XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–8)

Sobre el desarrollo asintótico cerca de la frontera de la solución explosiva de una ecuación elíptica semilineal

S. Alarcón[1], G. Díaz[2], J.M. Rey[2]

[1] *Dpto. de Matemáticas, Univ. Técnica de Santa María, Valparaiso, Chile.*
E-mail: `salomon.alarcon@usm.cl.`
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid, Parque de Ciencias. 28040–Madrid.*
E-mails: `gdiaz@mat.ucm.es, jrey@mat.ucm.es`

Palabras clave: Soluciones explosivas, comportamiento asintótico, principio del máximo.

Resumen

Presentamos un estudio del desarrollo asintótico cerca de la frontera de las soluciones explosivas de la ecuación

$$-\Delta u + \lambda u^m = f \quad \text{in } \Omega,$$

donde $\lambda > 0,\ m > 1$ y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\mathrm{N} > 1$, con frontera adecuadamente regular. Abreviadamente, mostramos que el número de términos del desarrollo tiende a ser infinito a medida que m se acerca a 1. Probamos que, para fuentes con *baja explosión* cerca de la frontera, el primer término del desarrollo de la solución es uniforme e independiente de la geometría de Ω. Cuando las fuentes tienen *alta explosión* esa propiedad se puede extender a otros términos iniciales. Finalmente, cuando se tiene *muy alta explosión* en las fuentes todos los términos del desarrollo son uniformes e independientes de la geometría.

A la memoria de René Letelier†

1. Introducción

Como se ha comentado, nos interesamos en las soluciones de la ecuación

$$-\Delta u + g(u) = f \quad \text{en } \Omega, \tag{1}$$

con un comportamiento *explosivo* en la frontera

$$u(x) \to \infty \quad \text{cuando } x \to \partial\Omega. \tag{2}$$

El estudio de este tipo de problemas de contorno tiene una amplia literatura que comienza con los trabajos de L. Bieberbach and H. Rademacher para precisas elecciones de la función g. Cercanos a nuestro punto de vista surgen los coetáneos trabajos de J.B. Keller y R. Osserman quienes, en 1957, obtienen existencia de soluciones explosivas para $f \equiv 0$, g no decreciente y Ω acotado. Caracterizan esa existencia bajo la hoy denominada condición de *Keller–Osserman*

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau}} < +\infty. \tag{3}$$

Desde entonces una importante teoría se ha desarrollado (ver, por ejemplo, [1], [2], [3], [5], [6] y las referencias incluidas). A la vista de los resultados de [3] o [6] sobre existencia, unicidad y regularidad de soluciones clásicas explosivas, centramos ahora nuestra atención en el desarrollo asintótico de las mismas cerca de la frontera $\partial\Omega$.

En [3] fue probado que cuando $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ el primer término del desarrollo es uniforme e independiente de Ω para las soluciones explosivas de

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda u^m = f \quad \text{en } \Omega \quad (1 < p < \infty) \tag{4}$$

supuesto $m > p - 1$, que es una extensión de (3). Cuando $f \equiv 0$ otras propiedades sobre ese primer término uniforme han sido obtenidas por varios autores: C. Bandle, G. Díaz, J. García Melián, A. Greco, A. Lazer, S. Kim, N. Kondrat'ev, R. Letelier, J. López–Gómez, M. Marcus, J. Matero, P. McKenna, V. Nikishkin, M. del Pino, G. Porru, J. Sabina y L. Véron entre otros autores.

Claramente, la geometría del dominio puede intervenir en el desarrollo asintótico, lo que aquí se suele hacer mediante la función distancia $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ que abreviaremos por $\mathrm{d}(x)$. La primera contribución sobre la influencia de la geometría es debida a M. del Pino and R. Letelier quienes en [7] prueban, para $g(r) = r^m,\ 1 < m < 3,\ \partial\Omega \in \mathcal{C}^4,\ \mathrm{N} > 1$ y $f \equiv 0$, el comportamiento

$$u(x) = \left(\frac{2(m+1)}{\lambda(m-1)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} \big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{2}{m-1}} \left(1 - \left(\frac{(\mathrm{N}-1)\mathbf{H}(x_0)}{m+3} + \mathrm{o}(1)\right)\mathrm{d}(x)\right), \tag{5}$$

siendo $\mathbf{H}(x_0)$ la curvatura media de la frontera en $x_0 \in \partial\Omega$, dado por $\mathrm{d}(x) = |x - x_0|$, y $\mathrm{o}(1) \to 0$ cuando $\mathrm{d}(x) \to 0$. C. Bandle y M. Marcus han extendido el resultado de [7] mostrando la dependencia de la curvatura media en el segundo término del desarrollo asintótico, de nuevo cuando $f \equiv 0$ (ver [2]).

Nuestro objetivo en esta comunicación es estudiar el desarrollo completo cerca de la frontera de las soluciones explosivas de (1), aquí ilustrado por la ecuación

$$-\Delta u + \lambda u^m = f \quad \text{en } \Omega \quad (m > 1). \tag{6}$$

Lo haremos a partir del primer término, $f(x) \approx f_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-q}$, del propio desarrollo de f. Cuando $f_0 \geq 0$ y $q = \dfrac{2m}{m-1}$ la calificamos como fuente con *baja explosión*, mientras que cuando $f_0 > 0$ y $q > \dfrac{2m}{m-1}$ diremos que la fuente tiene *alta explosión*. Estos casos determinan los exponentes explosivos principales de la solución y de la fuente que pueden ser parametrizados por

$$\alpha_\tau = \frac{2+\tau}{m-1} \quad \text{y} \quad q_\tau = m\alpha_\tau, \quad \tau \geq 0,$$

de modo que las fuentes con baja explosión vienen dadas por $\tau = 0$ y $f_0 \geq 0$ y las de alta explosión por $\tau > 0$ y $f_0 > 0$. Para simplificar sólo consideraremos el caso $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nuestra contribución puede ser resumida como sigue. Supongamos $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{2(\mathrm{M}_{\alpha_\tau}+1)}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ verificando

$$f(x) = \big(\mathrm{d}(x)\big)^{-q_\tau}\left(f_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}} f_n\big(\mathrm{d}(x)\big)^n\right), \quad \text{cerca de } \partial\Omega, \tag{7}$$

donde $f_n,\ 0 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$ son constantes reales y $\mathrm{M}_{\alpha_\tau} \in \mathbb{N}$ por precisar más adelante. Entonces probamos

Teorema 1 *La única solución explosiva de* (6) *tiene la propiedad*

$$u(x) = \mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau}\left(1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}} \mathrm{C}_n(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^n\right) + \mathrm{o}\left(\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau+\mathrm{M}_{\alpha_\tau}}\right), \tag{8}$$

donde los coeficientes $\mathrm{C}_n,\ 0 \leq n \leq \mathrm{mín}\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\}$, *son constantes independientes de* Ω *y* $\mathrm{C}_n \in \mathcal{C}^{2(\mathrm{M}_{\alpha_\tau}-n)},\ \mathrm{mín}\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\} + 1 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$, *son funciones reales.*

El índice $\mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 1$ es, por tanto, el número de todos los términos explosivos y está ligado a la explosión principal α_τ. Cuando $\alpha_\tau \leq 1$ el desarrollo (8) consta de un único término, lo que ocurre para $3 + \tau \leq m$. Además se verifica

$$\mathrm{lím}_{m\to 1} \mathrm{M}_{\alpha_\tau} = \infty$$

(ver la Observación 1). Cuando $\mathrm{mín}\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\} = \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$ la fuente f tiene *muy alta explosión*, pues todos los coeficientes de (8) son uniformes e independientes de la geometría.

Ilustramos los resultados observando que dados dos puntos $x_0,\ y_0 \in \partial\Omega$ si se verifica

$$\left|\mathrm{C}_n\big(x_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{x_0}\big) - \mathrm{C}_n\big(y_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{y_0}\big)\right| \to 0 \quad \text{cuando } s \to 0$$

para $1 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$, entonces

$$\left|u\big(x_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{x_0}\big) - u\big(y_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{y_0}\big)\right| \to 0 \quad \text{cuando } s \to 0; \tag{9}$$

en caso contrario

$$\left|u\big(x_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{x_0}\big) - u\big(y_0 - s\,\vec{\mathbf{n}}_{y_0}\big)\right| \to \infty \quad \text{cuando } s \to 0, \tag{10}$$

siendo $\vec{\mathbf{n}}_{x_0}$ y $\vec{\mathbf{n}}_{y_0}$ los respectivos vectores exteriores unitarios. En el caso particular $\Omega = \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0)$, si $f_n \equiv 0$ para $\mathrm{mín}\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\} + 1 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$, todos los coeficientes de (8) son uniformes, pues la curvatura es constante y, por tanto, se verifica (9) para cualquier pareja $x_0,\ y_0 \in \partial\Omega$.

Esta comunicación resume parte de un trabajo de próxima aparición que incluye algunos modelos de las aplicaciones en donde surge esta fenomenología.

2. Breve comentario sobre las pruebas

En [3] el comportamiento asintótico en la frontera se basó en dos formas diferentes de abordar las propiedades explosivas de la soluciones de (6). El primero usaba el esquema

$$\overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_0-2}}^{\Delta u} \approx \overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-m\alpha_0}}^{\lambda u^m} - \overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-q}}^{f} \quad \text{cerca } \partial\Omega \quad (q \leq \alpha_0 m) \tag{11}$$

para el que $\alpha_0 + 2 = \alpha_0 m \Leftrightarrow \alpha_0 = \dfrac{2}{m-1}$ es el exponente explosivo. El segundo esquema es

$$\overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha-2}}^{\Delta u} \ll \overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-m\alpha}}^{\lambda u^m} \approx \overbrace{\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-q}}^{f} \quad \text{cerca } \partial\Omega \quad (q > \alpha_0 m), \tag{12}$$

ahora $\alpha m = q \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{q}{m} > \alpha_0$ es el exponente explosivo. Ambos pueden ser parametrizados por

$$\alpha_\tau = \frac{2+\tau}{m-1} \quad \text{y} \quad q_\tau = m\alpha_\tau, \tag{13}$$

que, con el fin de simplificar, sólo consideraremos para $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En ambos casos, el comportamiento en la frontera responde a

$$\mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau} + o\Big(\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau}\Big) \quad \text{cuando } \mathrm{d}(x) \to 0,$$

lo que lleva a un desarrollo formal

$$\mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau}\left(1 + \sum_{n\geq 1} \mathrm{C}_n(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^n\right),$$

donde $\mathrm{C}_0 > 0$ y $\mathrm{C}_n(x)$, $n \geq 1$, son funciones reales. Si fijamos nuestro interés en los términos explosivos, nos limitaremos a los coeficientes $\mathrm{C}_n(x)$ con $n < \alpha_\tau$, de modo que se obtiene

Lema 1 *Para cada exponente admisible $\alpha_\tau > 0$ el correspondiente desarrollo explosivo es de la forma*

$$\mathrm{V}(x) = \mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau}\left(1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}} \mathrm{C}_n(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^n\right), \tag{14}$$

con

$$\mathrm{M}_{\alpha_\tau} = \begin{cases} \alpha_\tau - 1, & \textit{si } \alpha_\tau \textit{ es un entero,} \\ [\alpha_\tau], & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \qquad \square$$

Observación 1 En la práctica, puede resultar más útil asociar un exponente α_τ a un número de términos $\mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 1$, lo que viene dado por

$$m \in \mathrm{I}_{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}} \doteq \left[\frac{\mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 3 + \tau}{\mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 1}, \frac{\mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 2 + \tau}{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}}\right[\quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\tau \in \left]\mathrm{M}_{\alpha_\tau}, \mathrm{M}_{\alpha_\tau} + 1\right]. \tag{15}$$

Nótese que $\mathrm{I}_0 = [3+\tau, \infty[$ y

$$]1, \infty[= \bigcup_{\mathrm{M}_{\alpha_\tau} \geq 0} \mathrm{I}_{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}}. \qquad \square$$

Observación 2 Conjeturamos que cuando $m \searrow 1$ la solución explosiva de (6) tiende hacia la solución de viscosidad del denominado *state constraints problem*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u \leq f & \text{in } \Omega, \\ -\Delta u + \lambda u \geq f & \text{in } \overline{\Omega}. \end{cases} \qquad \square$$

La prueba del resultado principal se apoya en las funciones auxiliares

$$\mathrm{V}_\delta^{\pm}(x) = \mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x) \mp \delta\big)^{-\alpha_\tau}\left(1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{M}_{\alpha_\tau}} \mathrm{C}_n(x)\big(\mathrm{d}(x) \mp \delta\big)^n\right),$$

definidas para $x \in \Omega$ tales que $\mathrm{d}(x) \mp \delta > 0$ y sus modificaciones

$$\mathrm{W}_\delta^{\pm\varepsilon}(x) = \mathrm{V}_\delta^{\pm}(x) \pm \varepsilon \mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x) \mp \delta\big)^{-\alpha_\tau}.$$

Cálculos directos y tediosos permiten mostrar que, para adecuadas elecciones de los coeficientes C_n, las funciones $\mathrm{W}_\delta^{\pm\varepsilon}(x)$ son sub y supersoluciones de (6) en estrechos entornos tabulares de la frontera en donde la función $\mathrm{d}(x)$ tiene la regularidad conferida por $\partial\Omega$. La adaptación y simplificación de clásicas fórmulas algebraicas son usadas para desarrollar potencias de polinomios, lo que aquí tiene un papel destacado que permite inferir las propiedades del desarrollo comentadas en la sección anterior.

Un comentario final sobre la influencia de geometría. Claramente la parte diferencial principal sobre estas funciones auxiliares $\mathrm{V}_\delta^{\pm}(x)$ es de la forma

$$\Delta \mathrm{V}_\delta^{\pm}(x) = \alpha_\tau(\alpha_\tau + 1)\big(\mathrm{d}(x) \mp \delta\big)^{-\alpha_\tau - 2}|\nabla \mathrm{d}(x)|^2 - \alpha_\tau \Delta \mathrm{d}(x)\big(\mathrm{d}(x) \mp \delta\big)^{-\alpha_\tau - 1}$$

en la que, a través de $\Delta\mathrm{d}(x)$ próximo a la curvatura media, interviene la geometría de $\partial\Omega$ en el segundo sumando de la derecha. Podríamos pensar que también el término $|\nabla \mathrm{d}(x)|$ hace intervenir esa geometría en el primer sumando. Sin embargo, sobre estrechos entornos tabulares de la frontera, en donde se acomodan nuestros razonamientos, se verifica $|\nabla \mathrm{d}(x)| \equiv 1$ (ver por ejemplo [2] o [4]). Ello provoca que el término principal del desarrollo asintótico de la solución explosiva esté afectado, en todos los casos, por un coeficiente uniforme e independiente de la geometría. Nuestra contribución señala, entre otras aportaciones, que pueden existir términos siguientes con esa misma propiedad (fuente con *alta explosión*) e incluso que así ocurra con todos los coeficientes del desarrollo (fuente con *muy alta explosión*).

3. Algunos ejemplos

Completamos esta comunicación con algunos ejemplos de comportamiento explosivo que pretenden ilustrar los resultados que se presentan.

• *Sin influencia de la geometría del dominio.* Basta escoger, por ejemplo, $\tau \geq \mathrm{M}_{\alpha_\tau} = 1$, lo que lleva a la condición $\dfrac{4+\tau}{2} < m < 3 + \tau$, para la que tomaremos

$$f(x) = \big(\mathrm{d}(x)\big)^{-m\alpha_\tau}\big(f_0 + f_1\mathrm{d}(x)\big), \quad f_0 > 0 \quad (\textit{fuente con muy alta explosión}).$$

Entonces el completo desarrollo explosivo de la solución correspondiente es

$$
\begin{aligned}
u(x) = \ & \left(\frac{f_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} \big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau} \left\{1 + \frac{1}{m f_0}\left(f_1 + \frac{(2+\tau)(m+\tau+1)}{(m-1)^2}\left(\frac{f_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}\right)\mathrm{d}(x)\right\} \\
& + \mathrm{o}\left(\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\alpha_\tau+1}\right),
\end{aligned}
$$

supuesto $\partial\Omega \in \mathcal{C}^4$.

• *Con influencia de la geometría del dominio y un único término uniforme.* Esa intervención aparece por manipulaciones diferenciales de la función distancia a la frontera y requiere la desigualdad $\min\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\} + 1 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau},\ \tau \geq 0$. En particular, para obtener un único término uniforme podemos tomar $f \equiv 0$ (*fuente con baja explosión*) y $\dfrac{5}{3} \leq m < 2$ (o equivalentemente $2 < \alpha_0 \leq 3$), para el que $\mathrm{M}_{\alpha_0} = 2$. Ahora, el completo desarrollo explosivo de la solución correspondiente es

$$
\begin{aligned}
u(x) = \ & \left(\frac{2(m+1)}{\lambda(m-1)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} \big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{2}{m-1}} \Bigg(1 - \frac{1}{m+3}\Delta\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(x) \\
& - \frac{1}{12(m+3)}\left[2(m-3)\langle\nabla(\Delta\mathrm{d}(x)), \nabla\mathrm{d}(x)\rangle + \frac{2m^2+m-9}{m+3}(\Delta\mathrm{d}(x))^2)\right]\big(\mathrm{d}(x)\big)^2\Bigg) \\
& + \mathrm{o}\left(\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{2(2-m)}{m-1}}\right),
\end{aligned}
$$

supuesto $\partial\Omega \in \mathcal{C}^6$. Se extiende aquí el resultado de [7] (ver también [2]) que sólo aportaba los dos primeros términos.

• *Con influencia de la geometría del dominio y más de un término uniforme.* De nuevo requerimos la desigualdad $\min\{\tau, \mathrm{M}_{\alpha_\tau}\} + 1 \leq n \leq \mathrm{M}_{\alpha_\tau}$ ahora, por ejemplo, con $\tau = 1$ y $\mathrm{M}_{\alpha_1} + 1 = 5$. Ello nos permite considerar $\dfrac{8}{5} \leq m < \dfrac{7}{4}$ (o equivalentemente $4 < \alpha_1 \leq 5$) y, por simplicidad,

$$
f(x) = f_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{3m}{m-1}}, \quad f_0 > 0 \quad (\textit{fuente con alta explosión}).
$$

El completo desarrollo explosivo de la solución correspondiente es

$$
\begin{aligned}
u(x) = \ & \mathrm{C}_0\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{3}{m-1}} \left(1 + \mathrm{C}_1\mathrm{d}(x) + \mathrm{C}_2(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^2 + \mathrm{C}_3(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^3 + \mathrm{C}_4(x)\big(\mathrm{d}(x)\big)^4\right) \\
& + \mathrm{o}\left(\big(\mathrm{d}(x)\big)^{-\frac{7-4m}{m-1}}\right),
\end{aligned}
$$

para los coeficientes

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_0 &= \left(\frac{f_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{m}},\\
\mathrm{C}_1 &= \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{mf_0}\mathrm{C}_0, \qquad\qquad \left(\alpha_1 = \frac{3}{m-1}\right)\\
\mathrm{C}_2(x) &= \frac{\alpha_1\mathrm{C}_0}{mf_0}\Big[(\alpha_1-1)\mathrm{C}_1 - \Delta\mathrm{d}(x)\Big] - \frac{m-1}{2}\mathrm{C}_1^2,\\
\mathrm{C}_3(x) &= \frac{(1-\alpha_1)\mathrm{C}_0}{mf_0}\Big[(2-\alpha_1)\mathrm{C}_2(x) + \mathrm{C}_1\Delta\mathrm{d}(x)\Big] - \frac{m-1}{6}\mathrm{C}_1\Big[(m-2)\mathrm{C}_1^2 + 6\mathrm{C}_2(x)\Big],\\
\mathrm{C}_4(x) &= \frac{(2-\alpha_1)\mathrm{C}_0}{mf_0}\Big[(3-\alpha_1)\mathrm{C}_3(x) + 2\langle\nabla\mathrm{C}_2(x),\nabla\mathrm{d}(x)\rangle + \mathrm{C}_2(x)\Delta\mathrm{d}(x)\Big]\\
&\quad -\frac{m-1}{2}\left[\frac{(m-2)(m-3)}{12}\mathrm{C}_1^4 + (m-2)\mathrm{C}_1^2\mathrm{C}_2(x) + 2\mathrm{C}_1\mathrm{C}_3(x) + \big(\mathrm{C}_2(x)\big)^2\right],
\end{aligned}$$

supuesto $\partial\Omega \in \mathcal{C}^8$. La presencia de la geometría se realiza a través de la función

$$\Delta\mathrm{d}(x) = -(\mathrm{N}-1)\mathbf{H}(x), \tag{16}$$

donde $\mathbf{H}(x)$ representa la curvatura media de $\partial\{y \in \Omega : \mathrm{d}(y) < \mathrm{d}(x)\}$ en x (ver [2] o [4]). Ciertamente la geometría más sencilla surge en bolas, como $\Omega = \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0)$, para las que

$$\Delta\mathrm{d}(x) = -\frac{\mathrm{N}-1}{|x|}, \quad |x| < \mathrm{R}.$$

Agradecimientos

El trabajo de S. Alarcón está parcialmente financiado por el proyecto UTFSM/2008 12 08 22 (Chile), el de G. Díaz por los proyectos MTM 2008-06208 de DGISGPI (Spain) y CCG07–UCM/ESP-2787 (Spain) y el de J.M. Rey por los proyectos MTM 2008–04621 y CSD2006–00032 (Spain) y CCG07–UCM/ESP-2787 (Spain). Los dos últimos autores pertenecen al Programa de Creación y Consolidación de Grupos de Investigación UCM-Banco Santander (referencia 910480).

Referencias

[1] Bandle, C.: Asymptotic behavior of large solutions of elliptic equations, *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, **2**, (2005), 1–8.

[2] Bandle, C. and Marcus, M.: Dependence of blowup rate of large solutions of semilinear elliptic equations, on the curvature of the boundary, *Complex Variables Theory Appl.*, **49**, (2004), 555–570.

[3] Díaz, G. and Letelier, R.: Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: existence and uniqueness, *Nonlinear Anal.*, **20** (2), (1993), 97–125.

[4] Gilbarg, D. and Trudinger, N.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer–Verlag (1983).

[5] Lazer, A.C. and P. J. McKenna, P.J.: Asymptotic behaviour of solutions of boundary blow up problems, *Differ. Integral Equ. Appl.*, **7** (1994), 1001–1019.

[6] Matero J.: Quasilinear elliptic equations with boundary blow-up, *J. d'Anal. Math.*, **96**, (1996), 229–247.

[7] Del Pino, M. and Letelier, R.: The influence of domain geometry in boundary blow–up elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, **48** (6), (2002), 897–904.