

Identificación del coeficiente de transferencia de calor en una ecuación diferencial ordinaria

ANDRÉS FRAGUELA¹, JUAN-ANTONIO INFANTE², ÁNGEL
MANUEL RAMOS², JOSÉ MARÍA REY²

¹ *Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)*
E-mail: fraguela@cfcm.buap.mx.

² *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.*
E-mail:{infante,angel,jrey}@mat.ucm.es.

Palabras clave: Identificación de funciones, Problemas inversos, Intercambio de calor.

Resumen

Abordamos el problema inverso que consiste en identificar el coeficiente de intercambio de calor H entre un material y el medio que lo rodea, supuesto que H es función de la temperatura y que sólo se conocen ciertas mediciones experimentales (con posible error) de la misma. La dificultad mayor reside en que el coeficiente que se pretende identificar es una función que depende de la solución de la ecuación de estado. Se presenta un algoritmo numérico desarrollado para resolver este tipo de problemas, el cual mejora el descrito en [1].

1. Introducción.

Este trabajo tiene como objetivo la resolución del problema inverso consistente en identificar, a partir de mediciones experimentales de la temperatura, el coeficiente de intercambio de calor de un cierto material con el medio exterior, suponiendo que dicho coeficiente depende de la temperatura del material (en [2], [3] y [4], por ejemplo, se recogen aplicaciones prácticas modeladas por ecuaciones en las que aparece este coeficiente). El objetivo último es poder simular distintas soluciones del modelo para temperaturas iniciales y ambiente dadas, sin necesidad de realizar nuevas mediciones. En concreto, se supone que el fenómeno físico que se estudia está modelizado por el problema de valor inicial

$$\begin{cases} T'(t) = H(T(t))(T^e - T(t)), & t \geq t_0 \\ T(t_0) = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $T(t)$ es la temperatura en el instante de tiempo t , T_0 es la temperatura inicial, T^e es la temperatura del medio exterior (supondremos, sin pérdida de generalidad, que $T_0 < T^e$) y la función H es el coeficiente de intercambio de calor que se pretende identificar. Las principales dificultades que surgen en esta tarea son:

- La función H que se debe identificar depende de la solución de la ecuación de estado y la única información disponible es que se trata de una función continua y positiva.
- Las mediciones de temperatura vienen, en general, afectadas de errores provenientes de las limitaciones de los aparatos de medida.

2. Escenarios de planteamiento del problema inverso.

Por ser H positiva, la (única) solución T del problema (1) es creciente. Esto hace que el modelo (1) sea poco sensible a cambios de $H(s)$ para valores de s cercanos a T^e en el siguiente sentido: si para un cierto tiempo t_μ la función T alcanza un cierto valor $T^e - \mu$ entonces, por ser T creciente, a partir de este instante, toda la función T permanece en el intervalo $[T^e - \mu, T^e]$ independientemente de los valores que tome la función H . Por tanto, es ilusorio (e innecesario) pretender identificar H en temperaturas cercanas a T^e .

Esto nos lleva a plantear el problema de identificar la función H como sigue:

- Se fijará un *umbral* $\mu > 0$, que dependerá del error admisible en la aproximación de la temperatura, de forma que la identificación de la función H en el intervalo $[T^e - \mu, T^e]$ no forma parte de nuestros objetivos. A partir de este umbral se determinará (mediante los argumentos que se explicarán más adelante) un tiempo $t_f = t_f(\mu, T_0, T^e, H)$ para el que se verifique

$$|T^e - T(t)| < \mu, \quad t \geq t_f, \quad (2)$$

con lo que el error en la temperatura será, para $t \geq t_f$, menor que μ .

- Para la identificación de la función H en el intervalo $[T_0, T^e - \mu]$ utilizaremos el modelo (1) planteado en el intervalo $[t_0, t_f]$. De esta forma, se obtiene una identificación de H en el intervalo $[T_0, T(t_f)]$ que contiene a $[T_0, T^e - \mu]$.

Dependiendo del conocimiento que se tenga de la solución T en $[t_0, t_f]$, el problema inverso estará inmerso en diversos escenarios:

1. En el caso más favorable (y, en la práctica, irreal) de que se conociera la función T en todo el intervalo $[t_0, t_f]$ (y, por tanto, también su derivada) bajo las hipótesis de que $H \in \mathcal{C}([T_0, T(t_f)])$ y sea positiva, la identificación de H se obtendría de forma inmediata (utilizando que T es inyectiva, por ser creciente) a partir de la igualdad

$$H(s) = \frac{T'(T^{-1}(s))}{T^e - s}. \quad (3)$$

2. Si existe la posibilidad de evaluar la función T , de forma exacta, en un número finito de instantes arbitrarios de tiempo del intervalo $[t_0, t_f]$, el problema de identificar H en $[T_0, T(t_f)]$ se reduce a un problema estándar de derivación aproximada (en concreto, para la evaluación de T' , la cual es desconocida, a diferencia de lo que ocurría en el escenario anterior).

3. El siguiente escenario se plantea cuando se supone conocida una función \tilde{T} que representa el valor aproximado de la temperatura en todo instante de tiempo.
4. No obstante, la situación habitual es que tan sólo se conoce una cantidad discreta de valores \tilde{T}_k que aproximan los correspondientes valores de la función T .

Para acometer el tratamiento de los dos últimos escenarios, buscaremos un método “estable” de aproximar T' a partir de los datos y obtener, mediante la fórmula (3), una cantidad discreta de valores aproximados de H en puntos del intervalo $[T_0, T(t_f)]$.

Veamos cómo proceder para determinar el instante t_f en las citadas situaciones:

1. En el primer escenario, el valor de t_f (en este caso, el mínimo valor de t_f que verifica (2)) es la solución de la ecuación $T(t) = T^e - \mu$; es decir, $t_f = T^{-1}(T^e - \mu)$.
2. En el segundo escenario, también se toma como t_f el menor valor de t que verifica $T(t) = T^e - \mu$. En la práctica, a partir de $p + 1$ valores exactos de la temperatura $\{T_0, T_1, \dots, T_p\}$ en los instantes $\{\tau_0 = t_0, \tau_1, \tau_2 \dots, \tau_p\}$, se definen las cantidades

$$\mu_k = T^e - T_k.$$

Vamos a suponer que el valor de μ se elige como uno de los μ_k o como cualquier cantidad inferior a ellos. En este caso, se toma $t_f = \tau_m$, siendo

$$m = \begin{cases} p, & \text{si } \mu < \mu_k \text{ para todo } k. \\ \text{mín}\{k : \mu = \mu_k\}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4)$$

3. En el tercer escenario, la función \tilde{T} se conoce en un intervalo $[t_0, t^*]$, de forma que

$$\left\| T - \tilde{T} \right\|_{\mathcal{C}([t_0, t^*])} < \delta$$

y que $\mu > \delta$ (si $\mu \leq \delta$ debería aumentarse el valor de μ). Tomaremos t_f dado por

$$t_f = \begin{cases} t^*, & \text{si } \tilde{T}(t) < T^e - \mu + \delta \text{ para todo } t \leq t^*. \\ \text{mín}\{t : \tilde{T}(t) = T^e - \mu + \delta\}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (5)$$

Nótese que, cuando $t_f = \text{mín}\{t : \tilde{T}(t) = T^e - \mu + \delta\}$, se tiene que

$$T(t) \geq T(t_f) \geq \tilde{T}(t_f) - \delta = T^e - \mu, \quad t \geq t_f.$$

4. En el cuarto escenario, supondremos que se dispone de mediciones \hat{T}_k de forma que $|T(\tau_k) - \hat{T}_k| < \hat{\delta}$, con $\hat{\delta} > 0$, donde $\{\tau_0 = t_0, \tau_1, \tau_2 \dots, \tau_p\}$ es una secuencia de instantes de tiempo. Vamos a denotar por \tilde{T} a una función que interpole los valores $\{\hat{T}_0, \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_p\}$ en los puntos $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_p\}$ y a considerar $\delta > 0$, una cota de la norma de la diferencia entre T y \tilde{T} en el intervalo $[\tau_0, \tau_p]$, esto es,

$$\left\| T - \tilde{T} \right\|_{\mathcal{C}([\tau_0, \tau_p])} < \delta.$$

Es decir, δ (que será mayor o igual que $\widehat{\delta}$) mide el error que se comete al aproximar la temperatura T por una función que interpola valores que son, a su vez, aproximaciones de los valores que toma T en los instantes τ_k . Ahora, definimos

$$\mu_k = T^e - \widehat{T}_k + \delta$$

para $k = 1, 2, \dots, p$. Razones técnicas (véase la Proposición 3.3) imponen la restricción $\mu > 3\delta$. Además supondremos que el umbral μ es menor que todos los valores μ_k anteriores o coincide con alguno de ellos. En esta situación se toma $t_f = \tau_m$ con m dado en (4). En el caso en que $m = \min\{k : \mu = \mu_k\}$, la elección de t_f nos asegura que las temperaturas correspondientes a las mediciones que no se están teniendo en cuenta, son todas mayores que $T^e - \mu$.

3. Aproximación de la solución del problema inverso.

En los siguientes apartados se describe cómo identificar la función H en función del tipo de escenario en que nos encontremos.

Escenario 2: Un número finito de valores exactos de la temperatura.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos conocidos los valores de T en los puntos $t_k = t_0 + kh$ para $k = 0, 1, \dots, n$, donde $h = \frac{t_f - t_0}{n}$. Nuestro objetivo es definir valores \widetilde{H}_k que aproximen

$$H(T_k) = \frac{T'(t_k)}{T^e - T_k},$$

donde estamos denotando $T_k = T(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Dado el operador continuo de derivación aproximada $R_h : \mathcal{C}([t_0, t_f]) \rightarrow \mathcal{C}([t_0, t_f])$

$$R_h(v)(t) = \begin{cases} \frac{-3v(t) + 4v(t+h) - v(t+2h)}{2h} + \Psi_h(v)(t_0), & t \in [t_0, t_0+h] \\ \frac{v(t+h) - v(t-h)}{2h}, & t \in [t_0+h, t_f-h] \\ \frac{3v(t) - 4v(t-h) + v(t-2h)}{2h} + \Psi_h(v)(t_f-3h), & t \in [t_f-h, t_f] \end{cases}$$

donde

$$\Psi_h(v)(t) = \frac{v(t+3h) - 3v(t+2h) + 3v(t+h) - v(t)}{2h},$$

consideraremos

$$\widetilde{H}_k = \frac{R_h(T)(t_k)}{T^e - T_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Los siguientes resultados proporcionan una cota del error cometido con esta aproximación:

Lema 3.1 *Si $v \in \mathcal{C}^3([t_0, t_f])$ se verifica que*

$$\|v' - R_h(v)\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])} \leq \frac{29}{6}h^2 \|v'''\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])}. \quad \square$$

Proposición 3.2 Si $T \in \mathcal{C}^3([t_0, t_f])$ y $M_3 = \|T'''\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])}$, entonces

$$\max_{k=0,1,\dots,n} \left| H(T_k) - \tilde{H}_k \right| \leq \frac{29M_3}{6\mu} h^2. \quad \square$$

Escenario 3: Una función que aproxima la temperatura.

En este contexto, supondremos conocida una función $\tilde{T} \in \mathcal{C}([t_0, t_f])$, con t_f elegido según (5), que aproxime T en el sentido de que

$$\left\| T - \tilde{T} \right\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])} < \delta \quad (6)$$

para $0 < \delta < \mu$. Por simplicidad y coherencia con las propiedades de T , supondremos que

$$\tilde{T}(t) \geq T_0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

(de no ser así, bastaría truncar inferiormente \tilde{T} por el valor T_0). Basándonos en la función

$$u(t) = \frac{T'(t)}{T^e - T(t)}, \quad t_0 < t < t_f$$

consideramos la aproximación

$$\tilde{u}_h(t) = \frac{R_h(\tilde{T})(t)}{T^e - \tilde{T}(t)}, \quad t_0 < t < t_f.$$

Veamos una estimación del error que se comete en dicha aproximación:

Proposición 3.3 Si $T \in \mathcal{C}^3([t_0, t_f])$ y $\tilde{T} \in \mathcal{C}([t_0, t_f])$ verifica (6) con $0 < \delta < \frac{\mu}{3}$, entonces

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])} \leq \frac{1}{\mu - 2\delta} \left(\frac{29M_3}{6} h^2 + \frac{4\delta}{h} \frac{T^e - T_0 + \mu - 2\delta}{\mu - 3\delta} \right). \quad \square \quad (7)$$

En la estimación (7), el paso de tiempo h aparece elevado al cuadrado en un sumando y dividiendo en el otro, por lo que, para optimizar la estimación, se puede elegir h de forma que se balanceen de forma óptima ambos sumandos:

Proposición 3.4 Bajo las hipótesis de la Proposición 3.3, el menor valor de la estimación (7) se obtiene cuando se toma como paso temporal

$$h^* = \left(\frac{12(T^e - T_0 + \mu - 2\delta)}{29(\mu - 3\delta)M_3} \delta \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

Para este valor óptimo del paso de tiempo, se tiene que

$$\|u - \tilde{u}_{h^*}\|_{\mathcal{C}([t_0, t_f])} \leq \frac{1}{\mu - 2\delta} \left(522M_3 \frac{(T^e - T_0 + \mu - 2\delta)^2}{(\mu - 3\delta)^2} \delta^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad \square$$

A partir de la Proposición 3.4, tomando como paso de tiempo el valor óptimo h^* dado por (8), considerando como n la parte entera de $\frac{t_f - t_0}{h^*}$, denotando $t_k = t_0 + kh^*$ y $\tilde{T}_k = \tilde{T}(t_k)$, y tomando como aproximaciones de $H(T_k)$ los valores

$$\tilde{H}_k = \tilde{u}_{h^*}(t_k) = \frac{R_{h^*}(\tilde{T})(t_k)}{T^e - \tilde{T}_k}$$

para $k = 0, 1, \dots, n$, se puede obtener el resultado fundamental de este apartado:

Teorema 3.5 *Si $H \in C^1([T_0, T^e])$ y $\tilde{T} \in C([t_0, t_f])$ verifica (6) con $0 < \delta < \frac{\mu}{3}$, entonces*

$$\max_{k=0,1,\dots,n} |H(\tilde{T}_k) - \tilde{H}_k| \leq \delta \|H'\| + \frac{1}{\mu - 2\delta} \left(522M_3 \frac{(T^e - T_0 + \mu - 2\delta)^2}{(\mu - 3\delta)^2} \delta^2 \right)^{\frac{1}{3}} = O(\delta^{\frac{2}{3}}). \quad \square$$

Escenario 4: Un número finito de valores aproximados de la temperatura.

Supondremos que el método de interpolación utilizado, según el apartado 4) de la Sección 2, es tal que el error δ entre T y \tilde{T} es del orden del error de medición $\hat{\delta}$. En concreto, si \tilde{T} es la interpolación lineal a trozos de las mediciones $\{\hat{T}_0, \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_p\}$ y denotamos T_{int} la interpolación lineal a trozos de los valores de T en los puntos τ_k , la monotonía de la función T determina que

$$\begin{aligned} \left\| T - \tilde{T} \right\|_{C([\tau_0, \tau_p])} &\leq \|T - T_{\text{int}}\| + \left\| T_{\text{int}} - \tilde{T} \right\| \leq \max_{k=1,2,\dots,p} |T(\tau_k) - T(\tau_{k-1})| + \hat{\delta} \\ &\leq \max_{k=1,2,\dots,p} \left(|\tilde{T}(\tau_k) - \tilde{T}(\tau_{k-1})| + 2\hat{\delta} \right) + \hat{\delta} = \max_{k=1,2,\dots,p} |\hat{T}_k - \hat{T}_{k-1}| + 3\hat{\delta}. \end{aligned}$$

Así pues, cuando se trabaja con interpolación lineal, para conseguir que δ sea del orden de $\hat{\delta}$ basta que la diferencia entre mediciones consecutivas sea de orden $\hat{\delta}$; para ello, eventualmente, será necesario aumentar el número de mediciones.

Para esta función \tilde{T} el Teorema 3.5 sigue siendo válido cuando se eligen μ y t_f según el apartado 4) de la Sección 2 y h, n y \tilde{T}_k como en el escenario anterior.

4. Algoritmo para la determinación de la función H .

En esta sección nos situamos en el escenario 4: suponemos conocidas las mediciones aproximadas de temperatura $\{\hat{T}_k\}_{k=0}^p$, el error de medición $\hat{\delta} > 0$ y un umbral admisible $\mu > 0$. El algoritmo que se propone comienza con la construcción de la función $\tilde{T}(t)$ que interpola los valores $\{\hat{T}_k\}_{k=0}^p$, tras lo que se determinará una cota del error cometido en dicha interpolación $\delta > 0$. A partir de los valores δ y μ se determina el instante $t_f = \tau_m$ con m dado en (4). El algoritmo se basa en un proceso iterativo en el que se parte de una cota inicial tentativa Λ_3 de la norma infinito de la derivada tercera de la temperatura. A partir de ella, se calcula el valor del paso temporal mediante la expresión

$$h = \left(\frac{12(T^e - T_0 + \mu - 2\delta)}{29(\mu - 3\delta)\Lambda_3} \delta \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (9)$$

en concordancia con la fórmula (8). Con este valor de h se obtienen los valores

$$\tilde{H}_k = \frac{R_h(\tilde{T})(t_k)}{T^e - \tilde{T}_k} \quad (10)$$

que aproximan los valores de H en las temperaturas $\tilde{T}_k = \tilde{T}(t_k)$ para $k = 0, 1, \dots, n$. A continuación, se calcula un nuevo valor para Λ_3 como el máximo, en valor absoluto, de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{-5\tilde{T}_k + 18\tilde{T}_{k+1} - 24\tilde{T}_{k+2} + 14\tilde{T}_{k+3} - 3\tilde{T}_{k+4}}{2h^3}, & k = 0, 1 \\ \frac{\tilde{T}_{k+2} - 2\tilde{T}_{k+1} + 2\tilde{T}_{k-1} - \tilde{T}_{k-2}}{2h^3}, & k = 2, 3, \dots, n-2 \\ \frac{3\tilde{T}_{k-4} - 14\tilde{T}_{k-3} + 24\tilde{T}_{k-2} - 18\tilde{T}_{k-1} + 5\tilde{T}_k}{2h^3}, & k = n-1, n, \end{array} \right. \quad (11)$$

que proporcionará un nuevo valor de h con el que repetir la iteración. El proceso iterativo se detendrá cuando el paso en el tiempo h se estabilice.

Algoritmo

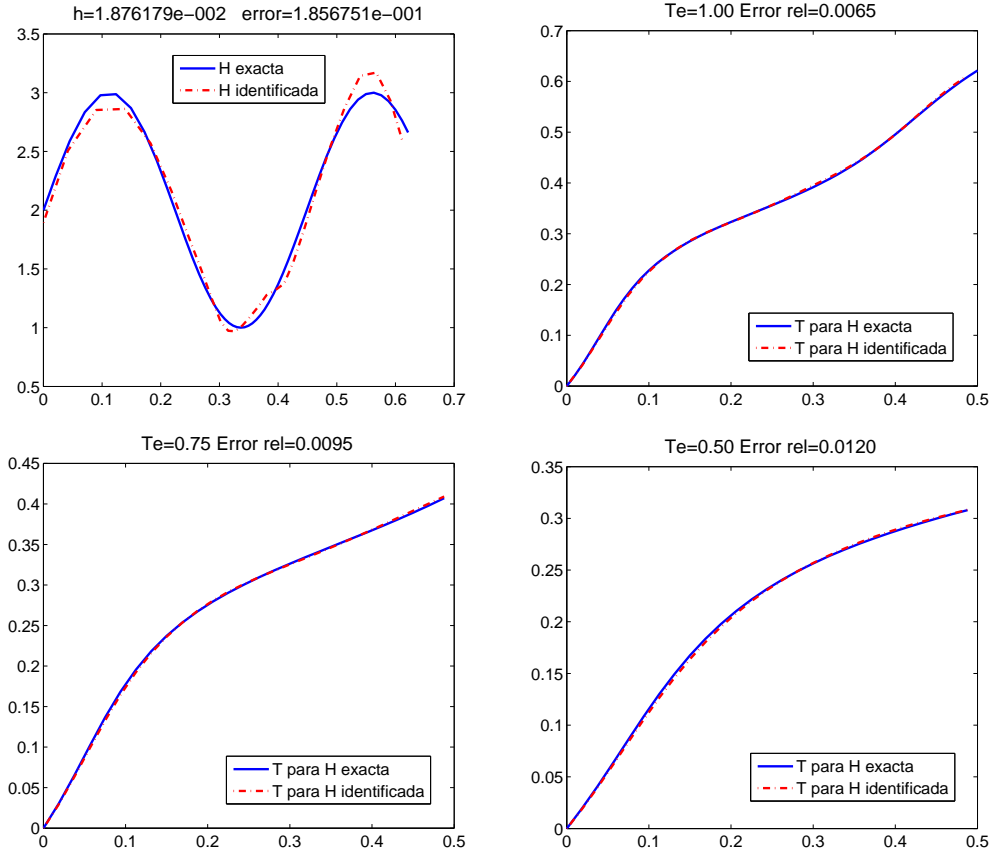
DATOS	$\{\hat{T}_k\}_{k=0}^p$: mediciones de la temperatura en los tiempos $\{\tau_k\}_{k=0}^p$. $\delta > 0$: cota del error en las mediciones. $\mu > 0$: umbral considerado. ε : precisión del test de parada. Λ_3 : valor inicial (tentativo) para M_3 .
Paso 1:	Determinar \tilde{T} y δ en función de $\hat{\delta}$.
Paso 2:	Tomar $t_f = \tau_m$ con m dado en (4) adaptando, si procede, el valor de μ .
Paso 3:	Calcular el valor inicial de h mediante (9) y determinar la partición $\{t_k\}$.
Paso 4:	Mientras que el error relativo en h sea mayor que la precisión ε : <ol style="list-style-type: none"> a) Obtener $\{\tilde{T}_k\}$ interpolando las mediciones en la partición $\{t_k\}$. b) Calcular el nuevo valor de Λ_3 como el máximo en k del valor absoluto de los valores dados por (11). c) Calcular el nuevo valor de h según (9) y, con él, la nueva partición $\{t_k\}$.
Paso 5:	Calcular las aproximaciones $\{\tilde{H}_k\}$ según la fórmula (10).

5. Resultados numéricos.

Presentamos un ejemplo de prueba en el que, a partir de una función dada H se genera la solución T y, a partir de su evaluación en ciertos instantes de tiempo, se crean las *mediciones con error* a base de perturbar estas evaluaciones. Como función aproximada \tilde{T} se usa la interpolación lineal a trozos de las mediciones.

Concretamente, consideramos $H(s) = 2 + \sin 14s$, $T_0 = 0$, $T^e = 1$ y el intervalo temporal $[0, 1]$. Tomamos como “solución exacta” (aunque no sea en el sentido riguroso de la palabra) del problema de valor inicial correspondiente, la aproximación numérica que proporciona el comando `ode45` de **MATLAB**. Consideramos $N = 100$ mediciones con un error aleatorio en cada una de ellas, de forma que δ sea del orden del 1%. A partir del umbral elegido, $\mu = 0'4$, se obtiene el valor de $t_f = 0'5$. Por tanto, el objetivo es identificar la función H anterior en el intervalo $(0, T(t_f)) \simeq (0, 0'6216)$ a partir de las *medidas*. Con la

aproximación de H que proporciona el algoritmo se calcula la temperatura correspondiente a diversos valores de T^e (0'75, 0'5 y 0'25) y se compara con la solución exacta (véase la siguiente figura). Como se aprecia, los errores en las aproximaciones de las temperaturas obtenidas son del mismo orden (1 %) que el error en las mediciones.



Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos MTM2008–04621/MTM del Ministerio de Ciencia e Innovación (Plan Nacional I+D+i 2008–2011) y de Consolidación de Grupos de Investigación financiado por el Banco Santander y la Universidad Complutense de Madrid (Ref. 910480).

Referencias

- [1] A. Fraguela, J.A. Infante, A.M. Ramos y J.M. Rey. *Identification of a heat transfer coefficient when it is a function depending on temperature*, WSEAS Trans. Math. **7**(4) (2008), 160–172.
- [2] B. Guignon, Á.M. Ramos, J.A. Infante, J.M. Díaz and P.D. Sanz. *Determining thermal parameters in the cooling of a small-scale high pressure freezing vessel*. International Journal of Refrigeration, Vol. **29** (2006), 1152–1159. doi:10.1016/j.ijrefrig.2006.01.007
- [3] J.A. Infante, B. Ivorra, Á. M. Ramos y J.M. Rey. *On the Modelling and Simulation of High Pressure Processes and Inactivation of Enzymes in Food Engineering*. Aceptado para ser publicado en Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS), ISSN: 0218–2025 (paper), ISSN: 1793–6314 (on line).
- [4] L. Otero, Á.M. Ramos, C. de Elvira and P.D. Sanz. *A Model to Design High-Pressure Processes Towards an Uniform Temperature Distribution*. Journal of Food Engineering, Vol **78** (2007), 1463–1370. doi:10.1016/j.jfoodeng.2006.01.020