XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–3)

Estabilización de soluciones para un problema parabólico con condición de contorno dinámica y difusiva.

L. Tello[1]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid.*
E-mail: `l.tello@upm.es`.

Palabras clave: ecuaciones parabólicas, condiciones de contorno dinámicas y difusivas, comportamiento asintótico

Resumen

En este trabajo se estudia la evolución de la temperatura dada por un modelo de acoplamiento Atmósfera – Océano profundo. El dominio espacial representa un océano global Ω y en la parte superior de su contorno, la incógnita (temperatura) verifica una ley dinámica y difusiva no lineal.

1. El modelo.

En este trabajo se estudia la evolución de las temperaturas oceánica y atmósferica, (U, u), solución del modelo de balance de energía acoplado con un océano profundo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla U) + w\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\hat{F}(x, \nabla_{\mathcal{N}} U) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathcal{N}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div_{\mathcal{M}}(|\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2}\nabla_{\mathcal{M}} u) + \frac{\partial U}{\partial n} + F(x, \nabla_{\mathcal{M}} u) + \mathcal{G}(u) \in \frac{1}{\rho c} QS(x)\beta(U) + f \tag{3}$$

siendo $u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que

$$U\big|_{\mathcal{M}} = u. \tag{4}$$

$$U(0, \cdot) = U_0(\cdot) \qquad u(0, \cdot) = u_0(\cdot). \tag{5}$$

Se trata de un modelo de balance de energía 2D para la temperatura atmosférica acoplado con un modelo de océano profundo 3D. El modelo está basado en el de dimensión inferior propuesto en [6]. Por simplicidad, algunas constantes se han supuesto iguales a uno.

El dominio espacial, $\Omega \subset I\!R^3$, es un océano global de profundidad H. La frontera superior de Ω es una variedad $\mathcal{M}$ que simula la superficie de la Tierra. La frontera inferior del océano es la variedad $\mathcal{N}$. Por ejemplo, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ podrían ser dos esferas concéntricas de radios R y $R-H$, respectivamente.

El modelo aquí estudiado ha sido descrito en el trabajo Diaz, Tello [3] en el que se ha probado la existencia de soluciones débiles bajo las hipótesis que se detallan en la sección siguiente.

2. Hipótesis estructurales

(H1) Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^3$ con profundidad constante H y $\partial\Omega = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son variedades Riemannianas C^∞ bidimensionales compactas conexas sin borde de $\mathbb{R}^3$ tales que $\text{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = H$.

(H2) β es un grafo maximal monótono y acotado de $\mathbb{R}^2$.

(H3) $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente tal que $\mathcal{G}(0) = 0$ y $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$ para algún $r > 0$.

(H4) $S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $s_1 \geq S(x) \geq s_0 > 0$ a.e. $x \in \mathcal{M}$, con s_1 y s_2 constantes positivas.

(H5) $f \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$,

(H6) $F : \mathcal{M} \times T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ y $\hat{F} : \mathcal{N} \times T\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ son lineales con coeficientes constantes en los espacios tangentes $T\mathcal{M}$ y $T\mathcal{N}$.

(H7) $w \in C^1(\overline{\Omega})$.

(H8) $p \geq 2$.

La forma del dominio espacial Ω sugiere utilizar el sistema de coordenadas (θ, φ, z) donde z pertenece al intervalo $(-H, 0)$ de la recta ortogonal al plano tangente $T_p\mathcal{M}$, que en $z = 0$ interseca a $\mathcal{M}$ y en $z = -H$ a $\mathcal{N}$. Así, $\nabla_\mathcal{M}$ y $div_\mathcal{M}$ son entendidos en el sentido de la métrica Riemanniana de $\mathcal{M}$.

3. Estabilización de soluciones

Basándonos en los resultados de estabilización para el modelo sin efecto del océano profundo de [2], probamos la convergencia de soluciones del problema evolutivo a alguna solución del problema estacionario asociado.

Comenzamos definiendo el espacio funcional sobre la variedad Riemanniana $\mathcal{M}$,

$$V := \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla_\mathcal{M} u \in L^p(T\mathcal{M})\}$$

donde $T\mathcal{M} = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p M$ es el fibrado tangente (véase Aubin [1] para definiciones de espacios funcionales sobre variedades en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales).

Definimos el conjunto ω-límite de una solución débil acotada, (U,u), de (1)–(5):

$$\omega(U,u) := \{(U_\infty, u_\infty) \in (H^1(\Omega)\times V)\cap L^\infty(\mathcal{M})\times L^\infty(\mathcal{M}) :$$

$$\exists t_n \to +\infty \text{ tal que } (U(t_n,\cdot), u(t_n,\cdot)) \to (U_\infty, u_\infty) \text{ en } L^2(\Omega)\times L^2(\mathcal{M})\}.$$

Para estudiar el comportamiento de las soluciones de evolución necesitaremos una hipótesis adicional:

(H_∞) Existe $f_\infty \in V'$ tal que

$$\int_{t-1}^{t+1} \|f(\tau,\cdot) - f_\infty(\cdot)\|_{V'} d\tau \to 0 \quad \text{si } t\to\infty.$$

Lema 3.1 *Sea*

$$U_0 \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\mathcal{M}), u_0 \in V\cap L^\infty(\mathcal{M}), \tag{6}$$
$$f \in L^\infty((0,\infty)\times\mathcal{M})\cap W^{1,1}_{loc}((0,\infty);L^1(\mathcal{M})) \text{ y}, \tag{7}$$
$$\int_t^{t+1} \|\frac{\partial f}{\partial t}(s,\cdot)\|_{L^1(\mathcal{M})} ds \le C_0,\ \forall t>0 \tag{8}$$
$$\text{siendo } C_0 \text{ constante independiente del tiempo.} \tag{9}$$

Entonces existe un solución débil (U,u) de (1)–(5) verificando

$$u\in L^\infty((0,\infty);V) \quad y \quad u_t \in L^2((0,\infty);L^2(\mathcal{M})). \tag{10}$$

Teorema 3.2 *Sean $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})\cap V$, $U_0 \in L^\infty(\mathcal{M})\cap H^1(\Omega)$ y (U,u) una solución débil acotada que verifica (10). Entonces su conjunto ω-límite, $\omega(U,u)$, está formado por funciones $(U_\infty,u_\infty)\in H^1(\Omega)\times V$ que son solución débil del problema estacionario asociado.*

La multiplicidad de estados estacionarios para el modelo 1D acoplado con un modelo de océano profundo 2D fue probada en [4] en función de un parámetro (Q).

Referencias

[1] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] J.I. Díaz, J. Hernández, L. Tello, On the multiplicity of equilibrium solution to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in Climatology. J.M.A.A. 216 (1997) 593-613.

[3] J.I. Díaz, L. Tello. A 2D climate energy balance model coupled with a 3D deep ocean model, *Electronic Journal of differential equations* Conf. 16 (2007) 129-135.

[4] J.I. Díaz, L.Tello. 'On a climate model with a dynamic nonlinear diffusive boundary condition'. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* series S, Vol 1, N. 2, (2008), 253-262.

[5] P. H. Stone, A simplified radiative - dynamical model for the static stability of rotating atmospheres, *Journal of the Atmospheric Sciences,* **29**, No. 3, 405-418 (1972).

[6] R. G. Watts, M. Morantine, Rapid climatic change and the deep ocean, *Climatic Change*, **16**, (1990) 83-97.