15 de diciembre de 2000

1. Halla el intervalo de convergencia de la serie (1 punto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n5^{n+2}}(x+2)^n$$

2. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias: (1 punto)

$$i)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+5x^{2/3}+3x^{1/5}} \qquad ii)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{5x}dx$$

3. Halla las derivadas parciales y la derivada direccional en la dirección $\pi/6$ de la siguiente función en el punto $(0,0)$ (1.5 puntos):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^2}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿es f diferenciable en $(0,0)$? (0.5 puntos)

4. Integra la función $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2$ sobre la región acotada por la gráfica de $y = -x^2 + x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (1.5 puntos)

5. Halla los extremos relativos de la función $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{1-x^2-y^2}$. (1.5 puntos)

6. (a) Resuelve la ecuación de segundo orden:

$$y'' + 25y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$$

(1.5 puntos)

(b) Dos especies de individuos habitan en un mismo territorio. Si $x(t)$ e $y(t)$ son sus densidades de población en el instante t, en el instante inicial $x(0) = 10,\ y(0) = 15$ y la ley de evolución es:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) - 2e^t \\ y'(t) &= -x(t) + 2y(t) - 2e^t \end{aligned}$$

¿Qué densidad de población de cada especie habrá después de un segundo? (El tiempo está medido en segundos) (1.5 puntos)

16 de diciembre de 1998

1. Dada la función $f(x,y) = e^x \mathrm{sen} x + e^y \mathrm{sen} y$, se pide: (2 puntos)

   (a) Hallar el vector gradiente de f en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\theta = \pi/4$.

   (c) ¿Es diferenciable la función en $(1,0)$?

   (d) Hallar la dirección θ para la que $D_\theta f(0,0) = 0$.

2. Halle el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = 2^x$ en $x = 0$, y teniendo en cuenta ese desarrollo calcule (1 punto)

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\ln 2)^n}{n!}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

3. Clasifique los extremos relativos de la siguiente función: (2 puntos)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8(x^2-y^2)$$

4. Halle

$$\int\int\int_D yz\,dx\,dy\,dz$$

   donde D es el recinto limitado por los planos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 4$ y $y + x = 1$. (1,5 puntos)

5. ¿Son ortogonales las familias de curvas siguientes? (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} x^2 &= c - 2y^2, \quad c > 0 \\ y &= kx^2, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6. Si $y(t)$ es una función que cumple:

$$\begin{aligned} 2y'' - 4y' + 2y &= t^{-1}e^t, \quad t > 1 \\ y(1) &= 1,\ y'(1) = 0 \end{aligned}$$

   ¿ Cuánto vale $y(2)$? (1,5 puntos)

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales: (1,5 puntos)

$$\begin{aligned} 4x' + 4x + y' &= 1, \\ 3x' + y' - y &= t, \\ x(0) &= 2, \quad y(0) = -6 \end{aligned}$$

17 de junio de 1997

1. Calcular la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = \pi + x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$. Aplicar el desarrollo anterior para calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

(2 puntos)

2. Calcular los puntos críticos de la siguiente función y clasificarlos:

$$f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$$

(2 puntos)

3. Calcular el volumen limitado por las superficies
$z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$. (2 puntos)

4. Dada la ecuación diferencial:

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

determinar un factor integrante para esta ecuación y aplicarlo para integrar la ecuación:

$$y(x^2y^2 - 1)dx + x(x^2y^2 + 1)dy = 0$$

(2 puntos)

5. Integrar la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{2x}\left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

(2 puntos)

18 de junio de 1996

1. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$. Aplicar el desarrollo anterior para calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

(1.5 puntos)

2. Calcular la integral:

$$\int_0^{27} \frac{\sqrt{3 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

(1.5 puntos)

3. Hallar los extremos relativos de la función $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. (1.5 puntos)

4. Calcular el volumen limitado superiormente por la función $z = x^2 - y^2$ en el recinto limitado por $x = 0,\ x = \pi,\ y = 0,\ y = \mathrm{sen} x$.(1.5 puntos)

5. a) Deduciendo la expresión de un factor integrante que dependa de ty integrar la ecuación:

$$(-ty\mathrm{sen}t + 2y\cos t)dt + 2t\cos t dy = 0$$

(1 punto)

b) Hallar el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $3xy^2 = 2 + 3c_1x$ que pase por el punto $(0, 10)$. (1 punto)

6. a) Integrar la ecuación de segundo orden:

$$y'' + 25y = 6\ \mathrm{sen}(5x)$$

(1 punto)

b) Dos especies de individuos habitan en un mismo territorio. Si $x(t)$ e $y(t)$ son sus densidades de población en el instante t, en el instante inicial $x(0) = 10,\ y(0) = 15$ y la ley de evolución es:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) - 2e^t \\ y'(t) &= -x(t) + 2y(t) - 2e^t \end{aligned}$$

¿Qué densidad de población habrá después de un segundo? (El tiempo está medido en segundos) (1 punto)

10 de septiembre de 1996

1. Sea la función $f(x) = xe^{-x}$.
   a) Desarrolla en serie de potencias $f(x)$.
   b) Hallar el intervalo de convergencia.
   c) Hallar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n-1}}{n!}$$

(1.5 puntos)

2. Calcular: (1.5 puntos)

$$\int x^{5/3}(1+x^3)^{1/2}dx$$

3. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de la función: (1.5 puntos)

$$f(x,y) =$$

4. Integrar la función $f(x,y) = x^2+2xy^2+2$ sobre la región acotada por la gráfica de $y = -x^2+x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (1.5 puntos)

5. a) Resuelve la ecuación diferencial $\cos^2 t y' + y = 1$ verificando $y(0) = -3$. (1 punto)

b) Resuelve la ecuación diferencial $y' = 6 + 5y + y^2$. (1 punto)

6. a) Usando el método de variación de las constantes resuelve: (1 punto)

$$4y'' + 36y = \text{cosec}3x$$

b) El sistema:

expresa la evolución, a partir de un instante inicial, de las concentraciones de dos reactivos A y B en un proceso químico gobernado la reacción reversible $A \rightleftharpoons B$ siendo k_{11} y k_{12} las velocidades de las reacciones directas e inversas. Calcular las concentraciones $C_A(t)$ y $C_B(t)$ en el caso en que $k_{11} = k_{12} = 1$, $C_A(0) = 1/4$ y $C_B(0) = 3/10$. (1 punto)

2 de febrero de 2001

1. Determina el radio de convergencia de las series de potencias siguientes y estudia la convergencia en los puntos frontera: (2 puntos)

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3^n}$$

2. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de la función: (2 puntos)

$$f(x,y) =$$

3. Calcula el volumen limitado por las superficies $z = 3(x^2+y^2)$ y $z = 4-x^2-y^2$. (2 puntos)

4. Si $y(t)$ es una función que cumple:

$$\begin{aligned} 2y'' - 4y' + 2y &= te^t,\ \ t > 1 \\ y(1) &= 1,\ y'(1) = 0 \end{aligned}$$

¿Cuánto vale $y(2)$? (2 puntos)

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales: (2 puntos)

$$\begin{aligned} 4x' + 4x + y' &= 1, \\ 3x' + y' - y &= t, \\ x(0) &= 2,\ \ y(0) = -6 \end{aligned}$$

21 de diciembre de 2000

1. (a) Se considera la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x^{4n}}{3 + x^{4n}}$. Calcula la función límite puntual de dicha sucesión, estudia la continuidad de la función límite y deduce si la convergencia de la sucesión es uniforme o no. (1 punto)

   (b) Estudia la convergencia o divergencia de las integrales siguientes (1 punto):

$$i) \int_1^3 \frac{x+5}{9-x^2}dx, \quad ii) \int_0^\infty \frac{dx}{3e^x+7}$$

2. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la siguiente función: (2 puntos)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Halla la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(0, \sqrt{\pi/2})$ siendo $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

   Halla la diferencial $df(0, \sqrt{\pi/2})$ y la ecuación del plano tangente a f en el punto $(0, \sqrt{\pi/2})$.

3. Halla el valor máximo de la siguiente función: (1.5 puntos)

$$f(x,y) = 2xy, \qquad x > 0,\ y > 0$$

   sujeto a la condición

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

4. Calcula el volumen limitado por: (1.5 puntos)

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 25$$

5. (a) Integra la siguiente ecuación de segundo orden: (1.5 puntos)

$$y'' - 2y' + y = 2xe^x$$

   (b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - y, \end{aligned}$$

   sabiendo que $x(0) = -1,\ \ y(0) = 2$. (1.5 puntos)

22 de mayo de 1998

1. Estudiar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

2. Calcular la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Como aplicación hallar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

3. a) Estudiar la convergencia o divergencia de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5} dx$$

b) Calcular la integral:

$$\int_0^3 \sqrt{3x-x^2}\, dx$$

4. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\, y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Hallar los puntos críticos y clasificarlos de la siguiente función de dos variables:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$$

22 de junio de 1998

1. Estudiar la convergencia de la siguiente serie de funciones (1 punto):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

2. Estudiar para qué valores de a la siguiente integral es convergente (1 punto):

$$\int_0^1 x^a e^{-x} dx$$

3. Hallar las derivadas parciales y la derivada direccional en la dirección $\pi/6$ de la siguiente función en el punto $(0,0)$ (1.5 puntos):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿es f diferenciable en $(0,0)$?

4. Hallar los máximos y mínimos de la función (1.5 puntos):

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

sujetos a la condición

$$x^2 + y^2 = 1$$

5. Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano xy, y por los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. (1.5 punto)

6. Hallar las trayectorias ortogonales al haz de curvas $y = e^{cx}$. (1.5 puntos)

7. a) Resolver la ecuación (1 punto):

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x$$

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de valores iniciales (1 punto):

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 1, \\ y' &= x + y + e^t, \\ x(0) &= -\frac{1}{2},\ y(0) = 1 \end{aligned}$$

26 de mayo de 2000

1. Calcula en los dos órdenes de integración la siguiente integral: (1.5 puntos)

$$\int\int_D xydxdy,$$

donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq y \leq 1$, $y^2 \leq x \leq y$.

2. Calcula el volumen limitado superiormente por la función $z = x^2 - y^2$ en el recinto limitado por $x = 0,\ x = \pi,\ y = 0,\ y = \operatorname{sen} x$. (1.5 puntos)

3. Sea $\vec{\gamma}$ la hélice $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to I\!R^3,\ t \to (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Evalúa la integral $\int_{\vec{\gamma}} f(x, y, z)dl$ y halla la longitud de la curva $\vec{\gamma}$. (2 puntos)

26 de mayo de 2000

1. Resuelve la ecuación diferencial siguiente sabiendo que tiene un factor integrante que es función de $t^2 + y^2$: (1.5 puntos)

$$t + 4y(t^2 + y^2)y' = 0.$$

2. Se tiene una partícula de masa m = 1 g unida a un muelle de constante elástica k = 50 g/s^2 y un coeficiente de amortiguamiento de 2 g/s. En el tiempo t = 0 se desplaza la masa hacia abajo 23/26 cm y se suelta con una velocidad de 56/13 cm/s. Además una fuerza de 41 cos(2t) dinas actúa hacia abajo sobre la masa para t $\geq$ 0. El problema de valores inicales que plantea esta situación es el siguiente: (2 puntos)

$$x'' - 2x' + 50x = 41\cos(2t),\ x(0) = \frac{23}{26},\ x'(0) = \frac{56}{13},$$

donde $x(t)$ es la distancia a la posición de la partícula con el tiempo.

   (a) Resuelve el problema de valores iniciales planteado.

   (b) ¿Cuál es la posición de la partícula al cabo de 10 minutos?

   (c) ¿Llega a pararse definitivamente en algún momento?

   (d) Esboza la representación gráfica de la solución.

3. El sistema:

$$\begin{cases} C'_A(t) = -k_{11}C_A(t) + k_{12}C_B(t) \\ C'_B(t) = -(k_{12} + k_{21})C_B(t) + k_{11}C_A(t) + k_{22}C_C(t) \end{cases}$$

expresa la evolución, a partir de un instante inicial, de las concentraciones de tres reactivos A, B y C en un proceso químico gobernado por una pareja de reacciones reversibles $A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C$ siendo k_{11} y k_{12} las velocidades de las reacciones directas e inversas de la primera y k_{21} y k_{22} las correspondientes de la segunda. Sabiendo que en cualquier instante se verifica que $C_A(t) + C_B(t) + C_C(t) = 1$, calcular las concentraciones $C_A(t)$ y $C_B(t)$ en el caso en que $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 1$, $C_A(0) = 1/4$ y $C_B(0) = 3/10$. (1.5 puntos)

2 de septiembre de 1998 (corregido)

1. Se considera la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Calcular la función límite puntual de dicha sucesión, estudiar la continuidad de la función límite y deducir si la convergencia de la sucesión es uniforme o no. (1 punto)

2. Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales siguientes (1 punto):

$$a) \int_1^2 \frac{x+1}{4-x^2}dx, \quad b) \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15}$$

3. Sea la función $f(x,y) = e^{a(x+y)}$, donde a es un número real distinto de cero. Se pide obtener

el desarrollo de Taylor de orden dos de esta función en el punto $(0,0)$ y aproximar con este desarrollo el número e. (1,5 puntos)

4. Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$. (1,5 puntos)

5. Se considera la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Se pide hallar el volumen del recinto interior a la esfera y al cilindro. (1,5 puntos)

6. Una ecuación diferencial tiene como raíces de su ecuación característica $r = i$, $r = -i$ dobles. Escribe la ecuación diferencial homogénea cuya ecuación característica tiene esas raíces y resuelve después la ecuación no homogénea con término independiente $e^{-x}\cos x$. (1,5 puntos)

7. Resolver la ecuación diferencial siguiente sabiendo que tiene un factor integrante que es función de $t^2 + y^2$ (1 punto):

$$tdt + 4y(t^2+y^2)dy = 0$$

8. Usando la transformada de Laplace resuelve el sistema siguiente (1 punto):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -37t \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. La función límite puntual es:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x|<1 \\ 1, & \text{si } |x|>1 \\ 1/2, & \text{si } |x|=1 \end{cases}$$

Claramente esta función no es continua en $x = \pm 1$, porque

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$$

Los límites laterales no coinciden, lo que implica que la función no tiene límite en $x = \pm 1$. Como la función límite puntual es discontinua la convergencia de la sucesión no es uniforme.

2. a) Es una integral impropia de segunda especie, es decir, de función no acotada en el extremo de integración $x = 2$. La comparamos con la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^\alpha}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)/(4-x^2)}{1/(2-x)^\alpha} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)^\alpha (x+1)}{(2-x)(2+x)}$$

este límite es distinto de cero y de infinito si $\alpha = 1$, con lo que la integral que nos interesa tiene el mismo carácter que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)}$, que se comprueba integrando que es divergente, con lo que la integral a) es divergente.

b) Es impropia de intervalo no acotado. La comparamos con $\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1 = 1$ que es convergente:

$$\frac{1}{e^x+15} \leq \frac{1}{e^x} \quad \Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15} \leq \int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = 1$$

Y la integral es convergente.

3. El desarrollo de Taylor de orden 2 en torno al punto $(0,0)$ es:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} x + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} y + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(0,0)} y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} xy \right) + Resto$$

Calculamos las derivadas que aparecen en la fórmula:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = ae^{a(x+y)}|_{(0,0)} = a, \ \frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = ae^{a(x+y)}|_{(0,0)} = a, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)} = a^2 e^{a(x+y)}|_{(0,0)} = a^2, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(0,0)} = a^2 e^{a(x+y)}|_{(0,0)} = a^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = a^2 e^{a(x+y)}|_{(0,0)} = a^2, \end{aligned} \tag{1}$$

Y el desarrollo es:

$$e^{a(x+y)} \simeq 1 + ax + ay + \frac{1}{2}(a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2xy)$$

Si queremos aproximar e, lo obtenemos tomando, por ejemplo, $x = y = 1/2,\ a = 1$

$$e \simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 2,5$$

4. $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$. Tenemos que hallar sus extremos relativos. Calculamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 8x^3 = 8x(e^y - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, & o \\ e^y = x^2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4e^{4y} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x = 0 \ \Rightarrow \ -4e^{4y} \neq 0 \\ \text{si } e^y = x^2 \ \Rightarrow \ 4x^4 - 4x^8 = 0 \Rightarrow 1 = x^4 \ \Rightarrow x = \pm 1,\ y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Y los puntos críticos son $(1,0),\ (-1,0)$. Veamos si son extremos relativos calculando la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8e^y - 24x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2e^y - 16e^{4y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xe^y$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix},\ \ H_1 = -16 < 0,\ \ H_2 = 128 > 0$$

Entonces la forma cuadrática es definida negativa y el punto es un máximo relativo.

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix},\ \ H_1 = -16 < 0,\ \ H_2 = 128 > 0$$

Entonces la forma cuadrática es definida negativa y el punto es un máximo relativo.

5. El recinto al que hay que calcular el volumen se escribe en cilíndricas:

$$R = \left\{(r,\theta,z)/0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\sqrt{4a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}\right\}$$

El volumen que nos piden es:

$$\int_R dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}|_0^a d\theta = \frac{4}{3}\pi(8 - 3\sqrt{3})a^3$$

6. El polinomio característico será $(r-i)^2(r+i)^2 = r^4 + 2r^2 + 1$, que se corresponde con la ecuación diferencial $y^{IV)} + 2y'' + y = 0$. Y hay que resolver la ecuación no homogénea $y^{IV)} + 2y'' + y = e^{-x}\cos x$. La solución general del problema homogéneo es:

$$y_h(x) = (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\text{sen}x$$

Como $-1+i$ no es raíz del homogéneo la solución particular tiene la misma forma que el término independiente

$$y_p(x) = e^{-x}(a\cos x + b\text{sen}x)$$

Introducimos esta expresión en la ecuación y calculamos las constantes $a = -3/25,\ b = -4/25$, y la solución general del problema no homogéneo es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\mathrm{sen}x - \frac{1}{25}e^{-x}(3\cos x - 4\mathrm{sen}x)$$

7. Buscamos $\mu(t^2 + y^2 = z)$. Este factor integrante tiene que cumplir

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t}$$

donde

$$M(t, y) = t,\ N(t, y) = 4y(t^2 + y^2),\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}2y,\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dz}2t$$

Y μ tiene que cumplir

$$\frac{d\mu}{dz}2yt + \mu 0 = \frac{d\mu}{dz}2t4y(t^2 + y^2) + \mu 8ty$$

Y tenemos la siguiente ecuación diferencial para μ:

$$\frac{d\mu/dz}{\mu} = \frac{8ty}{2ty - 8ty(t^2 + y^2)} = \frac{4}{1 - 4(t^2 + y^2)} = \frac{4}{1 - 4z}$$

Resolvemos esta ecuación de variables separadas

$$\ln \mu = -\ln(1 - 4z) \Rightarrow \mu = \frac{1}{1 - 4z} = \frac{1}{1 - 4(t^2 + y^2)}$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante y resolvemos la ecuación exacta resultante:

$$\phi(t, y) = \int M^*(t, y)dt + h(y) = \int \frac{t}{1 - 4(t^2 + y^2)}dt + h(y) = -\frac{1}{8}\ln(1 - 4(t^2 + y^2)) + h(y)$$

derivamos con respecto a y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{1 - 4(t^2 + y^2)} + h'(y) = N^*(t, y) = \frac{4y(t^2 + y^2)}{1 - 4(t^2 + y^2)}$$

Despejamos $h'(y) = y$, con lo que $h(y) = y^2/2$ y la solución es:

$$\phi(t, y) = -\frac{1}{8}\ln(1 - 4(t^2 + y^2)) + \frac{y^2}{2} = C$$

8. El sistema que tenemos que resolver después de aplicar la transformada de Laplace es:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= -7X(s) + Y(s) + \frac{5}{s} && (4) \\ sY(s) - y(0) &= -2X(s) - 5Y(s) - \frac{37}{s^2} && (5) \end{aligned}$$

Llamamos $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$. Resolviendo este sistema para $X(s)$ tenemos:

$$X(s) = \frac{x_0 s^3 + (5 + 5x_0 + y_0)s^2 + 25s - 37}{s^2(s^2 + 12s + 37)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12s + 37}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$x_0 = A + C,\ 5 + 5x_0 + y_0 = 12A + B + D,\ 25 = 37A + 12B,\ -37 = 37B$$

$$A = 1,\ B = -1,\ C = x_0 - 1,\ D = 5x_0 + y_0 - 6$$
$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{(x_0 - 1)s + 5x_0 + y_0 - 6}{(s+6)^2 + 1}$$

Calculamos la transformada inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{(x_0 - 1)(s+6) - 6(x_0 - 1) + 5x_0 + y_0 - 6}{(s+6)^2 + 1}\right) = \\ x(t) &= 1 - t + (x_0 - 1)e^{-6t}\cos t + (y_0 - x_0)e^{-6t}\mathrm{sen}t \qquad (6) \end{aligned}$$

Introducimos esta expresión en la primera ecuación

$$\begin{aligned} & -1 + (-7x_0 + y_0 + 6)e^{-6t}\cos t + (5x_0 - 6y_0 + 1)e^{-6t}\mathrm{sen}t \\ = & -7(1 - t + (x_0 - 1)e^{-6t}\cos t + (y_0 - x_0)e^{-6t}\mathrm{sen}t) + y(t) + 5, \qquad (7) \end{aligned}$$

Y despejamos $y(t)$

$$y(t) = 1 - 7t + (y_0 - 1)e^{-6t}\cos t + (y_0 - 2x_0 + 1)e^{-6t}\mathrm{sen}t$$

22 de junio de 1998

1. Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano xy, y por los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. (1.5 punto)

2. Hallar las trayectorias ortogonales al haz de curvas $y = e^{cx}$. (1.5 punto)

3. a) Resolver la ecuación (1 punto):

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x$$

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de valores iniciales (1 punto):

$$\begin{gathered} x' = x + y + 1, \\ y' = x + y + e^t, \\ x(0) = -\frac{1}{2},\ y(0) = 1 \end{gathered}$$

4. Hallar la solución general de la ecuación (2 puntos):

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}x^{-1}e^x$$

5. Hallar

$$\int\int\int_T e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$$

donde T es la esfera de radio 1. (1.5 puntos)

6. Resuelva la ecuación diferencial reducible a exacta siguiente (1.5 puntos):

$$(y + e^{-t}) + y' = 0$$

5 de septiembre de 2000

1. Dada la siguiente función
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

   (a) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. (1 punto)

   (b) Estudia la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} f(x)dx$. (1 punto)

   (c) Halla el desarrollo en serie de McLaurin de la función $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ y la suma la serie (1 punto)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... 2n}.$$

   (d) Halla el radio de convergencia del desarrollo de McLaurin de la función f. (1 punto)

2. Halla las derivadas parciales de f con respecto a r y θ, después de hacer el cambio de variable que se indica: (1 punto)
$$f(x,y) = \text{arctg}(g(x,y)),\ x = r\cos\theta,\ y = r\text{sen}\theta.$$

3. Calcula el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$. (2 puntos)

4. Usando el método de variación de las constantes resuelve: (1.5 puntos)
$$4y'' + 36y = \text{cosec} 3x$$

5. Dos especies de individuos habitan en un mismo territorio. Si $x(t)$ e $y(t)$ son sus densidades de población en el instante t, en el instante inicial $x(0) = 10,\ y(0) = 15$ y la ley de evolución es:
$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) - 2e^t \\ y'(t) &= -x(t) + 2y(t) - 2e^t \end{aligned}$$
¿Qué densidad de población habrá después de un segundo? (El tiempo está medido en segundos) (1.5 puntos)

9 de mayo de 2000

1. Halla el intervalo de convergencia de la serie (1 punto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^{n+2}}(x-5)^n$$

2. Estudia la convergencia de la serie (1.5 puntos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

3. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias: (1 punto)

$$a) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+3x^{2/3}+x^{1/5}} \quad b) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x}dx$$

4. Halla la siguiente integral: (1 punto)

$$\int_0^{27} \frac{dx}{x^{1/2}(3-x^{1/3})^{-1/2}}$$

5. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función (2 puntos)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Halla la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(\sqrt{\pi/2},0)$ siendo $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

   Halla la diferencial $df(\sqrt{\pi/2},0)$ y la ecuación del plano tangente a f en el punto $(\sqrt{\pi/2},0)$.

6. Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $f(x,y) = e^{2x-3y}$ en torno al punto $(0,0)$. ¿Qué error se comete al utilizar el polinomio en $(x,y) = (0.1,1)$ en lugar de la exponencial? Este polinomio de Taylor tiene toda una recta de mínimos relativos, halla dicha recta. (2 puntos)

7. Halla el valor mínimo que toma la función $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$ sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. (1.5 puntos)

9 de septiembre de 1997

1. Calcular la integral de línea:

$$\int_\sigma \cos z dx + e^x dy + e^y dz$$

donde $\sigma(t) = (1, t, e^t)$, $0 \leq t \leq 2$. (1.5 puntos)

2. Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$$

Estudiar su convergencia. (1.5 puntos)

3. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

y en caso de que sea convergente calcular su valor. (1.5 puntos)

4. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de la función $\bar{f} : I\!R^2 \to I\!R^2$ definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}, x\text{sen}\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0$$
$$\bar{f}(0,y) = (0,0)$$

(1.5 puntos)

5. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $x^2 + 3y^2 - 3a^2 = C$. (2 puntos)

6. Calcular la solución del sistema:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} \bar{y} + e^{-t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{verificando } \bar{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

7 de junio de 1999

1. Estudia la convergencia de la serie de funciones: (1 punto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

2. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias: (2 puntos)

$$a)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+3x^{2/3}+x^{1/5}},\quad b)\ \int_0^3 \frac{dx}{(2-x)^{1/3}}$$

3. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Halle $D_{\vec{u}}f(0,0)$ siendo $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

¿Se verifica la igualdad $D_{\vec{u}}f(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\operatorname{sen}\theta$? Justifique la respuesta. (1,5 puntos)

4. Halle los extremos relativos de la siguiente función: (1 punto)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2),\ a \neq 0$$

5. En una esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4$ se hace un taladro cilíndrico de radio 1 cm, cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera. Calcule el volumen quitado al efectuar el taladro cilíndrico. (1,5 puntos)

6. Resuelva el problema de valores iniciales: (1,5 puntos)

$$y'' + y = \sec^3(x),\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1/2.$$

7. Elija uno de los siguientes ejercicios: (1,5 puntos)

   (a) Halle la ecuación de la curva de la familia ortogonal a $y = 4x+1+Ce^{4x}$ que pase por el origen.

   (b) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + 4e^{2x}, \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 + 4e^{4x}, \end{aligned}$$

   siendo $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

2 de mayo de 2001 (corregido)

1. Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (2 puntos)

   (a) Determina el radio de convergencia de esta serie de potencias.

   Calculamos la convergencia de la serie mediante el criterio de la raiz. Tenemos que se debe que cumplir

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} < 1 \Rightarrow |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} < 1.$$

   Ahora bien,

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

   luego como se cumple que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el intervalo de convergencia es todo $\mathbb{R}$.

   (b) Calcula $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+1)!}$.

   i. En este caso vamos a añadir los terminos que le faltan a la serie para que empiecen desde el mismo sitio. Tenemos pues que

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} + 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} + 2 - 1 = e^{-2} + 1$$

   ii. Vamos a ir manipulando la serie. Tenemos

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+1)!} = 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - \frac{9}{2} - 3 - 1\right) = 3\left(e^3 - \frac{17}{2}\right).$$

   (c) Sabiendo que si consideramos 4 cifras decimales $e = 2.7183$, ¿cuántos términos del desarrollo de Taylor es necesario tomar para aproximar e con un error menor de 10^{-2}?.

   Vamos a ir calculando los terminos del sumatorio. Tenemos

   $$\begin{aligned}
   a_0 = \frac{1}{0!} = 1,\ s_0 = 1,\\
   a_1 = \frac{1}{1!} = 1,\ s_1 = 1 + 1 = 2,\\
   a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},\ s_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2.5,\\
   a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, s_3 = 2.5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.6667,\\
   a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24},\ s_4 = 2.6667 + \frac{1}{24} = 2.7084\\
   a_5 = \frac{1}{5!} = 0.00833,\ s_5 = 2.7084 + 0.00833 = 2.\,7167
   \end{aligned}$$

   luego necesitamos cinco terminos.

2. Calcula las siguientes integrales: (2 puntos)

$$a)\ \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}, \quad b)\ \int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx, \quad c)\ \int_1^2 \ln x\,dx, \quad d)\ \int_0^1 \ln x\,dx.$$

(a) En este caso tenemos que darnos cuenta de que el denominador tiene un cero en $x = 2$ luego tenemos que separar la integral en dos intervalos

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Si cualquiera de estas dos es divergente, su suma es divergente ya que las dos son positivas. Si simplemente hacemos un cambio de variable del tipo

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left\{ \begin{array}{c} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int_{-2}^0 \frac{dt}{t^2} = \int_0^2 \frac{dt}{t^2},$$

llegamos a una integral que sabemos que es divergente.

(b) El cambio de variable que hay que hacer es $t = x^2$, $dt = 2xdx$, para obtener

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

(c) Como tenemos dos apartados sobre la misma integral, vamos a calcular la integral indefinida. La vamos a hacer por partes

$$\int \ln xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$$

Sustituyendo, tenemos que la integral definida vale

$$\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 2 - 0 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

(d) En este caso, lo que tenemos la funcío a integra no esta definida en el extremo inferior, pero tenemos calculada la integral explicitamente. La cuenta es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \\ &= 1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 1. \end{aligned}$$

luego la integral es convergente.

3. Dada la función $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} y$, se pide:

(a) Hallar vector gradiente de f en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$.

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^y \sin y + e^y \cos y = e^y (\sin y + \cos y)\end{aligned}$$

luego

$$\nabla f(x,y) = \left(e^x (\sin x + \cos x), e^y (\sin y + \cos y)\right).$$

(b) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\theta = \pi/4$.

Como sabemos

$$D_v f = \nabla f \cdot \frac{v}{\|v\|}.$$

El vector unitario en la dirección $\theta = \pi/4$ es $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\pi/4, \sin\pi/4) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, luego

$$D_v f(0,0) = (1,1) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}.$$

(c) ¿Es diferenciable la función en $(1,0)$?

Si, ya que es composición de funciones diferenciables.

(d) Hallar la dirección θ para la que $D_\theta f(0,0) = 0$.

Operando tenemos

$$D_\theta f(0,0) = (1,1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta = 0,$$

y entonces, $\theta = 3\pi/4 + k\pi$, $\forall k \in\ Z$.

4. Halla las derivadas parciales de la función f con respecto a r y θ, después de hacer el cambio de variable que se indica: (2 puntos)

$$f(x,y) = \ln^3(x + g(x,y)), \quad x = r\cos\theta, \; y = r \operatorname{sen}\theta.$$

Llamemos $u = x + g(x,y)$. Tenemos pues que $f(x,y) = \ln^3(u)$. Derivemos ahora por la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{3\ln^2(u)}{u}\frac{\partial u}{\partial r},\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{3\ln^2(u)}{u}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Calculemos ahora la derivada de u. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \left(1 + \frac{\partial}{\partial x}g\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}g\sin\theta\\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{\partial}{\partial x}g\right)r\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}gr\cos\theta\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{3\ln^2(u)}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{3\ln^2(u)}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta =$$
$$= \frac{3\ln^2(u)}{u}\left[\left(1+\frac{\partial}{\partial x}g\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}g\sin\theta\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{3\ln^2(u)}{u}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right]$$

5. Calcula los puntos críticos de la siguiente función y clasifícalos: (2 puntos)

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Calculamos el gradiente que es

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 + 12xy^2 + 24x^2, 4y^3 + 12x^2y\right)$$

y lo igualamos a cero. Tenemos

$$\begin{cases} 4x^3 + 12xy^2 + 24x^2 = 0 \\ 4y^3 + 12x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left(4x^2 + 12y^2 + 24x\right) = 0 \\ y\left(4y^2 + 12x^2\right) = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación solo se anula cuando $y = 0$. En cuanto a la primera, se anula evidentemente, cuando $x = 0$, luego tenemos ya el punto $P_1 = (0,0)$. El parentesis de la primera ecuación para $y = 0$, es

$$4x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -6$$

luego el siguiente punto es $P_2 = (-6,0)$. Veamos el hessiano.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12y^2 + 48x & 24xy \\ 24xy & 12y^2 + 12x^2 \end{pmatrix}.$$

Analizemos el primer punto.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No nos da ninguna información, pero podemos ver como se comporta la función cerca de ese punto. Si $y = 0$, Tenemos que la función es $g(x) = f(x,0) = x^3(x+8)$. Analizamos esta función. Tenemos

$$g'(x) = 3x^2(x+8) + x^3 = 4x^3 + 24x^2,$$
$$g''(x) = 12x^2 + 48x,$$
$$g'''(x) = 24x + 48.$$

Vemos que para $x = 0$, se anulan la primera y segunda derivada pero no la tercera, por lo que este es un punto de inflexión.

Analizemos ahora el otro punto. Tenemos

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 6^2 + 48(-6) & 0 \\ 0 & 12(-6)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}$$

Por lo que P_1 es un punto de inflexión y P_2 es un mínimo gEXAMEN DE CÁLCULO

1. (a) Calcula
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)...(n+n)}{n^n}}$$
   (b) Estudia la convergencia de
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+5}$$
2. (a) Consideramos las funciones $f(x,y) = (x^2 - y^2 + xy,\, y^2 - 1)$ y $g(u,v) = (u+v, 2u, v^2)$. Sea $h = g \circ f$ y denominemos h_1, h_2, y h_3 a las componentes de h. Hallar $\frac{\partial h_1}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial h_3}{\partial y}(1,1)$.
   (b) Halla los extremos relativos de la función $f(x,y) = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ con p, $q \neq 0$ si:
   1^o) $p < 0$ y $q > 0$
   2^o) $p < 0$ y $q < 0$.
3. Calcula
$$\iint_D (x+y)\cos\pi(x+y)dxdy$$
   siendo D el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=0$, $y=x$, $y=x-2$, $y=1-x$.

Observaciones:
• Si tienes que presentarte a una ó dos partes incluida Cálculo, tienes que hacer todos los ejercicios.
• Si tienes que presentarte a tres ó cuatro partes incluida Cálculo, tienes que hacer los ejercicios 2. y 3.

EXAMEN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resuelve la ecuación diferencial
$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x$$
2. Resuelve la ecuación diferencial
$$y''' + 3y'' - 4y = 5e^t$$
3. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y + 3t \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4y + e^{-t} \end{cases}$$

Observaciones:

• Si tienes que presentarte a una ó dos partes incluida Ecuaciones Diferenciales, tienes que hacer todos los ejercicios.
• Si tienes que presentarte a tres ó cuatro partes incluida Ecuaciones Diferenciales, tienes que hacer los ejercicios 2 y 3.

Departamento de Matemáticas **Primero de Licenciatura en Químicas**

Universidad de Castilla-La Mancha *13 de Julio de 2007*

EXAMEN DE CÁLCULO

1. (a) Estudia la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3+1}}$$

(b) Halla los máximos y mínimos de la función $f(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 25$.

2. (a) Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ calcula su intervalo de convergencia.

(b) Dada la función

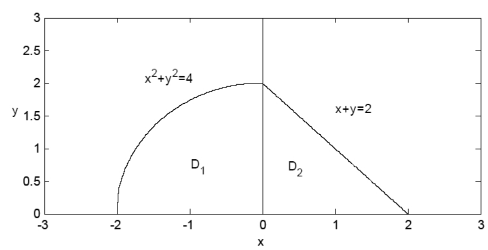
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudia su continudad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen.

3. Calcula la siguiente integral

$$\int\int_D xydxdy$$

siendo $D = D_1 \cup D_2$ el dominio indicado en la figura.



Observaciones:
• Si tienes que presentarte a una ó dos partes incluida Cálculo, tienes que hacer todos los ejercicios.
• Si tienes que presentarte a tres ó cuatro partes incluida Cálculo, tienes que hacer los ejercicios 2. y 3.

EXAMEN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$t(t+y)dy = (t^2+y^2)dt$$

2. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = sen3t + e^{3t}$$

3. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y + 4e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y + 4e^{4t} \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$.

Observaciones:

• Si tienes que presentarte a una ó dos partes incluida Ecuaciones Diferenciales, tienes que hacer todos los ejercicios.

• Si tienes que presentarte a tres ó cuatro partes incluida Ecuaciones Diferenciales, tienes que hacer los ejercicios 2 y 3.

Por favor, **indica** en cada parte del examen **el número de partes** a las que tienes que presentarte.

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS

Departamento de Matemáticas **Primero de Licenciatura en Químicas**

Universidad de Castilla-La Mancha *19 de Mayo de 2009*

EXAMEN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resuelve la ecuación diferencial
$$y' = \frac{3ty + 2y^2}{t^2}$$

2. Sabemos que un material radiactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento, es decir
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$
En una prueba realizada con 60 mg de este material (i.e. $N_0 = 60$) se observó que después de 3 horas permanecía el 80% de la materia. Se pide:
(a) Resolver la ecuación diferencial
(b) Calcular el valor de λ
(c) Qué cantidad de material permanece cuando $t = 5$ horas?
(d) Para qué valor de t, la cantidad de material es 1/4 de la cantidad inicial?

3. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ley
$$x'' + 4x' + 13x = 0$$
Si dicha partícula empieza su movimiento en $x = 0$ (i.e. $x(0) = 0$) y con una velocidad inicial de 6m/s (i.e. $x'(0) = 6$), hallar:
(a) $x(t)$
(b) los tiempos en que se producen las paradas (i.e. los t para los que $x'(t) = 0$)

4. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} x' = -3x + y + 3t \\ y' = 2x - 4y + e^{-t} \end{cases}$$

PARTE DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente, es decir $N'(t) = \lambda N(t)$ donde $N(t)$ es el número de bacterias en el instante t medido en horas. Si se ha hallado que el número de bacterias se duplica en 4 horas, qué número cabe esperar al cabo de 12 horas? (La solución quedará en función del número inicial de bacterias N_0).

2. Resulve el siguiente problema de valor inicial

$$y'(t) + y(t) = e^t \tag{1}$$

$$y(0) = 1 \tag{2}$$

3. La ecuación diferencial $x''(t) + 9x(t) = 3$ describe la posición $x(t)$ de un objeto enganchado al final de un muelle. Se pide:

   a) Resuelve la ecuación diferencial sabiendo que la posición inical del objeto es $x(0) = 1/3$ y su velocidad inicial $x'(0) = 0$.

   b) Calcula la posición del objeto al cabo de 10 s.

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = 2x + 4y \tag{3}$$

$$y'(t) = -x + 6y \tag{4}$$

   sabiendo que $x(0) = -1$ e $y(0) = 6$.

Observaciones:

- Si te presentas a una ó dos partes tienes que hacer todos los ejercicios.
- Si te presentas a tres partes tienes que hacer los ejercicios 1, 3 y 4.
- Si te presentas a cuatro partes tienes que hacer los ejercicios 1 y 4.

PARTE DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Entre los alumnos de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales se extiende el rumor (falso) de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 100 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído (es decir $N'(t) = \lambda(100 - N(t))$, siendo N(t) el número de alumnos que conocen el rumor en el instante t, medido en días), cuántos días tardarán en saberlo 95 alumnos, sabiendo que a los dos días lo sabían 85 alumnos?.

   Nota: El rumor en el instante inicial no es conocido por ningún alumno, sino que viene de una fuente externa.

2. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$(\cos t - t\cos y)dy - (\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} t)dt = 0 \tag{1}$$

3. Una ecuación importante en la teoría de oscilaciones forzadas en sistemas mecánicos o eléctricos es la ecuación diferencial no homogénea

$$m\frac{dx^2}{dt} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 coswt. \tag{2}$$

   Suponiendo que $m = 1, c = 0, k = 1, F_0 = 1$ y $w = 2$, resuelve dicha ecuación diferencial si $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = y + e^{-t} \tag{3}$$

$$y'(t) = x + e^{-t} \tag{4}$$

Observaciones:

- Si te presentas a una ó dos partes tienes que hacer todos los ejercicios.
- Si te presentas a tres partes tienes que hacer los ejercicios 1, 2 y 4.
- Si te presentas a cuatro partes tienes que hacer los ejercicios 2 y 4.