

Curso Doctorado: Teoría de Bifurcación y Problemas Sobredeterminados

David Ruiz Aguilar

Julio 2025

1 Preliminares

Este curso es una introducción a la teoría de bifurcación con aplicaciones a distintas áreas. Comenzaremos enunciando algunos resultados clásicos que necesitaremos posteriormente.

Teorema 1.1 (Teorema de la función inversa). *Sean X, Y dos espacios de Banach y $\Omega \subset X$ abierto. Sea $F : \Omega \rightarrow Y$ de clase $\mathcal{C}^1$, $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in Y$ de manera que $F(x_0) = y_0$. Supongamos que $DF_{x_0} : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo. Entonces F es localmente invertible, es decir, existen abiertos $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $x_0 \in \tilde{\Omega}$, $V \subset Y$, $y_0 \in V$ tal que $F|_{\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \rightarrow V$ es invertible y $F^{-1} \in \mathcal{C}^1$.*

Ejercicio 1.2. *Demstrar los siguientes enunciados:*

- Si $\|DF_{x_0}(v)\| \geq c\|v\|$, $c > 0$, entonces F es localmente inyectiva.
- Supongamos que DF_{x_0} es sobreyectiva y $\ker(DF_{x_0})$ tiene complemento topológico, es decir,

$$X = \ker(DF_{x_0}) \oplus W,$$

donde W es un cerrado. Entonces F es localmente sobreyectiva.

Veamos el siguiente ejemplo donde podemos aplicar el teorema anterior.

Ejemplo 1.3. Prescripción de curvatura media. *Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$. Denotamos por $G(u) \subset \mathbb{R}^3$ al grafo asociado a dicha función. Asimismo, sea $H(\cdot)$ la función curvatura media de $G(u)$.*

Pregunta: *Dada una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ¿existe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ tal que $H(G(u)) = h$?*

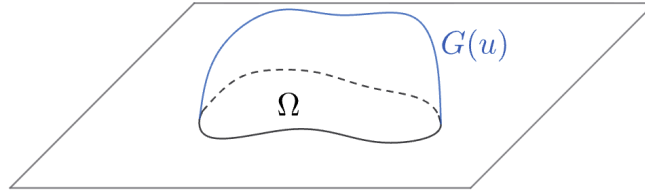


Figure 1: Grafo asociado a u .

Tratemos esta cuestión. Dada una hipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^{N+1}$, denotamos por $\eta : S \rightarrow \mathbb{S}^N$ el vector normal unitario de la superficie. Extendemos η a un abierto que contenga a S . La curvatura media puede expresarse como

$$H(p) = -\frac{1}{N-1} \operatorname{div}(\eta) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \quad (1)$$

donde hemos usado que $\eta = \frac{(\nabla u, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$.

Si lo escribimos en coordenadas, obtenemos

$$H(u) = -\frac{1}{2} \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} = h. \quad (2)$$

Notemos que si $u = 0$, entonces $H(u) = 0$.

Definamos los espacios de Banach en los que vamos a trabajar. Sea

$$\begin{aligned} X &= \{u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \\ Y &= \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega), \quad \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

Luego $H : X \rightarrow Y$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Calculamos su diferencial en $u = 0$:

$$DH_0(v) = -\frac{1}{2} \frac{(v_{xx} + v_{yy} - 0 \cdot 1) - 0}{1} = -\frac{1}{2} \Delta v.$$

El operador $-\frac{1}{2} \Delta : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo por la existencia y unicidad de soluciones al problema de Poisson, es decir, dada $f \in Y$ existe una única $v \in X$ tal que $-\frac{1}{2} \Delta v = f$.

Por el teorema de la función inversa, deducimos la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que para toda función $h \in Y$ con $\|h\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} < \varepsilon$ existe $u \in X$ tal que la curvatura media asociada al grafo $G(u)$ satisface $H(u) = h$. Además, u es única en un entorno de $0 \in X$.

Observación 1.4. *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, es posible demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) > C$, la ecuación de curvatura media prescrita*

$$H(u(x)) = h(x) \quad (3)$$

no tiene solución. Más específicamente, consideremos $x_0 \in \Omega$ y tomemos $r > 0$ tal que la bola $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^2$ de radio r centrada en x_0 esté contenida en Ω , y tomemos cualquier $h(x)$ tal que $h(x) > \frac{1}{r}$.

Supongamos por reducción al absurdo que existe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ resolviendo (3). Para cada $z \in \mathbb{R}$, sea $\mathbb{S}^2(z)$ la esfera de radio r centrada en el punto $(x_0, z) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$z_0 < \min_{x \in \Omega} u(x) - r.$$

Esta condición implica que la esfera $\mathbb{S}^2(z_0)$ y la superficie $G(u)$ son conjuntos disjuntos. Más aún, $\mathbb{S}^2(z_0)$ se encuentra por debajo de $G(u)$; ver Figura 2. Por compacidad de la esfera y el grafo $G(u)$, debe existir un primer valor $z_1 \in (z_0, \infty)$ tal que la esfera $\mathbb{S}^2(z_1)$ y $G(u)$ se intersecan. Por ser z_1 el primer valor para el que se cumple esta propiedad, las superficies $\mathbb{S}^2(z_1)$ y $G(u)$ deben ser tangentes a lo largo de su intersección, y además $\mathbb{S}^2(z_1)$ se encuentra por debajo de $G(u)$. En particular, $G(u)$ y $\mathbb{S}^2(z_1)$ tienen un contacto propio. Llegamos a una contradicción por el principio del máximo geométrico, pues la curvatura media de $\mathbb{S}^2(z_1)$ es $\frac{1}{r}$, mientras que la de $G(u)$ satisface $H(u) = h > \frac{1}{r}$.

Teorema 1.5. [Teorema de la función implícita.] *Sean Λ, X, Y espacios de Banach y $V \subset \Lambda$, $\Omega \subset X$ abiertos. Sea $F : V \times \Omega \rightarrow Y$ de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que $F(\lambda_0, x_0) = 0$. Supongamos $X \ni u \mapsto \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda_0, x_0) \in Y$ es un isomorfismo. Entonces, existen abiertos $\tilde{V} \subset V$, $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\lambda_0 \in \tilde{V}$, $x_0 \in \tilde{\Omega}$ y $\alpha : \tilde{V} \rightarrow \tilde{\Omega}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $F(\lambda, u) = 0$ con $\lambda \in \tilde{V}$, $u \in \tilde{\Omega}$ si y solo si $u = \alpha(\lambda)$.*

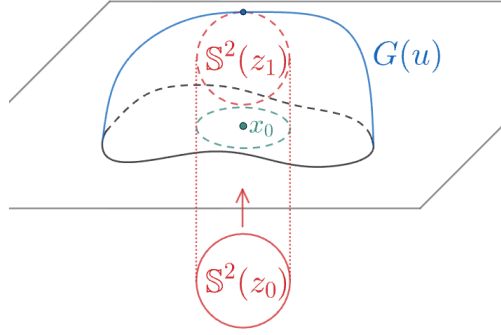
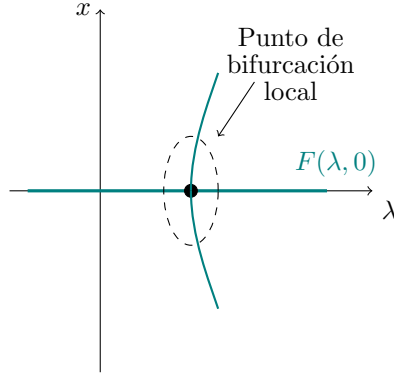


Figure 2: Contacto propio entre $G(u)$ y $\mathbb{S}^2$.

2 Introducción a la bifurcación



Sea $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ una función de clase C^1 tal que $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

A continuación, nos planteamos la pregunta de si existe $u \neq 0$ tal que $F(\lambda, u) = 0$.

Definición 2.1. Sea $S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : F(\lambda, u) = 0, u \neq 0\}$. Decimos que $\lambda^* \in \mathbb{R}$ es UN PUNTO DE BIFURCACIÓN (LOCAL) si $(\lambda^*, 0) \in \bar{S}$.

El siguiente resultado es un corolario del teorema de la función implícita:

Lema 2.2. Si λ^* es un punto de bifurcación local, entonces $u \mapsto \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda^*, 0)$ no es un isomorfismo de X a Y . Esto es, el operador $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda^*, 0)$ es degenerado.

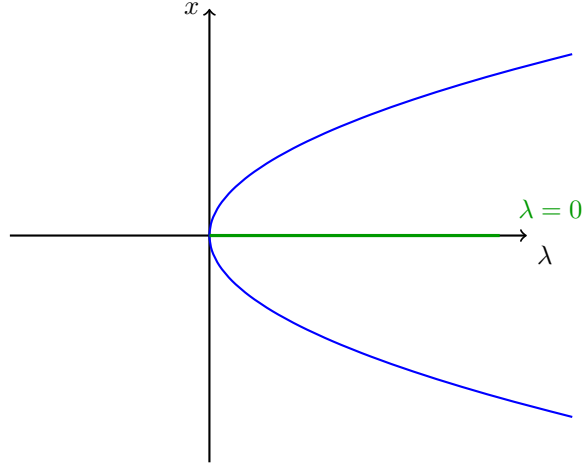
Ejemplo 2.3. 1. Consideramos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(\lambda, x) = \lambda x - x^3 \in C^\infty$. Es fácil ver que $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Estudiamos el diferencial para ver si hay un punto de bifurcación local. Como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) = \lambda,$$

tenemos que $\lambda = 0$ es un punto de degeneración del diferencial. Veamos ahora si es un punto de bifurcación.

$$\lambda x - x^3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \lambda = x^2, \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto $\lambda = 0$ es un punto de bifurcación.



2. Consideramos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $F(\lambda, x, y) = (\lambda x + y^3, \lambda y - x^3)$. Tenemos que $F(\lambda, 0, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. El diferencial a estudiar es

$$\frac{\partial F}{\partial(x, y)}(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4)$$

El punto de degeneración es $\lambda = 0$. Veamos si es un punto de bifurcación.

$$F(\lambda, x, y) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda x &= -y^3 \\ \lambda y &= x^3 \end{cases}, \longrightarrow \begin{cases} \lambda x^4 &= -y^3 x^3 \\ \lambda y^4 &= x^3 y^3 \end{cases}.$$

Sumando ambas ecuaciones llegamos a $\lambda(x^4 + y^4) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = 0$ por definición de $F(\lambda, x, y)$. Si $\lambda \neq 0$ entonces necesariamente $x = y = 0$. Es decir, el funcional solo se anula con la solución trivial y por tanto no hay bifurcación. Este ejemplo demuestra que el recíproco del Lema 2.2 no se satisface en general.

Definición 2.4. Sea $L : X \rightarrow Y$ un operador lineal y continuo. Decimos que L es un OPERADOR DE FREDHOLM si

- $\ker L$ tiene dimensión finita, $\dim(\ker L) < \infty$.
- La imagen $R(L)$ tiene codimensión finita.

Se define el índice de L como

$$\text{ind}(L) = \dim(\ker L) - \text{codim}(R(L))$$

Observación 2.5. Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si L es Fredholm, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal y continuo con $\|T - L\| < \varepsilon$ entonces T es Fredholm y $\text{ind } T = \text{ind } L$.
- Como $\dim(\ker L) < \infty$ entonces $\ker L$ tiene complemento topológico, es decir

$$X = \ker L \oplus W,$$

donde W es un cerrado. Luego $u \in X$ puede escribirse como $u = v + w$ con $v \in \ker L$ y $w \in W$.

- Ejercicio:** Si L es un operador de Fredholm, $R(L)$ es cerrado. Por tanto, tiene complemento topológico.
- Sea $X = Y$ y supongamos que $K : X \rightarrow X$ es compacto, es decir, lleva acotados en precompactos. Entonces $\text{Id} - K$ es un operador de Fredholm de índice 0.

A continuación, enunciaremos un teorema que nos permita garantizar la existencia de bifurcaciones locales bajo ciertas hipótesis.

Hipótesis 1: La aplicación $L : u \mapsto \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda^*, 0)$ es un operador de Fredholm (no isomorfismo). Podemos escribir

$$X = V \oplus W$$

$$Y = Z \oplus R$$

donde $V = \ker L$ y $R = \text{R}(L)$, por tanto $\dim V, \dim Z < \infty$. Recordemos que las proyecciones

$$\begin{aligned} P : Y &\rightarrow Z, & P(z + r) &= z, \\ Q : Y &\rightarrow R, & Q(z + r) &= r, \end{aligned}$$

son lineales y continuas. Por tanto, escribiendo $u = v + w$ con $v \in V$ y $w \in W$,

$$F(\lambda, u) = 0 \iff F(\lambda, v + w) = 0 \iff \begin{cases} PF(\lambda, v + w) = 0, \\ QF(\lambda, v + w) = 0. \end{cases}$$

La anterior formulación se denomina reducción de Lyapunov-Schmidt.

Proposición 2.6. *Existe $I \subset \mathbb{R}$, $\tilde{V}$ abierto en V , $\lambda^* \in I$, $0 \in \tilde{V}$ y una aplicación $\alpha : I \times \tilde{V} \rightarrow W$, de clase $\mathcal{C}^1$ con $QF(\lambda, v + \alpha(\lambda, v)) = 0$. Además, $\alpha(\lambda, v)$ es único en un entorno de $0 \in W$. Se tiene también que*

1. $\alpha(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in I$,
2. $\frac{\partial \alpha}{\partial v}(\lambda^*, 0) = 0$ para todo $v \in V$.

Proof. Definimos $H : \mathbb{R} \times V \times W \rightarrow R$ como $H(\lambda, v, w) = QF(\lambda, v + w)$. Notemos que

$$\frac{\partial H}{\partial w}(\lambda^*, 0, 0) = Q(L(w)) = L(w).$$

Veamos que $L : W \rightarrow R$ es un isomorfismo:

- Si $L(w) = 0$, entonces $w \in V \cap W$, con lo cual $w = 0$. Esto implica que L es inyectiva.
- Dado $r \in R$, sabemos que existe $u \in X$ tal que $L(u) = r$. Escribimos $u = v + w$, obteniendo

$$r = L(u) = L(v + w) = L(v) + L(w) = L(w),$$

Luego $L : W \rightarrow R$ también es sobreyectiva.

Usando el teorema de la aplicación abierta, se deduce que L es un isomorfismo. Por el teorema de la función implícita (Teorema 1.5), existe $\alpha : I \times \tilde{V} \rightarrow W$ tal que $QF(\lambda, v + \alpha(\lambda, v)) = 0$. Por tanto

1. Tenemos que $QF(\lambda, 0) = 0$ y $QF(\lambda, \alpha(\lambda, 0)) = 0$ luego $\alpha(\lambda, 0) = 0$ por la unicidad local.
2. Derivando respecto de $\hat{v} \in V$ y evaluando en λ^* ,

$$0 = \frac{d}{d\hat{v}} QF(\lambda^*, v + \alpha(\lambda, v)) = Q \left(L \left(\hat{v} + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{v}}(\lambda^*, 0) \right) \right) = Q \left(L \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \hat{v}}(\lambda^*, 0) \right) \right).$$

Por definición de Q , deducimos que

$$L \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \hat{v}}(\lambda^*, 0) \right) = 0,$$

con lo cual $\frac{\partial \alpha}{\partial \hat{v}}(\lambda^*, 0) \in V$. Como este elemento también pertenece a W , deducimos que $\frac{\partial \alpha}{\partial \hat{v}}(\lambda^*, 0) = 0$. □

A continuación, buscamos resolver la ecuación $PF(\lambda, v + \alpha(\lambda, v)) = 0$.

Teorema 2.7. [Teorema de Crandall-Rabinowitz (1983)] *Supongamos además que*

1. $V = \ker L = \langle \bar{v} \rangle$, $Z = \langle \bar{z} \rangle$, esto es, dichos espacios son 1-dimensionales.
2. $F \in \mathcal{C}^2$.
3. $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) \notin R(L)$ (Condición de transversalidad).

Entonces existe

$$\begin{aligned} \lambda &: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I \\ t &\mapsto \lambda(t), \end{aligned}$$

de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $PF(\lambda(t), t\bar{v} + \alpha(\lambda(t), t\bar{v})) = 0$. En consecuencia, $(\lambda(t), t\bar{v} + \alpha(\lambda(t), t\bar{v}))$ es solución de $F(\lambda, u) = 0$ con $\lambda(0) = \lambda^*$.

Observación 2.8.

- La curva de soluciones está parametrizada en $\bar{v}$. Como $\alpha(\lambda^*, 0) = 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) = 0$, entonces $\alpha(\lambda(t), t\bar{v}) = o(t)$.
- En el teorema anterior, basta que exista la derivada cruzada y sea continua.

Prueba del Teorema 2.7. Definimos

$$\begin{aligned} \beta &: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto z \\ (\lambda, t) &\mapsto PF(\lambda, t\bar{v} + \alpha(\lambda, t\bar{v})) \end{aligned}$$

Notemos que:

- I. $\beta(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in I$.
- II. $\frac{\partial \beta}{\partial t}(\lambda^*, 0) = 0$. En efecto, tenemos que

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}(\lambda^*, 0) = P \left(DF_{(\lambda^*, 0)}(0, \bar{v} + \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{v}}(\lambda, 0)) \right).$$

Ahora bien, como $\bar{v} \in \ker L$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) = 0$, deducimos que $\frac{\partial \beta}{\partial t}(\lambda^*, 0) = 0$.

- III. $\frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda \partial t}(\lambda^*, 0) = P \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{v} \partial \lambda}(\lambda^*, \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{v}}(\lambda^*, 0)) + L(\dots) \right) = P(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{v} \partial \lambda}(\lambda^*, 0)) \neq 0$,

Por la condición de transversalidad.

Definimos ahora

$$\begin{aligned} h &: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Z; \\ h(\lambda, t) &= \begin{cases} \frac{\beta(\lambda, t)}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial t}(\lambda, 0), & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Es posible comprobar que esta función es diferenciable. Además, de su definición se deduce que

$$\begin{aligned} h(\lambda^*, 0) &= \frac{\partial \beta}{\partial t}(\lambda^*, 0) = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda^*, 0) &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda \partial t}(\lambda^*, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de la función implícita deducimos que existe $\lambda(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $h(\lambda(t), t) = 0$ para todo t , esto es, $\beta(\lambda(t), t) = 0$. $\square$

Consideremos a continuación un caso particular. Sea $L : X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm de índice 0, $\ker(L) = \langle \bar{v} \rangle$. Supongamos además que se tiene la inyección $X \xhookrightarrow{\iota} Y$ y consideremos la descomposición $X = \langle \bar{v} \rangle \oplus W$. Si v no pertenece a $R(L)$, entonces podemos escribir $Y = \langle \bar{v} \rangle \oplus R$, siendo $W = R \cap X$.

Proposición 2.9. *Consideremos una aplicación $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ de clase C^1 , $\lambda \mapsto T_\lambda : X \rightarrow Y$. Supongamos que se dan las condiciones del párrafo anterior para un cierto $T_{\lambda^*} = L$. Entonces, existen $\mu(\lambda), w(\lambda)$ de clase C^1 tal que:*

$$\begin{aligned}\mu &: (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ w &: (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon) \rightarrow W\end{aligned}$$

y $\ker(T_\lambda - \mu(\lambda)Id) = \langle \bar{v} + w(\lambda) \rangle$, con $\mu(\lambda^*) = 0$, $w(\lambda^*) = 0$.

Proof. Se deja como ejercicio. Consiste en aplicar el teorema de la función implícita a la función $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W \rightarrow Y$ dada por $H(\lambda, \mu, w) = T_\lambda(\bar{v} + w) - \mu(\bar{v} + w)$. $\square$

Observación 2.10. *Supongamos que tenemos una función $F(\lambda, u)$ tal que la aplicación $\lambda \rightarrow T_\lambda := \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, 0)$ está en las condiciones de la proposición anterior. Como $T_\lambda(\bar{v} + w(\lambda)) = \mu(\lambda)(\bar{v} + w(\lambda))$, derivando en $\lambda = \lambda^*$ deducimos que:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) + L(w'(\lambda^*)) &= \mu'(\lambda^*)\bar{v} + 0. \\ \implies \frac{\partial F}{\partial \lambda \partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) &= \mu'(\lambda^*)\bar{v} - L(w'(\lambda^*)).\end{aligned}$$

Donde recordamos que $\bar{v} \notin R$ y $L(w'(\lambda^*)) \in R$. Por tanto, tendremos que $\frac{\partial F}{\partial \lambda \partial \bar{v}}(\lambda^*, 0) \notin R$ si y solo si $\mu'(\lambda^*) \neq 0$. De esta manera, podemos relacionar la condición de transversalidad en el teorema de Crandall-Rabinowitz (ver Teorema 2.7) con las derivadas no nulas de los autovalores de $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, 0)$.

Observación 2.11. *Notamos que, en el teorema de Crandall-Rabinowitz, la condición de que el núcleo sea 1-dimensional es necesaria incluso si se tiene $\mu'(\lambda^*) \neq 0$; consultar el caso de no bifurcación en el Ejemplo 2.3 y (4).*

3 Aplicaciones del teorema de Crandall-Rabinowitz

En esta sección trataremos dos resultados de bifurcación que pueden ser obtenidos aplicando el teorema de Crandall-Rabinowitz. El primero de ellos pertenece a la teoría de superficies de curvatura media prescrita, mientras que el segundo procede del problema de water waves en teoría de fluidos.

3.1 Problema de curvatura media prescrita

Sea $H(u)$ la curvatura media de un grafo asociado a una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y consideremos la ecuación

$$H(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = 0$. Definimos los espacios

$$X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \quad Y = C^{0,\alpha}(\Omega),$$

y el operador

$$F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y, \quad F(\lambda, u) = H(u) - \lambda u.$$

Notemos que $F(\lambda, 0) = 0$ para todo λ . La derivada de F para $u = 0$ es

$$L(v) = \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, 0)[v] = -\frac{1}{2}\Delta v - \lambda v.$$

Este operador es degenerado si existe $v \neq 0$ tal que $-\Delta v = 2\lambda v$, es decir, cuando 2λ es un autovalor de $(-\Delta)$. Denotemos por λ_n , $n \in \mathbb{N}$, los autovalores asociados a este operador, de forma que $L(v)$ será degenerado

para todo $\lambda = \frac{\lambda_n}{2}$. Si λ_n es simple, entonces $\ker(L)$ es unidimensional, generado por una autofunción ϕ_n que satisface

$$\begin{cases} -\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n & \text{en } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Además, la imagen $R(L)$ del operador L viene dada por

$$R(L) = \left\{ f \in Y : \int_{\Omega} f(x) \phi_n(x) dx = 0 \right\}.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \phi_n}(\lambda, 0) = -\phi_n \notin R(L).$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Crandall-Rabinowitz, y existe una bifurcación en $\lambda = \frac{\lambda_n}{2}$.

3.2 Water waves

Consideremos la ecuación de Euler en dos dimensiones para un dominio $\Omega(t)$ dependiente del tiempo:

$$\begin{cases} q_t + (q \cdot \nabla)q + \nabla p + g e_2 = 0, \\ \nabla \cdot q = 0, \end{cases}$$

donde g es la constante de gravedad, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $q(x, t)$ es el campo de velocidades y $p(x, t)$ la presión. Vamos a suponer además que $q(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x_2 \rightarrow -\infty$.

Vamos a buscar una familia de ondas viajeras para este problema. Estas pueden ser modelizadas mediante

$$\Omega(t) = \Omega + t e_1, \quad q(x, t) = Q(x_1 - t, x_2) + e_1, \quad p(x, t) = P(x_1 - t, x_2).$$

Las funciones P y Q satisfacen el sistema estacionario:

$$\begin{cases} (Q \cdot \nabla)Q + \nabla P + g e_2 = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \nabla \cdot Q = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ Q(x_1, x_2) \rightarrow (-1, 0), & \text{cuando } x_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5)$$

mientras que $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < \beta(x_1)\}$.

Este problema cuenta con las siguientes **condiciones en la frontera $\partial\Omega$** :

- $Q \cdot \eta = 0$, en $\partial\Omega$, donde η denota el vector normal a $\partial\Omega$;
- $\partial\Omega$ es una línea de corriente.

Notemos que, por el principio de Bernoulli, $B := \frac{1}{2}|Q|^2 + p + g x_2$ es constante en las líneas de corriente.

Ejercicio 3.1. Si $\nabla B \cdot Q = 0$ y p es constante en $\partial\Omega$ entonces $\frac{1}{2}|Q|^2 + g x_2 = c$ en $\partial\Omega$.

Sea $Q := (u, v)$. Dado que $\nabla \cdot Q = 0$, existe una función de corriente ψ tal que

$$\nabla\psi = Q^\perp = (-v, u).$$

Es posible comprobar que ψ es constante a lo largo de $\partial\Omega$. Como ψ está definida salvo constante, podemos asumir que $\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Consideremos la vorticidad $\omega = \partial_{x_1}v - \partial_{x_2}u = -\Delta\psi$. Tomando el rotacional en la primera ecuación de (5), la EDP se reduce a $\nabla\omega \cdot Q = 0$.

A continuación, vamos a suponer que la frontera de Ω es h -periódica en la dirección horizontal y vamos a buscar soluciones h -periódicas e irrotacionales ($\omega = 0$) a (5). En base a la discusión anterior, el problema se reduce a buscar una función de corriente ψ h -periódica tal que:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \psi = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \\ \nabla\psi \rightarrow (0, -1), & x_2 \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + gx_2 = c, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

El problema admite una solución trivial, dada por $\psi(x_1, x_2) = -x_2$, $\Omega \equiv \{x_2 < 0\}$. Queremos bifurcar esta solución en función del período h . En primer lugar, notemos que dado $\lambda > 0$ y una solución h -periódica $\psi(x_1, x_2)$ de (6), la dilatación

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda x),$$

es $\frac{h}{\lambda}$ -periódica y resuelve (6) para el dominio $\Omega_\lambda = \frac{1}{\lambda}\Omega$. Tomando $\lambda := \frac{h}{2\pi}$, el problema a tratar consiste en buscar funciones $\bar{\psi}$ 2π -periódicas tal que:

$$\begin{cases} \Delta\bar{\psi} = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega_\lambda, \\ \bar{\psi} = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_\lambda, \\ \nabla\bar{\psi} \rightarrow (0, -1), & x_2 \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2}|\nabla\bar{\psi}|^2 + g\lambda x_2 = c, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_\lambda \end{cases} \quad (7)$$

Por simplicidad, a partir de ahora denotaremos $\bar{\psi} \equiv \psi$ y $\Omega_\lambda \equiv \Omega = \{x_2 < \beta(x_1)\}$ de nuevo.

Observación 3.2. *Toda solución ψ de (7) satisface las siguientes condiciones:*

- $\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \psi(x_1, x_2) = +\infty$. Esto se deduce de la condición de fondo sobre $\nabla\psi$. En particular, como $\psi = 0$ en $\partial\Omega$ y ψ es armónica, deducimos que $\psi > 0$.
- Existe φ armónica conjugada tal que $f = \varphi + i\psi$ es holomorfa. La función φ se corresponde con el potencial de la velocidad. Así,

$$f'(z) = u - iv, \quad \nabla\varphi = (u, v), \quad \nabla\psi = (-v, u).$$

- Para la solución trivial $\psi = -x_2$, tenemos que $f_0(z) = -z$. En particular, considerando Ω como subconjunto del plano complejo, i.e., $\Omega = \{z : \text{Im}(z) < 0\}$, tenemos que $f_0(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^+$ define un difeomorfismo entre Ω y el semiplano complejo superior $\mathbb{H}^+$.

Como consecuencia de la última propiedad, si tenemos una bifurcación local de $f_0(z) = -z$, todas aquellas soluciones $f(z)$ suficientemente cercanas a $f_0(z)$ también definirán difeomorfismos entre un cierto dominio Ω y $\mathbb{H}^+$. Dada una función holomorfa 2π -periódica $f(z)$ asociada a una solución de (7), sea ϕ^{-1} su inversa, y definamos

$$w := f' \circ \phi = u \circ \phi - iv \circ \phi =: \tilde{u} - i\tilde{v}.$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $f(z + 2\pi) - f(z) = -2\pi$ para todo $z \in \Omega$. En efecto, tenemos que la cantidad $\gamma(z) := f(z + 2\pi) - f(z)$ debe ser una función holomorfa que solo depende de $\text{Im}(z)$, por la periodicidad de $f(z)$. En consecuencia, $\gamma(z) \equiv \gamma$ debe ser constante. Tomando límite $x_2 \rightarrow -\infty$,

$$\gamma = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} f(z + 2\pi) - f(z) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \int_{[z, z+2\pi]} f'(z) dz = -2\pi,$$

pues $f'(z)$ converge a -1 .

2. $\phi(\xi + 2\pi) - \phi(\xi) = -2\pi$ para todo $\xi \in \mathbb{H}^+$. En efecto, dado un cierto ξ , sea $z := \phi(\xi)$. Aplicando ϕ en la igualdad del ítem anterior, obtenemos que:

$$\phi(\xi + 2\pi) = \phi(f(z) + 2\pi) = \phi(f(z - 2\pi)) = z - 2\pi = \phi(\xi) - 2\pi,$$

como queríamos probar.

3. La función $w(\xi)$ es 2π -periódica. En efecto, es fácil comprobar que $w(\xi) = \frac{1}{\varphi'(\xi)}$, y del apartado anterior se puede deducir que $\varphi'(\xi)$ una función 2π -periódica.

En lo que sigue, denotemos $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. En base a la discusión anterior, el problema (7) se reduce a buscar funciones $w : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódicas y holomorfas, $w = \tilde{u} - i\tilde{v}$, tales que:

1. $w(\varphi + i\psi) \rightarrow -1$ cuando $\psi \rightarrow \infty$.
2. $w \sim -1$.
3. $\frac{1}{2}|w|^2 + g\lambda\phi_2 = c$ en $\{\psi = 0\}$.

Derivando la igualdad $\frac{1}{2}|w|^2 + g\lambda\phi_2 = c$ con respecto de φ en $\psi = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial |w|^2}{\partial \varphi} + g\lambda \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (8)$$

Por otra parte, se tiene

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} + i \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} = \phi'(\zeta) = \frac{1}{w(\xi)} = \frac{1}{\tilde{u} - i\tilde{v}} = \frac{\tilde{u} + i\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} = \frac{\tilde{u} + i\tilde{v}}{|w|^2},$$

de donde deducimos

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} = \frac{\tilde{v}}{|w|^2}.$$

Sustituyendo esta cantidad en (8) y multiplicando la igualdad por $|w|^2$, nos queda

$$|w|^2 \frac{1}{2} \frac{\partial |w|^2}{\partial \varphi} + g\lambda \tilde{v} = 0.$$

Integramos la expresión obtenida en φ :

$$\frac{1}{4}|w|^4 + g\lambda\Pi(\tilde{v}) = 0,$$

para una cierta primitiva $\Pi(\tilde{v})$ de $\tilde{v}$ respecto de φ . A continuación, escribimos todo respecto de $\tilde{u}|_{\psi=0}$ haciendo un desarrollo mediante series de Fourier:

$$\tilde{u}|_{\psi=0} = a_0 + \sum_k a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi).$$

Por la armonicidad de $\tilde{u}$,

$$\tilde{u}(\varphi, \psi) = a_0 + \sum_k e^{-k\psi} [a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)].$$

Como $\tilde{u} - i\tilde{v}$ es holomorfa, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos obtener la expresión de $\tilde{v}$:

$$\tilde{v}(\varphi, \psi) = c_0 + \sum_k e^{-k\psi} [b_k \cos(k\varphi) - a_k \sin(k\varphi)].$$

Como $w \rightarrow -1$ cuando $\psi \rightarrow +\infty$, deducimos que $a_0 = -1$, $c_0 = 0$.

A continuación, definimos el espacio

$$X_j := \{u_0 \in H^j(\mathbb{R}), 2\pi \text{ periódicas}, [u_0] = 0\}, \quad (9)$$

donde $[f] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ y $H^j(\mathbb{R})$ denota el espacio de Sobolev $W^{j,2}$, $j \geq 1$. Tomemos una cierta $u_0 \in X_j$, que podemos expresar en series de Fourier como

$$u_0 = \sum_k a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi), \quad \sum_k (a_k^2 + b_k^2) k^{2j} < \infty,$$

como $j \geq 1$, u_0 es continua y está acotada.

Podemos escribir las funciones $\tilde{u}|_{\psi=0}$, $\tilde{v}|_{\psi=0}$ en función de una cierta $u_0 \in X_j$ como

$$\tilde{u}|_{\psi=0} = -1 + u_0, \quad \tilde{v}|_{\psi=0} = \sum_k b_k \cos(k\varphi) - a_k \sin(k\varphi) = K[u_0],$$

donde $K : X_j \rightarrow X_j$ es una isometría. Además, como al integrar ganamos un grado de regularidad, tenemos

$$\Pi : X_j \rightarrow X_{j+1}.$$

$$\Pi(K(u_0)) = \sum_k \frac{a_k}{k} \cos(k\varphi) + \frac{b_k}{k} \sin(k\varphi).$$

Definimos también

$$G(u_0) := \frac{1}{4} |w|^4 = \frac{1}{4} [(-1 + u_0)^2 + K[u_0]^2],$$

así como el operador

$$F : \mathbb{R} \times X_j \rightarrow X_j, \quad F(\lambda, u_0) = G(u_0) - [G(u_0)] + g\lambda \Pi(K(u_0)), \quad F(\lambda, 0) = 0.$$

Notemos que F está bien definido, pues $G(u_0)$ pertenece a H^j y $\Pi(K(u_0))$ a $H^{j+1} \subset H^j$. Vamos a calcular la derivada del funcional para buscar puntos de degeneración, con el fin de aplicar Crandall-Rabinowitz posteriormente. Sea $\hat{u} \in X_j$. Como $[\hat{u}] = 0$, se puede demostrar que

$$DF_{(\lambda,0)}(0, \hat{u}) = -\hat{u} + g\lambda \Pi K(\hat{u}) = (-\text{Id} + g\lambda \Pi \circ K) \hat{u}.$$

Este operador puede ser visto como la diferencia de un operador compacto, esto es, $\Pi \circ K$, con la identidad. Por tanto, es un operador de Fredholm con índice 0. Estudiemos su núcleo. Supongamos que $\hat{u} \in \ker(DF_{(\lambda,0)})$. Usando que

$$\hat{u} = \sum_k a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi), \quad (10)$$

obtenemos

$$0 = -\sum_k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) + g\lambda \sum_k \frac{a_k}{k} \cos(k\varphi) + \frac{b_k}{k} \sin(k\varphi).$$

Entonces,

$$\begin{cases} -a_n + g\lambda \frac{a_n}{n} = 0, \\ -b_n + g\lambda \frac{b_n}{n} = 0. \end{cases}$$

Si λ no puede expresarse como $\frac{n}{g}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces necesariamente $\hat{u} = 0$. En caso contrario, el núcleo es no trivial, y está generado por los elementos $\{\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)\}$. Observamos que el núcleo es 2-dimensional. No obstante, esto se debe a que si $\hat{u}(\varphi)$ pertenece al núcleo, entonces cualquier traslación $\hat{u}(\varphi + c)$, $c \in \mathbb{R}$, también pertenece trivialmente al núcleo de $DF_{(\lambda,0)}$. Por esta razón, hay que reescribir el

problema una vez más de manera que el núcleo pase a ser 1-dimensional. Redefinimos el espacio para que no podamos realizar traslaciones:

$$\tilde{X}_j = \{u \in X_j, u \text{ par}\}.$$

Considerando $F : \mathbb{R} \times \tilde{X}_j \rightarrow \tilde{X}_j$, $F(\lambda, 0)$ definida como antes y repitiendo el razonamiento anterior, se llega a

$$\ker(DF_{(\lambda_n, 0)}) = \langle \cos(n\varphi) \rangle.$$

Al ser el operador de índice 0 y la codimensión del rango igual 1, tenemos que los valores $(\frac{n}{g}, 0)$ son candidatos a punto de bifurcación. Debemos comprobar si se verifica la condición de transversalidad. Para esto, fijamos

$$\lambda_n = \frac{n}{g}, \quad u_n = \cos(n\cdot).$$

Luego tenemos

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n} (DF_{(\lambda, 0)}(0, u_n)) = g\Pi(K(u_n)) = g\frac{u_n}{n}.$$

Por tanto, hay que comprobar que $u_n \notin R(DF_{(\lambda, 0)})$ para aplicar Crandall-Rabinowitz. Tomamos $\hat{u} \in \tilde{X}_j$ cualquiera de la forma (10) y estudiamos

$$DF_{(\lambda_n, 0)}(0, \hat{u}) = - \sum_k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) + g\lambda_n \sum_k \frac{a_k}{k} \cos(k\varphi) + \frac{b_k}{k} \sin(k\varphi).$$

Como $\hat{u}$ debe ser una función par, los términos tipo seno deben ser nulos, con lo cual

$$DF_{(\lambda_n, 0)}(0, \hat{u}) = \sum_k \left(-a_k + \frac{g\lambda_n a_k}{k} \right) \cos(k\varphi)$$

En esta serie, el término $k = n$ se anula, por lo que $u_n = \cos(n\varphi) \notin R(DF_{(\lambda_n, 0)})$. En consecuencia, deducimos que para los valores $(\lambda_n, 0)$ existe una rama de bifurcación $t \mapsto (\lambda(t), u(t))$, $t \geq 0$, a lo largo de la cual el operador F se anula. Esta rama induce una familia de soluciones $(-1 + u(t), v(t))$ bifurcando de $(-1, 0)$, $\|u(t)\|_{X_j}, \|v(t)\|_{X_j} < \varepsilon$. Por tanto, $w \sim -1$ uniformemente en $\mathbb{H}^+$. $\square$

4 Aplicaciones a problemas sobredeterminados

4.1 Introducción

El teorema de Crandall-Rabinowitz también resulta de utilidad para tratar problemas sobredeterminados. Más específicamente, consideramos problemas del tipo

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = c & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11)$$

donde $f \in C^1$ y las incógnitas de este problema son u y Ω .

Algunas aplicaciones del problema (11) son las siguientes:

1. En dimensión 2, tenemos que $Q = (\nabla u)^\perp$ es solución de 2D-Euler.
2. Si $f(u) = \lambda_1 u$, con λ_1 el primer autovalor del problema de Dirichlet, entonces el problema (11) se reduce al estudio de la *criticalidad del primer autovalor* frente a variaciones del dominio, es decir, de la aplicación

$$\Omega \mapsto \lambda_1(\Omega).$$

3. $f(u)$ lineal en $\mathbb{S}^{N-1}$ tiene relación con superficies mínimas de frontera libre.

Bajo el marco establecido, comenzamos recordando algunos resultados clásicos:

Proposición 4.1. (*Serrin, 1971*) Si Ω es acotado y $u > 0$, entonces Ω es una bola.

La idea de la prueba de esta proposición se basa en los resultados de moving planes presentados por Aleksandrov en 1956; ver [2, Chapter VII, Part II]

Proposición 4.2. Existen soluciones triviales para la incógnita Ω en el problema (11) en los casos

- $\Omega = B \times \mathbb{R}^k$,
- $\Omega = B^c$,
- $\Omega = B^c \times \mathbb{R}^k$,
- Ω un semiespacio.

Para más información, consultar los resultados de rigidez establecidos por Berestycki-Caffarelli-Nirenberg.

Asimismo, en la literatura se pueden encontrar resultados de existencia de soluciones no triviales a (11). Entre ellos, destacamos:

- Sicbaldi (2010) [4]: podemos bifurcar y encontrar soluciones mediante deformaciones del borde de las soluciones triviales (cilindros) anteriores.
- Fall, Minlend, Weth (2017) [1]: buscan soluciones para el caso $f = 1$.
- Ruiz, Sicbaldi, Wu (2022) [3]: tratan el problema anterior para f genérica.

Para tener una noción de cómo trabajar con problemas sobredeterminados del tipo (11), procederemos a dar un razonamiento heurístico.

4.2 Heurística

Supongamos que tenemos una familia 1-paramétrica de soluciones $t \mapsto (u_t, \Omega_t)$, $t \geq 0$, de (11) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \Delta u_t(x) + f(u_t(x)) = 0 & \text{en } \Omega_t, \\ u_t(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_t, \\ \frac{\partial u_t(x)}{\partial \eta} = -c_t & \text{sobre } \partial\Omega_t, \end{cases} \quad (12)$$

Del sistema, obtenemos

$$\nabla u_t(x) \cdot \eta(x) = -c_t,$$

luego el gradiente de u_t es perpendicular a la frontera de Ω_t . Definiendo $\Omega := \Omega_0$, podemos expresar la frontera de los dominios Ω_t para t suficientemente pequeños como

$$\partial\Omega_t = \{x + th_t(x)\eta(x) : x \in \partial\Omega\},$$

para todo $x \in \partial\Omega_0$, donde $h_t(x)$ es una función dependiente del parámetro t ; ver Figura 3. Por simplicidad, denotaremos por $h(x)$ a $h_0(x)$.

La idea es derivar formalmente respecto de t para $t = 0$. Comenzamos derivando en puntos del interior del dominio. De la primera ecuación de (12), tenemos que $\Psi := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u_t$ verifica

$$\nabla \Psi + f'(u_0(x))\Psi = 0,$$

que junto con la segunda ecuación de (12), nos conduce a

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u_t(x + th_t(x)\eta(x)) = \Psi(x) + \nabla u_0(x) \cdot (h(x)\eta(x)) = \Psi - c_0\eta(x) \cdot (h(x)\eta(x)) = \Psi(x) - c_0h(x),$$

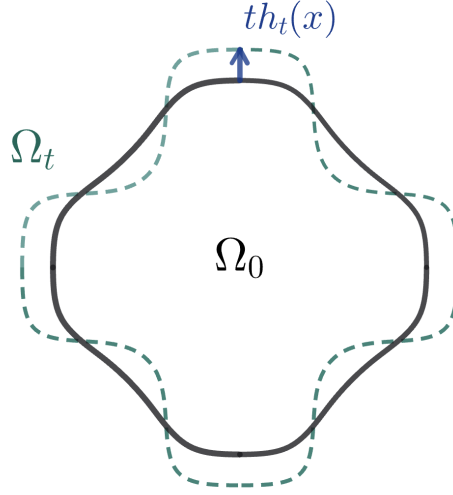


Figure 3: Deformación del dominio Ω_0 .

de donde concluimos que

$$\Psi(x) = c_0 h(x).$$

Gracias a la tercera ecuación de (12),

$$c_t^2 = |\nabla u_t(x + th_t(x)\eta(x))|^2.$$

Derivando en $t = 0$,

$$2c_0 c'_0 = 2\nabla u_0(x) \cdot [\nabla \Psi(x) + D^2 u(x) \cdot h(x)\eta(x)]$$

Usando $\nabla u_t(x) = -c_t \eta(x)$, nos queda

$$c_0 c'_0 = -c_0 \eta(x) \cdot [\nabla \Psi(x) + D^2 u(x) \cdot h(x)\eta(x)] = -c_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}(x) - c_0 h(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}(x) = -c_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}(x) - \Psi(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}(x).$$

Por tanto, llamando $c := -c_0 c'_0$, nos queda el problema

$$\begin{cases} \Delta \Psi + f'(u_0)\Psi = 0 \text{ en } \Omega, \\ c_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \Psi = c \text{ sobre } \partial \Omega. \end{cases}$$

Observamos que hemos obtenido una condición de contorno de tipo Robin. Notamos que esta condición está relacionada con el operador curvatura media, dado por

$$H(x) := \frac{-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right)}{N-1} = \frac{D^2 u(x)(\nabla u, \nabla u) - \Delta u |\nabla u|^2}{|\nabla u|^3 (N-1)}.$$

Usando de nuevo que $\nabla u = -c_0 \eta$, se tiene

$$H(x) = \frac{c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(0)c_0^2}{(N-1)c_0^3} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(0)}{(N-1)c_0},$$

de donde deducimos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = c_0(N-1)H(x) - f(0).$$

A continuación, estudiaremos el problema de la perturbación de un cilindro de manera T -periódica para el caso particular $f = 1$.

4.3 Perturbación de un cilindro ($f = 1$)

Sea $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$ la bola unidad del espacio euclídeo. Consideramos el problema sobredeterminado

$$\begin{cases} \Delta\phi_0 + 1 = 0 \text{ en } B \\ \phi_0 = 0 \text{ sobre } \partial B, \\ \frac{\partial\phi_0}{\partial\eta} = c \text{ sobre } \partial B. \end{cases} \quad (13)$$

La única solución a este problema es la radial, que viene dada por $\phi_0 := \frac{1-|x|^2}{2N}$, de forma que necesariamente $c = -\frac{1}{N}$. Vamos a considerar perturbaciones del cilindro $\Omega_0 := B \times \mathbb{R}$, $x \in B$, $T \in \mathbb{R}$. Buscamos soluciones T -periódicas en dominios T -periódicos. Para ello, dilatamos en la variable T , de modo que el período sea 2π . Reformulamos el problema como

$$\begin{cases} \Delta_\lambda\phi + 1 = 0 \text{ en } \Omega, \\ \phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ |\nabla_\lambda\phi| = c \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14)$$

con $\lambda > 0$, $T = 2\pi/\sqrt{\lambda}$, ϕ y Ω 2π -periódicos en t y

$$\Delta_\lambda\phi = \Delta_x\phi + \lambda\phi_{tt}, \quad \nabla_\lambda\phi = (\nabla_x\phi, \sqrt{\lambda}\phi_t). \quad (15)$$

Dado $\alpha \in (0, 1)$, definimos

$$X_j = \{v \in \mathcal{C}^{j,\alpha}(\mathbb{R}), 2\pi \text{ periódicas, pares con } [v] = 0\},$$

donde recordamos que $[v]$ denota la media dada por

$$[v] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) dt.$$

Sea $\mathcal{U} \subset X_j$ el abierto definido por $\mathcal{U} = \{v \in X_j : v > -1\}$ e introduzcamos los conjuntos

$$C_{1+v} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq |x| < 1 + v(t)\}, \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Es inmediato comprobar que para todo $v \in \mathcal{U}$ existe una solución $\phi_{\lambda,v}$ 2π periódica respecto de t , par y radial en x del problema

$$\begin{cases} \Delta_\lambda\phi_{\lambda,v} + 1 = 0 \text{ en } C_{1+v} \\ \phi_{\lambda,v} = 0 \text{ sobre } C_{1+v}. \end{cases} \quad (16)$$

Definimos asimismo el difeomorfismo $T_v : C_1 \rightarrow C_{1+v}$ sobre el cilindro C_1

$$T_v(x, t) = ((1 + v(t))x, t)$$

y denotamos por $L_{\lambda,v} := T_v^* \Delta_\lambda$. Para que el operador $L_{\lambda,v} \bar{\phi}$ esté bien definido, necesitamos una regularidad que admita derivadas de orden 2 respecto de v y de $\bar{\phi}$. Podemos reformular (16) como

$$\begin{cases} L_{\lambda,v} \bar{\phi} + 1 = 0 \text{ en } C_1 \\ \bar{\phi} = 0 \text{ sobre } C_1, \end{cases} \quad (17)$$

cuya solución denotamos por $\bar{\phi}_{\lambda,v}$. Consideremos ahora la función $N : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(C_1) \rightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(C_1)$ dada por

$$N(\lambda, v, \phi) = L_{\lambda,v}\phi + 1.$$

Se verifica

$$N(\lambda, 0, \phi_0) = 0, \quad DN_{(\lambda, 0, \phi_0)}(0, 0, \zeta) = \Delta_\lambda \zeta.$$

Aplicando el teorema de la función implícita, tenemos existencia de soluciones y regularidad para el problema (17) para valores pequeños de v . Asimismo, $\bar{\phi}_{\lambda,v}$ depende $\mathcal{C}^k$ de los parámetros λ, v .

Observación 4.3. *Observemos que en el caso $f \neq 1$, la derivada del operador N asociado satisface $DN_{(\lambda,0,\phi_0)}(0,0,\zeta) = \Delta_\lambda \zeta + f'(u)$. Si esta derivada define un difeomorfismo, entonces también tendríamos existencia local de soluciones para el problema (17) correspondiente.*

Para finalizar esta sesión, definimos el operador $G : (0, +\infty) \times \mathcal{U} \rightarrow X_1$ como

$$G(\lambda, v) = -|\nabla_\lambda \phi_{\lambda,v}(1 + v(t), t)| + \left[|\nabla_\lambda \phi_{\lambda,v}(1 + v(\cdot), \cdot)| \right]$$

Tenemos que el problema sobredeterminado (14) admite $\phi_{\lambda,v}$ como solución si y solo si $G(\lambda, v) = 0$. Notemos además que $G(\lambda, 0) = 0$ para todo λ positivo. A continuación, vamos a calcular la derivada de $G(\lambda, v)$.

Proposición 4.4. $G(\lambda, v)$ es de clase $\mathcal{C}^2$, y

$$DG_{(\lambda,0)}(0, v) = -\phi'_0(1)\partial_\eta \psi_{\lambda,v} + \phi''_0(1)v = \frac{1}{N}(\partial_\eta \psi_{\lambda,v} - v), \quad (18)$$

donde ϕ_0 es la función definida en (13), $\psi_{\lambda,v}$ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta_\lambda \psi_{\lambda,v} = 0 & \text{en } C_1 \\ \psi_{\lambda,v} = v & \text{en } \partial C_1, \end{cases} \quad (19)$$

y $\Delta_\lambda = \Delta_x + \lambda \frac{d^2}{dt^2}$ es el operador definido en (15).

La expresión (18) motiva la definición del operador

$$H_\lambda(v) := \partial_\eta \psi_{\lambda,v} - v. \quad (20)$$

Observación 4.5. *Notemos que el operador H_λ está bien definido, es decir, $H_\lambda(v) \in X_1$: en efecto, aplicando el teorema de la divergencia sobre B , la 2π -periodicidad de $\psi_{\lambda,v}(t, x)$ en t y (19),*

$$\int_{\partial C_1} \partial_\eta(\psi_{\lambda,v}) ds = \int_{C_1} \Delta_x(\psi_{\lambda,v}) dx dt = -\lambda \int_B dx \int_0^{2\pi} dt (\psi_{\lambda,v})_{tt} = 0.$$

H_λ , como operador Dirichlet-to-Neumann, es Fredholm de índice 0. Denotemos por $\sigma(\lambda)$ al primer autovalor de H_λ . Para estudiar dicho autovalor, consideraremos la forma cuadrática $Q_\lambda : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q_\lambda(\psi) := \int_{C_1} (|\nabla \psi|^2 + \lambda \psi_t^2) dx dt, \quad (21)$$

donde

$$H := \{\psi \in H^1(C_1) : 2\pi\text{-periódica, radial en } x \text{ y par en } t\}. \quad (22)$$

Asimismo, estudiaremos el valor

$$\mu(\lambda) = \inf \left\{ Q_\lambda(\psi) : \psi \in H, \int_{\partial C_1} \psi^2 ds = 1, \int_{\partial C_1} \psi ds = 0 \right\}. \quad (23)$$

La condición $\int_{\partial C_1} \psi^2 ds = 1$ puede ser entendida como una normalización, mientras que la restricción dada por $\int_{\partial C_1} \psi ds = 0$ nos permite omitir la solución trivial $\psi = \text{const}$.

Observación 4.6. *Es posible demostrar que $\mu(\lambda)$ coincide el primer autovalor del operador Dirichlet-to-Neumann $v \mapsto \partial_\eta \psi_{\lambda,v}$; ver (19). Por tanto, $\sigma(\lambda) = \mu(\lambda) - 1$.*

Proposición 4.7. *El valor $\mu(\lambda)$ dado por (23) es un mínimo, cuyo minimizante es solución del problema*

$$\begin{cases} \Delta_\lambda \psi_\lambda = 0 & \text{en } C_1 \\ \partial_\eta \psi_\lambda = \mu(\lambda) \psi_\lambda & \text{en } \partial C_1. \end{cases} \quad (24)$$

Proof. Los detalles de la prueba se pueden encontrar en [3, Lemma 6.2] en el caso particular $f(u) = 1$, de forma que nos limitaremos a dar un esquema de la demostración.

Consideremos una sucesión $\{\psi_n\}$ minimizante, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_\lambda(\psi_n) \rightarrow \mu(\lambda)$. Usando la condición de normalización $\int_{\partial C_1} \psi^2 ds = 1$ y el hecho de que la sucesión es minimizante, se puede comprobar que $\{\psi_n\}$ está acotada en $H^1(C_1)$. En particular, existe una subsucesión débilmente convergente a una cierta función $\psi_\lambda \in H$ que minimiza el operador Q_λ , esto es, $Q_\lambda(\psi_\lambda) = \mu(\lambda)$.

Por ser ψ_λ un punto crítico del operador Q_λ y debido a las condiciones sobre la frontera ∂C_1 en la definición de $\mu(\lambda)$, deducimos que ψ_λ debe ser una solución (débil) del problema

$$\begin{cases} \Delta_\lambda \psi_\lambda = 0 & \text{en } C_1 \\ \partial_\eta \psi_\lambda = a + b\psi_\lambda & \text{en } \partial C_1 \end{cases}$$

para ciertas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Usando que $\mu(\lambda) = Q_\lambda(\psi_\lambda)$, es posible comprobar que $b = \mu(\lambda)$. Para demostrar que $a = 0$, notemos que

$$\int_{\partial C_1} \partial_\eta \psi_\lambda ds = \int_{\partial C_1} (a + \mu(\lambda)\psi_\lambda) ds = 4\pi^2 a.$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial C_1} \partial_\eta \psi_\lambda ds = \int_0^{2\pi} dt \int_{\partial B} \partial_\eta \psi_\lambda dl = \int_0^{2\pi} dt \int_B dx \Delta_x \psi_\lambda = -\lambda \int_B dx \int_0^{2\pi} dt (\psi_\lambda)_{tt} = 0,$$

donde hacemos uso de la periodicidad de ψ_λ . Deducimos que $a = 0$ y obtenemos (24). Por resultados de teoría de regularidad, es posible deducir que la solución débil ψ_λ es, de hecho, analítica. $\square$

Lema 4.8. *Sea ψ_λ solución de*

$$\begin{cases} \Delta_\lambda \psi_\lambda = 0 & \text{en } C_1 \\ \partial_\eta \psi_\lambda = v & \text{en } \partial C_1, \end{cases} \quad (25)$$

con $v \in X_2$, $[v] = 0$; ver (9). Entonces $\int_0^{2\pi} \psi_\lambda(x, t) dt = 0$ para todo $x \in B$.

Proof. Sea $\rho(x) : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x) := \int_0^{2\pi} \psi_\lambda(x, t) dt. \quad (26)$$

Debido a la condición de contorno en (25), deducimos que $\rho(x) = 0$ a lo largo de ∂B . Por otro lado, tenemos que

$$\Delta_x \rho = \int_0^{2\pi} \Delta_x \psi_\lambda(x, t) dt = -\lambda \int_0^{2\pi} (\psi_\lambda(x, t))_{tt} dt = 0,$$

debido a la periodicidad en t . En particular, $\rho(x)$ es una función armónica en B que se anula en el borde, con lo cual $\rho(x) \equiv 0$. $\square$

A continuación, consideraremos nuevamente la función minimizante ψ_λ definida en la Proposición 4.7. Notemos que, usando la desigualdad de Poincaré-Wirtinger en t , se tiene que

$$\mu(\lambda) = \int_B dx \int_0^{2\pi} dt (|\nabla_x \psi_\lambda|^2 + \lambda |(\psi_\lambda)_t|^2) \geq \int_B dx \int_0^{2\pi} dt (|\nabla_x \psi_\lambda|^2 + \lambda \psi_\lambda^2). \quad (27)$$

Esto motiva la definición del operador $\overline{Q}_\lambda : \overline{H} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$\overline{H} := \{\rho \in H^1(B) : \rho \text{ radial}\}, \quad (28)$$

$$\overline{Q}_\lambda := \int_B dx (|\nabla_x \rho|^2 + \lambda \rho^2). \quad (29)$$

Argumentando como en la Proposición 4.7, es posible deducir lo siguiente:

Proposición 4.9. *El valor*

$$\bar{\mu}(\lambda) := \inf \left\{ \bar{Q}_\lambda(\rho) : \rho \in \bar{H}, \int_{\partial B} \rho^2 dl = 1 \right\}$$

es un mínimo, y la función minimizante ρ_λ satisface

$$\begin{cases} \Delta_\lambda \rho = 0 & \text{en } B \\ \partial_\eta \rho = \bar{\mu}(\lambda) \rho & \text{en } \partial B. \end{cases} \quad (30)$$

Como corolario de la proposición anterior, se deduce que para toda $\rho \in \bar{H}$,

$$\bar{Q}_\lambda(\rho) \geq \bar{\mu}(\lambda) \int_{\partial B} \rho^2 dl. \quad (31)$$

Observación 4.10. *Combinando (27) y (31) obtenemos que*

$$\mu(\lambda) \geq \int_0^{2\pi} dt \int_B dx (|\nabla_x \psi_\lambda|^2 + \lambda \psi_\lambda^2) \geq \int_0^{2\pi} dt \bar{\mu}(\lambda) \int_{\partial B} \psi_\lambda^2 dl = \bar{\mu}(\lambda) \int_{\partial C_1} \psi_\lambda^2 ds = \bar{\mu}(\lambda).$$

En realidad, esta cadena de desigualdades es una igualdad que nos permite identificar la forma de $\psi_\lambda(x, t)$: en efecto, en la desigualdad de Poincaré-Wirtinger (27), tendremos igualdad para funciones proporcionales a $\cos(t)$. Por otro lado, en (31) tenemos la igualdad para $\rho = \rho_\lambda$. En particular, esto nos permite concluir que

$$\psi_\lambda(x, t) = \rho_\lambda(x) \cos(t), \quad (32)$$

y por tanto $\mu(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda)$. De acuerdo con la Observación 4.6, podemos deducir que $\sigma(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda) - 1$. Por tanto,

$$\langle \cos t \rangle = \ker(H_\lambda - \sigma(\lambda)Id),$$

donde H_λ es el operador de tipo Dirichlet-to-Neumann definido en (20).

Lema 4.11. *Se satisface la siguiente igualdad:*

$$\text{Im}(H_\lambda - \sigma(\lambda)Id) = \left\{ w \in X_1 : \int_0^{2\pi} w(t) \cos(t) dt = 0 \right\}.$$

Proof. Al ser $H_\lambda - \sigma(\lambda)Id$ un operador de tipo Fredholm de índice cero con núcleo de dimensión 1, deducimos que la imagen de $H_\lambda - \sigma(\lambda)Id$ también tiene codimensión 1. Por otro lado, es posible demostrar que para todo $w \in \text{Im}(H_\lambda - \sigma(\lambda)Id)$ se tiene que

$$\int_0^{2\pi} w(t) \cos(t) dt = 0,$$

obteniendo la igualdad deseada. □

Nuestro objetivo a partir de ahora consistirá en encontrar un cierto valor λ^* para el cual $\sigma_{\lambda^*} = 0$, de forma que H_{λ^*} sea un operador degenerado. Si además logramos demostrar que $\sigma'(\lambda^*) \neq 0$, entonces estaremos en las condiciones del teorema de Crandall-Rabinowitz, que nos permitirá demostrar la existencia de una bifurcación; ver Observación 2.10. Gracias a la Observación 4.10, esta condición es equivalente a

$$\bar{\mu}(\lambda^*) = 1, \quad \bar{\mu}'(\lambda^*) \neq 0.$$

Lema 4.12. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\bar{\mu}(\lambda)$ es creciente,
2. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \bar{\mu}(\lambda) = 0$.
3. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{\mu}(\lambda) = \infty$.

Proof. La propiedad (1) se sigue inmediatamente de la definición de $\overline{Q}_\lambda$; ver (29). Respecto a la propiedad (2), basta considerar como función test la función constante en la definición de $\overline{\mu}(\lambda)$. Vamos a estudiar la propiedad (3). Supongamos por reducción al absurdo que para todo $\lambda > 0$ se cumple que

$$\overline{\mu}(\lambda) = \overline{Q}_\lambda(\rho_\lambda) < c$$

para algún $c > 0$. En particular, el conjunto $\{\rho_\lambda\}_{\lambda>0}$ está acotado en H^1 , y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_B \rho_\lambda^2 dx = 0.$$

Esto implica que existe una sucesión $\{\rho_{\lambda_n}\}$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, débilmente convergente a $\rho_0 = 0$ en H^1 . En particular, ρ_{λ_n} converge a 0 en $L^2(\partial B)$. No obstante, esto es imposible pues

$$\int_{\partial B} \rho_{\lambda_n}^2 dl = 1$$

por construcción. □

Como corolario del lema anterior, deducimos que debe existir λ^* tal que $\overline{\mu}(\lambda^*) = 1$. Por tanto, basta demostrar que $\overline{\mu}'(\lambda^*) > 0$. Veremos este hecho a continuación:

Lema 4.13. *La derivada $\overline{\mu}'(\lambda^*)$ es estrictamente positiva.*

Proof. Sea $\rho^* := \rho_{\lambda^*}$ la función minimizante asociada a $\overline{\mu}(\lambda^*)$. Para todo $\lambda > 0$, es claro que

$$\overline{\mu}(\lambda) \leq Q_\lambda(\rho^*) = \int_B (|\nabla \rho^*|^2 + \lambda(\rho^*)^2) dx = 1 + (\lambda - \lambda^*) \int_B (\rho^*)^2 dx.$$

En particular, tomando $\lambda < \lambda^*$, deducimos que

$$\overline{\mu}'(\lambda^*) = \lim_{\lambda \rightarrow (\lambda^*)^-} \frac{\overline{\mu}(\lambda^*) - \overline{\mu}(\lambda)}{\lambda^* - \lambda} \geq \lim_{\lambda \rightarrow (\lambda^*)^-} \frac{1 - (1 + (\lambda - \lambda^*) \int_B (\rho^*)^2)}{\lambda^* - \lambda} = \int_B (\rho^*)^2 > 0,$$

como queríamos probar. □

Usando el Teorema de Crandall-Rabinowitz (ver Teorema 2.7), deducimos la existencia de una bifurcación para el problema (14); ver también Observación 2.10.

A Apéndice: Teorema de Krasnoselskii

Finalizaremos este curso mencionando otro resultado relevante dentro de la teoría de la bifurcación, el llamado Teorema de Krasnoselskii. Para ello, necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Definición A.1. *Diremos que un operador $F : \Omega \subset X \rightarrow Y$ es compacto si $\overline{F(\Omega_0)}$ es compacto en Y para todo $\Omega_0 \subset \Omega$ acotado.*

Lema A.2. *Si F es de clase C^1 y compacto, entonces DF_p es compacto para todo $p \in X$.*

En lo que sigue, supongamos que $X = Y$ y consideremos un operador de la forma $\sigma Id - K$, con $K : X \rightarrow X$ lineal, continuo y compacto, y $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En estas condiciones, recordamos que $\sigma Id - K : X \rightarrow X$ es un operador Fredholm de índice 0. De esta forma, $\text{Ker}(\sigma Id - K)$ es finito-dimensional.

Definición A.3. *Llamaremos multiplicidad geométrica de σ a la dimensión de $\text{Ker}(\sigma Id - K)$.*

En este contexto, también podemos dar una noción de multiplicidad algebraica:

Definición A.4. *Llamaremos multiplicidad algebraica de σ a la cantidad*

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}((\sigma Id - K)^n),$$

donde la potencia hace referencia a la composición de $(\sigma Id - K)$ n veces.

Observación A.5. Es posible comprobar que la multiplicidad algebraica está bien definida, i.e., es un número natural. Un esbozo de la demostración se basa en los siguientes pasos:

1. Sea A un operador lineal. Entonces $\text{Ker}(A^n) \subset \text{Ker}(A^{n+1})$.
2. Si para algún n tenemos que $\text{Ker}(A^n) = \text{Ker}(A^{n+1})$, entonces $\text{Ker}(A^m) = \text{Ker}(A^n)$ para todo $m \geq n$.
3. Debe existir un cierto n tal que $\text{Ker}(A^n) = \text{Ker}(A^{n+1})$. En caso contrario, podemos construir una sucesión $\{y_n\}$ formada por vectores unitarios tal que:
 - (a) $y_n \in \text{Ker}(\sigma \text{Id} - K)^n \setminus \text{Ker}(\sigma \text{Id} - K)^{n-1}$,
 - (b) $\|y_n - v\| > \frac{1}{2}$ para todo $v \in \text{Ker}(\sigma \text{Id} - K)^{n-1}$.

Como $\{y_n\}$ es un conjunto acotado, entonces la sucesión $\{K(y_n)\}$ debe poseer una subsucesión convergente. Sin embargo, esto es imposible, pues se puede demostrar que $\{K(y_n)\}$ no posee ninguna (sub)sucesión de Cauchy.

Observación A.6. En general, la multiplicidad geométrica es menor o igual que la algebraica. No obstante, si

$$\text{Ker}(\sigma \text{Id} - K) \cap \text{Im}(\sigma \text{Id} - K) = \{0\},$$

ambas multiplicidades coinciden.

Observación A.7. Notamos que el número de autovalores negativos del operador $H = \text{Id} - K$ es finito: en efecto, los autovalores de este operador son de la forma $\mu_j := 1 - \lambda_j$, con λ_j autovalor de K . Si hubiese infinitos μ_j negativos, entonces $\lambda_j > 1$ para infinitos valores de j , lo cual entra en contradicción con la compacidad de K .

Finalmente, para enunciar el teorema de Krasnoselskii, necesitaremos el concepto de *índice*, que introducimos a continuación.

Definición A.8. Sea K un operador lineal, continuo y compacto, y $H := \text{Id} - K$. Denotemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$ los autovalores negativos de H , y por $m_1, \dots, m_n$, sus multiplicidades algebraicas. Definimos el índice de H , $\text{ind}(H)$, como la suma

$$\text{ind}(H) := \sum_{i=1}^n m_i.$$

Teorema A.9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sea $F(\lambda, x) : [a, b] \times X \rightarrow X$ una función de clase C^1 . Supongamos que F puede expresarse como

$$F(\lambda, x) = x - G(\lambda, x),$$

con $G(\lambda, x)$ un operador compacto (no necesariamente lineal). Supongamos además que

1. $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in [a, b]$.
2. Los operadores $v \rightarrow DF_{(a,0)}(0, v)$, $DF_{(b,0)}(0, v)$ son isomorfismos.
3. Los índices de $DF_{(a,0)}(0, \cdot)$ y $DF_{(b,0)}(0, \cdot)$ son distintos.

Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe $u_\varepsilon \in X$ con $\|u_\varepsilon\| = \varepsilon$ y $\lambda_\varepsilon \in (a, b)$ con $F(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$.

References

- [1] M. M. Fall, I. A. Minlend T. Weth. Unbounded periodic solutions to Serrin's overdetermined boundary value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* **223** (2017), 737–759.
- [2] H. Hopf. Differential geometry in the large. Springer-Verlag (1947).
- [3] D. Ruiz, P. Sicbaldi, J. Wu. Overdetermined elliptic problems in Onduloid type domains with general nonlinearities. *J. Functional Analysis* 283 (2022) 26 pp.
- [4] P. Sicbaldi. New extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian in flat tori. *Calc. Var.* **37** (2010), 329–344.