```
0
```

Luego son linealmente dependientes.

```
In[28]:=
```

```
MatrixForm[RowReduce[conjunto]]
```

```
Out[28]//MatrixForm=
```

```
( 1  0  0  -3/11 )
( 0  1  0  -1/11 )
( 0  0  1   1   )
( 0  0  0   0   )
```

El rango es tres, luego los tres primeros vectores forman una base de este subespacio vectorial

In[29]:=

```
base = Table[conjunto[[i]], {i, 3}]
```

Out[29]=

```
{{-5, 4, 1, 2}, {2, 5, -1, -2}, {-1, 3, 4, 4}}
```

Ecuaciones paramétricas de este subespacio vectorial

In[30]:=

```
parametros = {p1, p2, p3};
```

Ponemos tres parámetros por estar la base formada por 3 vectores

In[32]:=

```
coordenadas1 = {c1, c2, c3, c4};
```

In[33]:=

```
parametricas = coordenadas1 == Transpose[base].parametros
```

Out[33]=

```
{c1, c2, c3, c4} ==
{-5 p1 + 2 p2 - p3, 4 p1 + 5 p2 + 3 p3, p1 - p2 + 4 p3, 2 p1 - 2 p2 + 4 p3}
```

O bien en forma natural

In[34]:=

```
LogicalExpand[parametricas]
```

Out[34]=

```
-5 p1 + 2 p2 - p3 == c1 && 4 p1 + 5 p2 + 3 p3 == c2 &&
2 p1 - 2 p2 + 4 p3 == c4 && p1 - p2 + 4 p3 == c3
```

Que son las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial

Eliminando los parametros tendremos las ecuaciones implícitas

In[35]:=

```
Eliminate[parametricas, parametros]
```

Out[35]=

```
3 c1 + c2 + 11 c4 == 11 c3
```

Segundo método :

In[36]:=

```
conjuntobis = RowReduce[conjunto]
```

Out[36]=

```
{ {1, 0, 0, -3/11}, {0, 1, 0, -1/11}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 0} }
```

In[37]:=

```
base = Table[conjuntobis[[i]], {i, 3}]
```

Out[37]=

```
{ {1, 0, 0, -3/11}, {0, 1, 0, -1/11}, {0, 0, 1, 1} }
```

In[38]:=

```
parametricas = coordenadas1 == Transpose[base].parametros
```

Out[38]=

```
{c1, c2, c3, c4} == {p1, p2, p3, -3 p1/11 - p2/11 + p3}
```

In[39]:=

```
Eliminate[parametricas, parametros]
```

Out[39]=

```
-c2 + 11 c3 - 11 c4 == 3 c1
```

6.-Problema

Dado un subespacio vectorial por sus ecuaciones implícitas, hallar una base

In[40]:=

```
ecuacionesimplicitas =
```

```
{x - y + z - t + r == 0, 2 x + 5 y - 4 z + 3 t + 2 r == 0};
```

```
coordenadas = {x, y, z, t, r};
```

```
solucion = Solve[ecuacionesimplicitas, coordenadas]
```

```
Solve::svars :
```

Equations may not give solutions for all "solve" variables. [More...](#)

Out[42]=

```
{ {x -> -r + 2 t/7 - z/7, y -> -5 t/7 + 6 z/7} }
```

In[43]:=

```
vectorgenerico = coordenadas /. solucion[[1]]
```

Out[43]=

```
{ -r + 2 t/7 - z/7, -5 t/7 + 6 z/7, z, t, r }
```

La orden Coefficient[expresion1, expresion2],

significa el coeficiente de expresion2 en expresion1

In[44]:=

```
parametros = {z, t, r};  
base =  
Table[Table[Coefficient[vectorgenerico[[j]], parametros[[i]]],  
{j, Length[vectorgenerico]}], {i, Length[parametros]}]
```

Out[45]=

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{2}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 1, 0 \right\}, \{-1, 0, 0, 0, 1\} \right\}$$

In[46]:=

```
MatrixForm[base]
```

Out[46]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Created by [Mathematica](#) (January 28, 2004)