XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–3)

Aproximación Numérica para un modelo climatológico 1D acoplado con un océano profundo 2D.

A. Hidalgo[1], L. Tello[2]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada y Métodos Informáticos, E.T.S.I. Minas, Universidad Politécnica de Madrid. E-mail:* `arturo.hidalgo@upm.es`.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid. E-mail:* `l.tello@upm.es`.

Palabras clave: Volúmenes finitos, Modelos de clima, ecuaciones parabólicas

Resumen

En este trabajo se estudia la aproximación numérica de un modelo climatológico global. El modelo se basa en el que propusieron Watts y Morantine en [5] pero aquí se incluye coalbedo dependiente de la temperatura. La principal dificultad es la condición de contorno dinámica y difusiva que representa el acoplamiento entre el océano profundo y la superficie atmosférica.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos la aproximación numérica de la solución de un modelo climatológico de tipo de balance de energía que incorpora el acoplamiento entre un océano profundo y la superficie atmosférica. El modelo fue propuesto en Watts y Morantine [5].

El modelo estudiado describe la evolución de la temperatura en el interior de un océano "global"de profundidad H así como en su superficie (atmosférica). Suponiendo temperatura constante sobre cada paralelo, se toman como variables espaciales (x, z), siendo x el seno de la latitud y $-z$ la profundidad. Así, el dominio espacial se denota por $\Omega = (-1, 1) \times (-H, 0)$ y su contorno, $\Gamma_H \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, siendo $\Gamma_H = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = -H\}$, $\Gamma_0 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : x = 1 \text{ ó } x = -1\}$. U representa la temperatura en el interior del océano y viene dada por la ecuación:

$$U_t - (\frac{K_H}{R^2}(1 - x^2)U_x)_x - K_V U_{zz} + wU_z = 0 \quad (0, T) \times \Omega, \tag{1}$$

donde K_V y K_H son los coeficientes de difusión vertical y horizontal, respectivamente. w es la velocidad vertical y R, el radio de la Tierra. La condición de contorno en $z = 0$ proviene del balance de energía:

$$DU_t - \frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)U_x)_x + \frac{BU+A}{\rho c} + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wxU_x \in \frac{1}{\rho c}QS(x)\beta(U), \qquad (2)$$

donde $BU + A$ es la energía emitida por enfriamiento de la superficie, D es el espesor de la capa mixta y K_{H_0} la difusividad horizontal en la capa mixta. Las constantes ρ y c representan la densidad y el calor específico del agua, respectivamente.

El efecto feedback del coalbedo, $\beta(U)$, aparece en la condición de contorno; $S(x)$ es la función de insolación y Q la constante solar dividida por cuatro. El problema se completa con condiciones de contorno en Γ_H y Γ_1 así como condición inicial dada en $t = 0$.

Resultados sobre las soluciones de evolución se encuentran en [2] y sobre la multiplicidad de soluciones estacionarias en [3].

En este trabajo aproximamos la solución de evolución mediante un método de volúmenes finitos sobre un mallado estructurado formado por volúmenes de control rectangulares y utilizando reconstrucción espacial conservativa.

2. Aproximación Numérica

En esta sección se describen brevemente las ideas utilizadas en la aproximación numérica de la temperatura mediante el método de volúmenes finitos. Comenzamos reescribiendo la ecuación (1) en la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} = \sigma(x,z,t) \qquad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} f &= -\tfrac{K_H}{R^2}\left(1-x^2\right)\tfrac{\partial U}{\partial x} \\ g &= \omega U - K_V\tfrac{\partial U}{\partial z} \\ \sigma &= -U\tfrac{\partial \omega}{\partial z} \end{aligned} \qquad (4)$$

Integrando en el volumen de control $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [z_{j-\frac{1}{2}}, z_{j+\frac{1}{2}}]$ se obtiene la fórmula explícita siguiente

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{f}^n_{i-\frac{1}{2},j}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[\bar{g}^n_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{g}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right] + \Delta t\sigma^n_{i,j} \qquad (5)$$

en la que se han utilizado los promedios espaciales en el instante t^n

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x\Delta z}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} U\,(x,z,t^n)dxdz\ ;\ \bar{\sigma}_i^n = \frac{1}{\Delta x\Delta z}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \sigma\,(x,z,t^n)dxdz \qquad (6)$$

y

$$\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, z, t^n\right) dz \; ; \; \bar{g}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g\left(x, z_{j+\frac{1}{2}}, t^n\right) dx. \quad (7)$$

Para la reconstrucción espacial definimos una función polinómica a trozos cuya restricción al volumen de control (i,j) en el instante t^n, $W(x,z,t^n)$, verifica

$$\frac{1}{\Delta x \Delta z}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} W\left(x,z,t^n\right) dxdz = \bar{u}_{ij} \quad (8)$$

y

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x^k} = \frac{\partial^{(k)} W\left(x,z,t^n\right)}{\partial x^k}, \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z^k} = \frac{\partial^{(k)} W\left(x,z,t^n\right)}{\partial z^k} \quad (9)$$

En este trabajo el polinomio W es bicuadrático y se obtendrá como el producto de dos polinomios conservativos de segundo grado: $W\left(x,z,t^n\right) = P\left(x,t^n\right) \cdot Q\left(z,t^n\right)$.

2.1. Condición de contorno del borde superior

La ecuación (2) se resuelve también mediante un esquema en volúmenes finitos con reconstrucción espacial centrada de segundo grado, aproximando la derivada temporal mediante un esquema de tipo $\theta-$método. Los valores así calculados se emplean como condición de contorno de tipo Dirichlet para la resolución en el dominio bidimensional.

Referencias

[1] R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello. 'Mathematical and numerical analysis of nonlinear diffusive climate energy balance model'. *Mathematical and computer modelling* (2008).

[2] J.I. Díaz, L. Tello, Sobre un modelo climatico de balance de energia superficial acoplado con un oceano profundo, Actas del XVII CEDYA/ VI CMA, (2001).

[3] J.I. Díaz, L.Tello. 'On a climate model with a dynamic nonlinear diffusive boundary condition'. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* series S, Vol 1, N. 2, (2008), 253-262.

[4] E.F. Toro, A. Hidalgo. 'ADER finite volume schemes for nonlinear reaction-diffusion equations'. *Applied Numerical Mathematics* 59 (2009), 73-100.

[5] R.G. Watts, M. Morantine, *Rapid climatic change and the deep ocean*, Climatic Change 16 (1990), 83–97.