XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–8)

Identificación de un coeficiente de conductividad térmica transitoria

Andrés Fraguela[1], Juan-Antonio Infante[2], Ángel Manuel Ramos[2], José María Rey[2]

[1] *Facultad de Ciencias Físico–Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)*
E-mail: `fraguela@fcfm.buap.mx`.
[2] *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.*
E-mail:`{infante,angel,jrey}@mat.ucm.es`.

Palabras clave: Identificación de funciones, Problemas inversos, Intercambio de calor.

Resumen

En la presente comunicación se estudia el problema inverso que consiste en determinar la conductividad térmica de un medio, cuando ésta depende del tiempo y se conoce la evolución de la temperatura en una parte de dicho medio. Este tipo de situaciones se plantean en contextos de tecnología de alimentos, cuando se utilizan procesos térmicos a altas presiones.

El fenómeno se modeliza mediante la ecuación de transferencia de calor con un término fuente que depende de la temperatura y del incremento de la presión, ecuación que se completa con adecuadas condiciones inicial y de contorno. Se considera como dominio una bola de $\mathbb{R}^2$ de radio arbitrario, centrada en el origen.

Se presenta un resultado de unicidad de solución del problema inverso. Para ello, en primer lugar, se encuentra una representación adecuada de la solución, en función de sus valores en la frontera del dominio. A continuación, se demuestra que el coeficiente (transitorio) de conductividad térmico está unívocamente determinado si se conoce el valor de la temperatura en la frontera de la bola y en cualquier otro radio interior.

1. Formulación del problema.

Una tecnología emergente en la Ingeniería de Alimentos es el uso de tratamientos que combinan altas presiones con temperaturas moderadas (véase [1, 2]). Debido a que la presión $p(t)$ a la que se somete al alimento puede ser muy elevada, coeficientes que suelen considerarse constantes en las ecuaciones pasan a tener una variación con respecto a la presión en cada instante que puede no ser despreciable.

En este sentido, en las ecuaciones de transferencia de calor que pueden aparecer en los modelos matemáticos de estos procesos (véanse, por ejemplo, [1, 2]) la conductividad térmica (u otros coeficientes involucrados) podría depender de la presión: $k = k(p)$. Puesto que el valor de estos coeficientes a presión distinta de la atmosférica suele ser desconocido para la mayoría de los medios, nos planteamos identificar la función $k(p)$ en base a mediciones experimentales. Si se elige un experimento con una curva de presión $p(t)$ inyectiva (por ejemplo, creciente) identificar $k(p)$ es equivalente a identificar $k(t) = k(p(t))$. Esto nos lleva a considerar el problema modelo

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho C \dfrac{\partial T}{\partial t} - k(t)\Delta T = \alpha p'(t) T & \text{en } B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}) \\ k(t)\dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h\left(T_{\mathrm{ref}}(t) - T\right) & \text{en } \partial B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}) \\ T = T_0 & \text{en } B_R \times \{0\}, \end{array}\right. \tag{1}$$

donde $R > 0$ y $t_{\mathrm{f}} > 0$. $B_R \subset \mathbb{R}^2$ denota la bola de centro 0 y radio R; $\alpha \geq 0$ es el coeficiente de expansión térmica; $\varrho, C \in \mathbb{R}$ son la densidad y el calor específico, respectivamente; $p \in \mathcal{C}^1(0, t_{\mathrm{f}})$ representa la presión; $k \in \mathcal{C}([0, t_{\mathrm{f}}])$ y $k > 0$ es el coeficiente de difusión; $T_{\mathrm{ref}} \in \mathcal{C}(0, t_{\mathrm{f}})$ denota una temperatura externa de referencia; $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior a la bola B_R y T_0 es la temperatura inicial que supondremos constante (se podría suponer radial). El objetivo es identificar la función k conociendo mediciones de la temperatura T en ciertos puntos de la bola B_R.

Notación: Denotaremos $X = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}\big(B_R \times (0, t_{\mathrm{f}})\big) \cap \mathcal{C}^{1,0}\big(\overline{B_R} \times [0, t_{\mathrm{f}}]\big)\right\}$ y, para cada función radial $v \in X$ denotaremos por $\overline{v} : [0, R] \times [0, t_{\mathrm{f}}] \to \mathbb{R}$ la función que toma los valores de v en cada circunferencia, es decir,

$$\overline{v}(r, t) = v(x, t) \ \text{ para todo } x \in B_R \text{ con } |x| = r. \quad \square$$

Teorema 1.1 *El problema* (1) *tiene una única solución $T \in X$. Además, T es radial.* $\square$

Con vistas a hacer homogénea la ecuación diferencial y para homogeneizar la condición inicial, efectuamos el cambio de variable

$$v(x, t) = T(x, t) e^{\frac{\alpha}{\varrho C}(p(0) - p(t))} - T_0,$$

que permite expresar el problema (1) en la forma

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho C \dfrac{\partial v}{\partial t} - k(t)\Delta v = 0 & \text{en } B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}) \\ k(t)\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} = h\left(f(t) - T_0 - v\right) & \text{en } \partial B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}), \\ v = 0 & \text{en } B_R \times \{0\}, \end{array}\right. \tag{2}$$

siendo $f(t) = T_{\mathrm{ref}}(t)\, e^{\frac{\alpha}{\varrho C}(p(0) - p(t))}$.

Observación 1.2 Nótese que $v \in X$ y es radial. De hecho, aunque el problema (2) tiene una expresión "agradable" en coordenadas polares, trabajaremos con coordenadas cartesianas. Esto se debe a que vamos a expresar la solución como la composición de ciertas funciones con traslaciones y éstas, al no ser radiales, no tienen una representación "cómoda" en coordenadas polares. $\square$

Proposición 1.3 (Identidad de Lagrange) *Consideremos el operador $\mathcal{L}$ y su* adjunto formal *(véase, por ejemplo, [4, pág. 170]) $\mathcal{L}^*$ definidos por*

$$\mathcal{L}(\phi) = \varrho C \frac{\partial \phi}{\partial t} - k(t)\Delta\phi \;\; y \;\; \mathcal{L}^*(\phi) = -\varrho C \frac{\partial \phi}{\partial t} - k(t)\Delta\phi$$

respectivamente. Entonces, para cada par de funciones $\phi, \psi \in X$, se verifica

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} \int_{B_R} \big(\mathcal{L}(\phi)\psi - \phi\mathcal{L}^*(\psi)\big)dxdt = \varrho C \int_{B_R} \big(\phi(x,t_\mathrm{f})\psi(x,t_\mathrm{f}) - \phi(x,0)\psi(x,0)\big)\,dx$$
$$- \int_0^{t_\mathrm{f}} k(t) \int_{\partial B_R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(x,t)\psi(x,t) - \phi(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}(x,t)\right) dxdt. \quad \square$$

Corolario 1.4 *Si $v \in X$ es la solución del problema* (2)*, entonces*

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} \int_{B_R} \mathcal{L}^*(w)\, v dxdt = h \int_0^{t_\mathrm{f}} \big(f(t) - \overline{v}(R,t) - T_0\big) \int_{\partial B_R} w(x,t)\, dxdt$$
$$- \int_0^{t_\mathrm{f}} k(t)\overline{v}(R,t) \int_{\partial B_R} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}}(x,t)\, dxdt,$$

para toda $w \in X$ que verifique la condición final

$$w(x,t_\mathrm{f}) = 0, \; x \in B_R. \quad \square \tag{3}$$

Con vistas a utilizar el Corolario 1.4 buscamos una función que verifique (3) y que, además, sea solución fundamental del operador $\mathcal{L}^*$, es decir, una función que al aplicarle el operador $\mathcal{L}^*$ dé como resultado una delta de Dirac (véase, por ejemplo, [5, pág. 178]). Fijados $y \in B_R$ y $\tau \in (0, t_\mathrm{f})$, definimos, la función $w : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$w(x,t;y,\tau) = \xi(x-y, K(t) - K(\tau)), \tag{4}$$

siendo

$$\xi(x,t) = \frac{H(t)}{4\pi t}\, e^{-\frac{\varrho C}{4} \frac{|x|^2}{t}}, \; H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \quad \text{y} \;\; K(s) = \int_s^{t_\mathrm{f}} k(z)dz,$$

donde la función k se ha extendido por continuidad, de forma constante, a todo $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5 (Solución fundamental del operador $\mathcal{L}^*$) *Para cada $\tau \in (0, t_\mathrm{f})$ e $y \in B_R$, la función $w : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en* (4) *verifica*

$$\mathcal{L}^*(w(x,t;y,\tau)) = \delta(x-y, t-\tau) \;\; en \;\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}). \quad \square$$

Veamos una representación de la solución en términos de sus valores en la frontera:

Proposición 1.6 *La solución del problema* (2) *puede expresarse como*

$$\begin{aligned} v(y,\tau) = {} & \frac{h}{4\pi} \int_0^\tau \frac{f(t) - \overline{v}(R,t) - T_0}{K(t) - K(\tau)} \int_{\partial B_R} e^{-\frac{\varrho C|x-y|^2}{4(K(t)-K(\tau))}}\, dxdt \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_0^\tau \frac{k(t)\overline{v}(R,t)}{K(t)-K(\tau)} \int_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(e^{-\frac{\varrho C|x-y|^2}{4(K(t)-K(\tau))}}\right) dxdt. \end{aligned} \tag{5}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que para todo $(y,\tau) \in B_R \times (0, t_f)$ la función w verifica la condición (3). Si w perteneciera al espacio X, la igualdad (5) se obtendría directamente sin más que aplicar el Corolario 1.4.

Se puede demostrar que, a pesar de que $w \notin X$, la igualdad (5) sigue siendo correcta. Para ello, basta elegir, para cada $0 < \varepsilon < \min\{\tau, t_f - \tau\}$ una función $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ verificando

$$\eta_\varepsilon(t;\tau) = \begin{cases} 0, & |t-\tau| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \in [0,1], & \dfrac{\varepsilon}{2} < |t-\tau| < \varepsilon \\ 1, & |t-\tau| \ge \varepsilon \end{cases}$$

y, a partir de ella, construir la función

$$w_\varepsilon(x,t) = \eta_\varepsilon(t;\tau) w(x,t).$$

Nótese que $w_\varepsilon \in X$ y verifica la condición (3). Así, el Corolario 1.4 asegura

$$\int_0^{t_f} \int_{B_R} \mathcal{L}^*(w_\varepsilon)\, v dx dt = h \int_0^{t_f} \big(f(t) - \overline{v}(R,t) - T_0\big) \int_{\partial B_R} w_\varepsilon(x,t)\, dx dt$$
$$- \int_0^{t_f} k(t) \overline{v}(R,t) \int_{\partial B_R} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \vec{n}}(x,t)\, dx dt.$$

Mediante argumentos de regularización y convergencia dominada, puede probarse que haciendo tender $\varepsilon \to 0$ en la igualdad anterior se obtiene el resultado deseado. $\square$

Corolario 1.7 *Denotando por* $m(t) = \overline{T}(R,t)$,

$$\gamma(r,\theta) = R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2, g(t,\tau) = \frac{1}{K(\tau) - K(t)} \ \text{ y } P(t,\tau) = e^{\frac{\alpha}{\varrho C}(p(t) - p(\tau))},$$

la solución del problema (1) *puede expresarse como*

$$\overline{T}(r,t) = T_0 P(t,0) + \frac{Rh}{4\pi} \int_0^t \big(T_{\mathrm{ref}}(\tau) - m(\tau)\big) P(t,\tau) g(t,\tau) \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma(r,\theta) g(t,\tau)}\, d\theta d\tau$$

$$+ \frac{R}{4\pi} \int_0^t \left(m'(\tau) - \frac{\alpha}{\varrho C} m(\tau) p'(\tau) \right) P(t,\tau) \int_0^{2\pi} \frac{2R - 2r\cos\theta}{\gamma(r,\theta)} e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma(r,\theta) g(t,\tau)}\, d\theta d\tau$$

para $r \in [0,R]$ *y* $t \in [0, t_f]$. $\square$

2. Unicidad de solución del problema inverso.

En esta sección abordaremos la unicidad de solución del problema inverso, entendiendo por ello que la función k está unívocamente determinada por los valores que tome la función $\overline{T}$ en R y en otro punto $r_0 \in [0,R)$. Para ello, con vistas a simplificar la exposición, trataremos en primer lugar el caso en que el coeficiente de conductividad térmica k es constante. Posteriormente, se extenderá la argumentación anterior al caso general.

2.1. k constante.

En el caso en que k es constante, la función g se expresa como $g(t,\tau) = \dfrac{1}{k(t-\tau)}$ y, gracias al Corolario 1.7, la solución del problema (1) viene dada por

$$\overline{T}(r,t) = T_0 P(t,0) + \frac{Rh}{4\pi}\int_0^t \frac{T_{\mathrm{ref}}(\tau) - m(\tau)}{t-\tau} P(t,\tau)\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\varrho C}{4k}\frac{\gamma(r,\theta)}{t-\tau}}}{k}\, d\theta d\tau$$

$$+ \frac{R}{4\pi}\int_0^t \left(m'(\tau) - \frac{\alpha}{\varrho C} m(\tau)p'(\tau)\right) P(t,\tau)\int_0^{2\pi} \frac{2R - 2r\cos\theta}{\gamma(r,\theta)} e^{-\frac{\varrho C}{4k}\frac{\gamma(r,\theta)}{t-\tau}}\, d\theta d\tau.$$

Supongamos que existen dos constantes k_1 y k_2, con $k_1 \geq k_2$, que proporcionan la misma medición $m(t)$ en el extremo derecho R y, además, una misma medición en algún otro punto $r_0 \in [0,R)$ y veamos que, de hecho, $k_1 = k_2$. Denotando por

$$\gamma_0(\theta) = \gamma(r_0,\theta) \ \text{ y } \ \psi_0(\theta) = \frac{2R - 2r_0\cos\theta}{\gamma_0(\theta)},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{Rh}{4\pi}\int_0^t \frac{T_{\mathrm{ref}}(\tau) - m(\tau)}{t-\tau} P(t,\tau)\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t-\tau}}}{k_1} - \frac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t-\tau}}}{k_2}\right) d\theta d\tau \\ & + \frac{R}{4\pi}\int_0^t \left(m'(\tau) - \frac{\alpha}{\varrho C} m(\tau)p'(\tau)\right) P(t,\tau)\int_0^{2\pi} \psi_0(\theta)\left(e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t-\tau}} - e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t-\tau}}\right) d\theta d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Lema 2.1 *Supongamos las hipótesis*

(H1) $T_{\mathrm{ref}}(t) \equiv T_0$ *para todo* $t \in [0, t_{\mathrm{f}}]$.

(H2) *La presión* $p(t)$ *es lineal y estrictamente creciente, es decir,* $p'(t) \equiv \beta > 0$, $t \in [0,t_{\mathrm{f}}]$.

Si $k \in \mathcal{C}([0,t_{\mathrm{f}}])$ *con* $k > 0$, *entonces:*

1) $T_{\mathrm{ref}}(\tau) - m(\tau) = T_0 - m(\tau) < 0$ *para todo* $\tau \in [0,t]$.

2) $m'(\tau) - \dfrac{\alpha}{\varrho C} m(\tau)p'(\tau) = m'(\tau) - \dfrac{\alpha\beta}{\varrho C} m(\tau) \leq 0$ *para todo* $\tau \in [0,t]$.

Demostración. Véase el Corolario 9.1 y 9.3 de [3, Pág. 156 y 157]. $\square$

Para el caso k constante las hipótesis **(H1)** y **(H2)** sirven también para concluir que:

a) Existe t^* tal que $\dfrac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}}}{k_1} - \dfrac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}}}{k_2} \geq 0$ para todo $\tau \in [0,t^*)$. En efecto, en primer lugar, destacamos que la función xe^{-cx} es estrictamente decreciente si $x > \frac{1}{c}$ para todo $c > 0$. En particular, para

$$c = \frac{\varrho C}{4}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^* - \tau} = \frac{\varrho C(R^2 - 2Rr_0\cos\theta + r_0^2)}{4(t^*-\tau)}, \tag{7}$$

el resultado se obtendrá si se toma t^* verificando

$$t^* < \frac{\varrho C(R - r_0)^2}{4k_1}.$$

b) $e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}} - e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}} \geq 0$ para todo $\tau \in [0, t^*)$. Esto es así debido a que la función e^{-cx} es estrictamente decreciente para $c > 0$ (en particular, para el c dado en (7)).

Particularizando la expresión (6) en $t = t^*$ se obtiene que

$$0 = \frac{Rh}{4\pi}\int_0^{t^*} \frac{T_{\mathrm{ref}}(\tau) - m(\tau)}{t^* - \tau}\, P(t^*, \tau) \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}}}{k_1} - \frac{e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}}}{k_2} \right) d\theta d\tau$$

$$+ \frac{R}{4\pi}\int_0^{t^*} \left(m'(\tau) - \frac{\alpha}{\varrho C}\, m(\tau)p'(\tau) \right) P(t^*, \tau) \int_0^{2\pi} \psi_0(\theta) \left(e^{-\frac{\varrho C}{4k_1}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}} - e^{-\frac{\varrho C}{4k_2}\frac{\gamma_0(\theta)}{t^*-\tau}} \right) d\theta d\tau.$$

El apartado 1) del Lema 2.1 y el apartado a) anterior determinan que el integrando del primer sumando es una función de τ no positiva; análogamente, el apartado 2) del Lema 2.1 y el apartado b) anterior, junto con la propiedad

$$\psi_0(\theta) = \frac{2R - 2r_0\cos\theta}{\gamma_0(\theta)} \geq \frac{2(R - r_0)}{(R + r_0)^2} > 0, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

hacen que el integrando del segundo sumando sea también una función de τ no positiva. Por tanto, cada integrando en dicha expresión debe ser la función idénticamente nula. Considerando el primer integrando, el apartado 1) del Lema 2.1 y el apartado a) anterior conducen a que $k_1 = k_2$.

Todo lo anterior queda recogido en el siguiente resultado:

Teorema 2.2 *Sean T_1 y T_2 las soluciones de los problemas*

$$\begin{cases} \varrho C\dfrac{\partial T}{\partial t} - k_i \Delta T = \alpha p'(t) T & \text{en } B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}) \\ k_i \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h\left(T_{ref}(t) - T\right) & \text{en } \partial B_R \times (0, t_{\mathrm{f}}) \\ T = T_0 & \text{en } B_R \times \{0\}, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$, donde k_1 y k_2 son dos constantes positivas. Supongamos **(H1)**, **(H2)** *y que para todo $t \in (0, t_{\mathrm{f}})$ se verifica*

$$\overline{T}_1(R, t) = \overline{T}_2(R, t) \ \text{ y } \ \overline{T}_1(r_0, t) = \overline{T}_2(r_0, t) \ \text{ para algún } r_0 \in [0, R).$$

Entonces $k_1 = k_2$. $\square$

2.2. k arbitraria.

Supongamos que existen funciones k_1 y k_2 que proporcionan la misma medición $m(t)$ en el extremo derecho R y, además, una misma medición en algún otro punto $r_0 \in [0, R)$. Suponiendo que $k_1 \not\equiv k_2$, existen $t_0 \in [0, T]$ y $t^* \in (t_0, T]$ tales que

$$\begin{cases} k_1(t) = k_2(t), & t \in [0, t_0] \\ k_1(t) > k_2(t), & t \in (t_0, t^*]. \end{cases}$$

Esto es cierto si las funciones anteriores "no son oscilatorias" del tipo $(t-t_0)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)$ y esto se tendrá si, por ejemplo, se pide que las derivadas de las funciones k_1 y k_2 tengan sus raíces aisladas.

Denotando por

$$K_i(t) = \int_t^{t_\mathrm{f}} k_i(s)ds \;\text{ y }\; x_i(\tau) = \frac{1}{K_i(\tau) - K_i(t^*)} = \frac{1}{\displaystyle\int_\tau^{t^*} k_i(s)ds},\; i = 1, 2,$$

y argumentando de manera análoga a como se hizo en la sección 2.1, se llega a que

$$0 = \frac{Rh}{4\pi}\int_0^{t^*} \big(T_\mathrm{ref}(\tau) - m(\tau)\big)\, P(t^*,\tau) \int_0^{2\pi}\Big(x_1(\tau)e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma_0(\theta)x_1(\tau)} - x_2(\tau)e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma_0(\theta)x_2(\tau)}\Big)\, d\theta d\tau$$

$$+ \frac{R}{4\pi}\int_0^{t^*}\bigg(m'(\tau) - \frac{\alpha}{\varrho C}\, m(\tau)p'(\tau)\bigg)P(t^*,\tau)\int_0^{2\pi}\psi_0(\theta)\,\Big(e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma_0(\theta)x_1(\tau)} - e^{-\frac{\varrho C}{4}\gamma_0(\theta)x_2(\tau)}\Big)\, d\theta d\tau.$$

Para poder llegar a hacer un razonamiento parecido al del caso k constante, veamos en primer lugar que $x_1(\tau) < x_2(\tau)$ si $0 < \tau < t^*$:

a) Si $\tau \in [0, t_0)$

$$\frac{1}{x_1(\tau)} = \int_\tau^{t^*} k_1(s)ds = \int_\tau^{t_0} k_1(s)ds + \int_{t_0}^{t^*} k_1(s)ds > \int_\tau^{t_0} k_2(s)ds + \int_{t_0}^{t^*} k_2(s)ds = \frac{1}{x_2(\tau)}.$$

b) Si $\tau \in [t_0, t^*]$

$$\frac{1}{x_1(\tau)} = \int_\tau^{t^*} k_1(s)ds > \int_\tau^{t^*} k_2(s)ds = \frac{1}{x_2(\tau)}.$$

Por otra parte, utilizando que la función xe^{-cx} estrictamente decreciente si $x \geq \dfrac{1}{c}$, para la elección de

$$c = \frac{\varrho C}{4}\gamma_0(\theta) = \frac{\varrho C(R^2 - 2Rr_0\cos\theta + r_0^2)}{4}, \tag{8}$$

se tiene que

$$x_1(\tau)e^{-cx_1(\tau)} - x_2(\tau)e^{-cx_2(\tau)} > 0$$

siempre que $x_1 \geq \dfrac{1}{c}$. Esta condición se cumple si, por ejemplo, se pide a la función k (y, por tanto, a las funciones k_1 y k_2 que queremos demostrar que son iguales) que verifique

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} k(s)ds \leq \frac{\varrho C(R - r_0)^2}{4} \leq c,$$

lo cual debe ser interpretado como parte de la información a priori que debe conocerse sobre k para poder determinarla de forma unívoca.

Puesto que la función $f(x) = e^{-cx}$ es decreciente para $c > 0$ la elección de c en (8) hace que se tenga

$$e^{-cx_1(\tau)} - e^{-cx_2(\tau)} > 0.$$

Suponiendo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, gracias al Lema 2.1 volvemos a encontrarnos con que la suma de dos integrales definidas de sendas funciones no positivas se anula. Puesto que el primer integrando es estrictamente negativo, llegamos a una contradicción, la cual proviene de suponer que hay puntos en $[0, t_f]$ en los que $k_1 \neq k_2$. Así pues, se tiene que $k_1 = k_2$ en $[0, t_f]$.

Estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.3 *Sean T_1 y T_2 las soluciones de los problemas*

$$\begin{cases} \varrho C \dfrac{\partial T}{\partial t} - k_i(t)\Delta T = \alpha p'(t) T & \text{en } B_R \times (0, t_f) \\ k_i(t) \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h\left(T_{ref}(t) - T\right) & \text{en } \partial B_R \times (0, t_f) \\ T = T_0 & \text{en } B_R \times \{0\}, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$, donde k_1 y k_2 son dos funciones continuas positivas en $[0, t_f]$. Supongamos **(H1)**, **(H2)** *y que para todo $t \in (0, t_f)$ se verifica*

$$\overline{T}_1(R, t) = \overline{T}_2(R, t) \;\text{ y }\; \overline{T}_1(r_0, t) = \overline{T}_2(r_0, t) \;\text{ para algún } r_0 \in [0, R).$$

Si las funciones k_i "no son oscilatorias" (según lo comentado anteriormente) y verifican

$$\int_0^{t_f} k_i(s)ds \leq \frac{\varrho C (R - r_0)^2}{4}, \; i = 1, 2, \tag{9}$$

entonces $k_1 = k_2$. □

Observación 2.4 Cuanto más separadas se hayan hecho las dos mediciones (i.e., cuanto más cercano a cero esté r_0) menos restrictiva será la condición (9) relativa a la información a priori sobre k y, por tanto, podremos garantizar la unicidad de solución del problema inverso para un conjunto más amplio de funciones. □

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto MTM2008-04621/MTM del Ministerio de Ciencia e Innovación (Plan Nacional de I+D+i 2008-2011) y del proyecto de Consolidación de Grupos de Investigación financiado por el Banco Santander y la Universidad Complutense de Madrid (Ref. 910480). Los autores agradecen al profesor Jesús Ildefonso Díaz sus útiles comentarios.

Referencias

[1] J.A. Infante, B. Ivorra, Á.M. Ramos y J.M. Rey. *On the Modelling and Simulation of High Pressure Processes and Inactivation of Enzymes in Food Engineering.* Aceptado para su publicación en Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS), ISSN: 0218-2025.

[2] L. Otero, Á.M. Ramos, C. de Elvira and P.D. Sanz. *A Model to Design High–Pressure Processes Towards an Uniform Temperature Distribution.* J. Food Eng., **78** (2007), 1463–1370, doi:10.1016/j.jfoodeng.2006.01.020.

[3] R. P. Sperb, *Maximum Principles and their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 157, Academic Press, 1981.

[4] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 1979.

[5] V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*, Mir, 1984.