PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS
Parte I: Álgebra **Departamento de Matemáticas**
Primero de Ingeniería Química *Universidad de Castilla-La Mancha*

Tema 1: Espacios vectoriales

1. Determina si cada uno de los siguientes subconjuntos de $I\!R^3$ es subespacio vectorial:

   (a) $S_1 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x = 0\}$; (b) $S_2 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x - 3y + 2z = 0\}$
   (c) $S_3 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x = 3y = -z\}$; (d) $S_4 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x = y \text{ ó } y = z\}$
   (e) $S_5 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : y + 2x = 0,\ z = 5x\}$; (f) $S_6 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x^2 - y^2 = 0\}$
   (g) $S_7 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x - y = 1\}$; (h) $S_8 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : xy = 0\}$.

2. Estudia la independencia lineal de los vectores de $I\!R^3$:

   (a) $\mathbf{u}_1 = (1,-1,0),\ \mathbf{u}_2 = (1,3,-1),\ \mathbf{u}_3 = (5,3,-2)$.
   (b) $\mathbf{v}_1 = (2,2,-1),\ \mathbf{v}_2 = (4,4,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,0,-1)$.
   (c) $\mathbf{w}_1 = (3,-1,2),\ \mathbf{w}_2 = (2,1,3),\ \mathbf{w}_3 = (0,1,1)$.

   En cada caso, determina las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio que engendran. Busca además una base de dichos subespacios y, cuando proceda, complétalas a una base de $I\!R^3$.

3. Determina una base $\mathcal{B}$ y las ecuaciones paramétricas del subespacio S de $I\!R^4$ dado por las ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & -t & = & 0, \\ 2x & +2y & -z & -t & = & 0, \\ 4x & & +z & & = & 0, \\ 3x & +y & & +t & = & 0. \end{array}\right.$$
   Determina una base de $I\!R^4$ que contenga a $\mathcal{B}$.

4. Sea $I\!P_2(I\!R)$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales definidos en $I\!R$. Comprueba que $p_1(x) = x,\ p_2(x) = x - 1,\ p_3(x) = (x-1)^2$ forman una base de $I\!P_2$ y determina las coordenadas de $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ respecto de esa base.

5. Sea $\mathcal{F}(I\!R, I\!R)$ el espacio de todas las funciones de $I\!R$ en $I\!R$. Estudia si W es un subespacio de $\mathcal{F}(I\!R, I\!R)$ donde:

   (a) $W = \{f \in \mathcal{F}(I\!R,I\!R) : f(1) = 0\}$, (b) $W = \{f \in \mathcal{F}(I\!R,I\!R) : 2f(0) = f(1)\}$,
   (c) $W = \{f \in \mathcal{F}(I\!R,I\!R) : f(-x) = -f(x)\}$.

6. En el espacio vectorial $E = C^2(I\!R, I\!R)$ de todas las funciones continuas con segunda derivada continua se considera para $a, b \in I\!R$, el subconjunto $F = \{f \in E : f'' + af' + bf = 0\}$. Prueba que F es un subespacio de E.

7. Estudia si las siguientes familias de vectores son linealmente dependientes o independientes:

   (a) $\{e^{2x}, x^2, x\} \subset \mathcal{F}(I\!R, I\!R)$.
   (b) $\{\text{sen}\pi t, \text{sen}2\pi t\} \subset \mathcal{C}[0,1]$ donde $\mathcal{C}[0,1]$ denota las funciones continuas definidas en $[0,1]$ con valores en $I\!R$.

8. Encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(0,1,1,1)$ y $(1,1,0,1)$.

9. Demuestra que $\mathcal{B}_n = \{1, (x-2), (x-2)^2, ..., (x-2)^n\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$. Si $n = 4$, halla las coordenadas del vector $p(x) = 5x^4 + 6x^3 - 4x + 2$ respecto de la base $\mathcal{B}_4$.

10. Estudia si los siguientes subconjuntos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

    (a) $S = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : r(A) = 1\}$, donde $r(A)$ designa el rango de A.

    (b) $T = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 0\}$, donde traza$(A)$ denota la suma de los elementos de la diagonal principal.

11. Se considera el subconjunto P de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n-uplas de números reales, tales que los elementos de cada n-upla forman una progresión aritmética. Prueba que P es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y determina una base del mismo. Calcula respecto de la base hallada las coordenadas del vector $(4, 7, 10, ..., 3n+1)$.

12. Determina una base para la suma y la intersección de los espacios F y G engendrados por

$$\{(1,-1,1,2),\ (0,1,3,1)\} \text{ y } \{(1,0,4,3),\ (1,1,0,-1)\}, \text{ respectivamente.}$$

13. Sea $P = \{1,\ \text{sen}^2 x,\ \cos^2 x,\ \text{sen}\, 2x,\ \cos\, 2x\}$.

    (a) Estudia la dependencia e independencia lineal de P.

    (b) Encuentra una base del subespacio $L(P)$.

    (c) Calcula, respecto de la base encontrada en (b), las coordenadas de:

$$f(x) = \cos 2x + \text{sen} 2x,\ g(x) = \cos x.$$

14. Demuestra que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de los siguientes subespacios vectoriales:

    (a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\},\ \ W_2 = \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

    (b) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\},\ \ U_2 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$.

    (c) $V_1 = \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\},\ \ V_2 = \{(0,y,y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\},\ \ V_3 = \{(z,z,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

15. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el subespacio $W = \{(x,y,z) : x+y-z = 0,\ x+y+z = 0\}$.

    (a) Halla la ecuación de un suplementario de W.

    (b) Descompón según W y el suplementario hallado en (a), el vector $(-1,3,4)$ de $\mathbb{R}^3$.

16. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $V_1 = \{(0,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\},\ V_2 = L\{(1,1,1),(1,2,3)\}$. Determina una base de $V_1 + V_2,\ V_1 \cap V_2$ y obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas de $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

17. Consideramos los subespacios V y W contenidos en $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \lambda + \gamma \\ x_2 &= \mu + \gamma \\ x_3 &= \lambda + \mu + 2\gamma \end{aligned} \right. \quad , \quad W \equiv x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

(a) Determina una base de V, $V+W$, $V\cap W$.
(b) Encuentra unas ecuaciones implícitas para $V\cap W$.
(c) Determina una base de un suplementario de $V\cap W$.

18. Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de éstos. Verifica la verdad o falsedad de esta afirmación en los ejemplos siguientes:

 (a) $\{(a,b)\in R^2 : a=-1\}$; base $\{(-1,3)\}$.
 (b) $\{p(x)\in \mathbb{P}_3 : (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$; base $\{x-1, x^2-1\}$.
 (c) $\text{com}(B)=\{A\in M_{2\times 2}/BA=AB\}$ con $B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; base $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

19. Halla en cada uno de los ejemplos siguientes la suma y la intersección del par de subespacios dados y comprueba que se verifica la ecuación

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

 (a) $V_1=\text{com}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $V_2=\text{com}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. (Ver el ejercicio anterior).
 (b) $V_1=\{p(x)\in \mathbb{P}_3/(x+1) \text{ divide a } p(x)\}V_2=\{p(x)\in \mathbb{P}_3/(x-1) \text{ divide a } p(x)\}$.

20. Demuestra que el subespacio vectorial de las funciones pares y el de las impares son subespacios suplementarios del espacio vectorial de las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

21. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Se consideran dos subconjuntos suyos, $F=\{p(x)\in \mathbb{P}_2(x) : p(x)=ax^2-ax+2a,\ a\in\mathbb{R}\}$ y $G=\{p(x)\in\mathbb{P}_2 : p(x)=(2\alpha-\beta)x^2+\alpha x-2\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Se pide

 (a) Probar que F y G son subespacios vectoriales de $\mathbb{P}_2$. Halla sus dimensiones.
 (b) Determina $F\cap G$ y $F+G$.

22. Halla la matriz de paso de la base $\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}$ a la base $B'=\{(2,3),(-3,-4)\}$ y la matriz de paso de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Si el vector $\vec{x}$ tiene por coordenadas $(1,1)_{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}$, ¿Qué coordenadas tiene en la base $\mathcal{B}'$? Si el vector $\vec{y}$ tiene por coordenadas $(5,0)_{\mathcal{B}'}$, en la base $\mathcal{B}'$, ¿qué coordenadas tiene en la base $\mathcal{B}$?

23. Halla la matriz de paso de la base $\mathcal{B}=\{1,\ x\}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ a la base $\mathcal{B}'=\{2+3x,\ -4+5x\}$. El polinomio $p(x)=2-x$, ¿qué coordenadas tiene en la base $\mathcal{B}'$? El polinomio de coordenadas $(5,5)_{\mathcal{B}'}$ en la base $\mathcal{B}'$, ¿qué coordenadas tiene en la base $\mathcal{B}$?

24. En el espacio vectorial de matrices 2×2 con coeficientes reales, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, halla las coordenadas de la matriz A en la base $\mathcal{B}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

Tema 2: Espacios vectoriales euclídeos

1. Determina una base ortonormal para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por:

   (a) $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (5, 3, -2),\ \mathbf{u}_3 = (1, -1, 0)$.

   (b) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1),\ \mathbf{v}_3 = (3, 2, 3)$.

   (c) $\mathbf{w}_1 = (3, -1, 2),\ \mathbf{w}_2 = (1, 0, 2),\ \mathbf{w}_3 = (-2, 1, 0)$.

   Encuentra además las ecuaciones cartesianas de cada subespacio y halla su suplementario ortogonal.

2. En $\mathbb{R}^4$ con su producto escalar usual se pide

   (a) Determina un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1, 2, 1, 0)$, $(0, -1, 1, 0)$ y $(1, 1, -2, 1)$.

   (b) Obtén por el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para

   $$V = L\left\{(1, 2, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, -2, 1)\right\}.$$

3. En el espacio vectorial $E = \mathcal{C}[-1, 1]$, con el producto escalar

   $$< f, g >_{\mathcal{C}} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

   se consideran los vectores $\mathbf{u}_1(x) = 1,\ \mathbf{u}_2(x) = x,\ \mathbf{u}_3(x) = 1 + x$. Calcula el ángulo que forman entre sí.

4. Se considera en el espacio $\mathbb{P}_3$ el subconjunto de los cuatro primeros polinomios de Chebychev, $T = \{1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x\}$. Demuestra que:

   (a) Los polinomios son linealmente independientes.

   (b) Los polinomios $x,\ 2x^2 - 1$ y $4x^3 - 3x$ son ortogonales con el polinomio 1 respecto al producto escalar ponderado

   $$< f, g >_{\mathcal{T}} = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

5. Demuestra que si 2 vectores son ortogonales, son linealmente independientes.

6. Aplica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las funciones $u_n = x^n$, $n =$ 0, 1, 2, 3 del espacio vectorial $E = \mathbb{P}((-1, 1))$, con el producto escalar $< f, g >_{\mathcal{C}}$.

7. Demuestra que las funciones $\{u_k\}$ son ortonormales dos a dos con el producto escalar $< f, g >_{\mathcal{C}} = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$, siendo $u_k(t) = \sqrt{2}\sin(k\pi t)$.

8. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones:

   $$\begin{cases} x + 2y - z - 2t = 0, \\ 2x + y - 2z - t = 0, \\ 2x + 7y - 2z - 7t = 0. \end{cases}$$

(a) Determina las ecuaciones paramétricas de H y una base ortonormal suya.

(b) Calcula la proyección ortogonal sobre H del vector $u = (2, -2, 3, -3)$.

(c) Determina una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga a la base de H hallada anteriormente.

(d) Repite lo mismo en $\mathbb{R}^3$ con el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

9. Dado el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1 y el producto escalar $< f, g >_{\mathcal{C}}$ en $[-1, 1]$, se pide:

   (a) Hallar la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = x + 3$ sobre el subespacio engendrado por $x + 2$.

   (b) Calcular una base ortonormal a partir de la base $\{1, x\}$.

10. Sea S_2 el subespacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con la base ε y la matriz A, donde

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Definimos el producto escalar $\langle u, v\rangle$ como $\langle u, v\rangle = u^t A v$ para todo $u, v \in S_2$. Se pide

   (a) Determina la norma de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determina el ángulo que forman las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Halla el subespacio suplementario ortogonal del subespacio de S_2 generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Utilizando el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, encuentra el complemento ortogonal de W, siendo:

$$a)\ W = L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{u} = (1, 0, 1),\ \mathbf{v} = (2, -1, 1); \quad b)\ W \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

12. En el espacio vectorial $\mathbf{E} = \mathcal{C}[-1, 1]$, con el producto escalar $< f, g >_{\mathcal{C}}$, se considera la función $f(x) = e^x$. Busca el polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que dos más próximo a f y calcula $\|f(x) - p(x)\|_{\mathcal{C}}$.

13. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación cartesiana $x + 2y - z = 0$.

   (a) Determina las ecuaciones paramétricas de H y una base ortonormal suya.

(b) Calcula el vector de H más próximo a $\mathbf{u} = (1,1,1)$ y la distancia de $\mathbf{u}$ a H.

(c) Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$que contenga a la base hallada anteriormente.

14. Aplica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las funciones $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ y $f_3 = x^3$del espacio vectorial $E = \{v : [0,1] \to \mathbb{R},\ v \text{ es derivable}, v(0) = 0\}$ con el producto escalar $< f, g >= \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

15. Calcula los coeficientes de Fourier[1] de la función $f(x) = e^{-x}$ y la norma de la mejor aproximación de $f(x)$ como combinación lineal de las funciones obtenidas anteriormente.

16. Prueba que para todo número real θ, la transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

es una isometría.

17. $*$ Dado el subespacio S, generado por los vectores: $\{(1,0,0), (-1,1,0), (2,1,0)\}$, calcula la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1,1,1)$ sobre S.

18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales del plano distintos de cero. Entonces para todo vector $\vec{w}$ del plano existen α y β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Usa el producto interno para encontrar α y β en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

19. Dado $\mathbb{P}_2([-1,1])$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y el producto escalar $< f, g >_{\mathcal{C}}$ en $[-1,1]$, se pide:

(a) Comprueba que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para dos polinomios arbitrarios de orden dos. (Toma dos cualesquiera y haz las cuentas).

(b) Demuestra que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \leq 2\left(\int_{-1}^{1} (p(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2([-1,1])$.

20. Sea $\mathbb{R}^2_{+-}$ el espacio formado por los vectores de $\mathbb{R}^2$ con la métrica (no es un producto escalar) $\langle u, v\rangle = u^t \cdot A \cdot v$ siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprueba, encontrando un ejemplo, que se verifican las siguientes propiedades.

(a) Existen vectores con $\langle u, u\rangle < 0$ (Vectores temporales).

(b) Existen vectores con $\langle u, u\rangle = 0$ (Vectores luz).

(c) Existen vectores con $\langle u, u\rangle > 0$ (Vectores espaciales).

[1] Los coeficientes de Fourier son las coordenadas de la proyección de la función sobre el subespacio considerado

(d) Comprueba con un ejemplo que para vectores de los apartados a y b la desigualdad de Cauchy-Schwartz toma la otra dirección, es decir que

$$\|u\| \cdot \|v\| \leq |\langle u \cdot v \rangle|$$

Nota: Este espacio es una versión dos-dimensional del espacio cuatridimensional de Minkowski, que es donde trabaja la teoría de la relatividad especial de Einstein. Este es el ejemplo más sencillo de espacio vectorial no euclídeo.

Tema 3: Aplicaciones lineales y matrices

1. $*$ Dada la aplicación lineal:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y,z,w) = (x - 2z, 2y + 3w)$$

   (a) Encuentra su representación matricial respecto a las bases canónicas.
   (b) Halla su núcleo y su imagen.
   (c) Calcula la imagen por T de un vector ortogonal a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$.
   (d) Halla la matriz de la aplicación con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^4$ y la base $B = \{(1,3),(2,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$.

2. Estudia si la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$$

   es una transformación ortogonal.

3. Sea $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que dos y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ la aplicación lineal que cumple:

$$f(1,1,1) = 2\beta + \alpha x,\ f(0,-1,1) = \alpha x + \beta x^2,\ f(0,0,1) = \beta + (\alpha - 1)x$$

   donde α y β son números reales. Se pide:

   (a) Halla α y β para que f no sea inyectiva.
   (b) Halla $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ en función de α y β.
   (c) Sea el subespacio $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b\}$. Halla el subespacio $f(U)$ y su dimensión dependiendo de los valores de α y β.

4. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

   (a) $M_B : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times1}(\mathbb{R})$ dada por $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) $M_B : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dada por $S_B(A) = A + B$ con $B \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ fija.
   (c) $A : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ dada por $A(p(x)) = p(x+1)$.
   (d) $A : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ dada por $A(p(x)) = p(x) + 1$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_1, x_1 - x_3)$. Encuentra la matriz de f respecto a la base canónica. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $V_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
   (b) $V_2 = \{(0,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $V_3 = \{(x_1,x_2,x_3) = t(-1,1,1) : t \in \mathbb{R}^3\}$.

6. Sabiendo que la aplicación f transforma los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ de $I\!R^3$ en los vectores $\mathbf{w}_1 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{w}_3 = (6, 2, 3)$ respectivamente, encuentra la matriz de f en las siguientes bases:

   (a) La base canónica de $I\!R^3$.

   (b) La base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

7. Halla las ecuaciones del núcleo y de la imagen de las siguientes aplicaciones lineales, indicando si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:

   (a) $M_B : M_{2\times 2}(I\!R) \longrightarrow M_{2\times 1}(I\!R)$ dada por $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $f : I\!P_3 \longrightarrow I\!P_3$ tal que, $f(1) = x^2 + 1,\ f(x) = x + 2,\ f(x^2) = x^3 - x,\ f(x^3) = 1$.

   (c) La aplicación derivación de $I\!Pn$ en $I\!P_{n-1}$.

8. Sea V un espacio vectorial real y W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales de V y f una aplicación de $W_1 \times W_2$ en V definida por: $f(x, y) = x + y$.

   (a) Demuestra que f es una aplicación lineal.

   (b) Demuestra que $\ker f = \{(x, -x)/x \in W_1 \cap W_2\}$.

   (c) Demuestra que $\ker f$ es isomorfo a $W_1 \cap W_2$.

9. Demuestra que si f es una aplicación lineal de V en V', y g es una aplicación lineal de V' en V'', entonces $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$

10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, f y g endomorfismos de V. Demuestra que:

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \operatorname{Im} f).$$

11. Demuestra que si f es un endomorfismo de un espacio vectorial V, entonces $f^2 = 0$ si, y sólo si, $f(V) \subset \ker f$.

12. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra que si $f^2 = f$ entonces se verifica que

$$V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f.$$

13. Demuestra que si un endomorfismo de V es idempotente, es decir, $f^2 = f$, entonces se verifica:

   (a) $x \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow x = f(x)$.

   (b) $1 - f$ es idempotente.

   (c) $\ker(1 - f) = \operatorname{Im} f$.

   (d) $\ker f = \operatorname{Im}(1 - f)$.

14. Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V. Demuestra que:

   (a) Si $\dim V = 2n + 1$, entonces $\ker f \neq \operatorname{Im} f$.

   (b) Si $\dim V = 2n$, entonces $\ker f = \operatorname{Im} f$, si, y solo si, $f^2 = f$ y $\dim \operatorname{Im} f = n$.

15. En $I\!R^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Clasifica el endomorfismo f dado por $f(\mathbf{u}_1) = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$.

16. Se consideran 3 espacios vectoriales A, B, C, cuyas bases respectivas son

$$\mathcal{B}_A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\},\ \mathcal{B}_B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}, \mathcal{B}_C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

y dos homomorfismos dados respectivamente por

$$\begin{array}{rcll} f: & A & \longrightarrow & B \\ & \mathbf{u}_1 & \longrightarrow & \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{u}_2 & \longrightarrow & \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{u}_3 & \longrightarrow & 2\mathbf{b}_2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcll} g: & B & \longrightarrow & C \\ & \mathbf{b}_1 & \longrightarrow & \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ & \mathbf{b}_2 & \longrightarrow & \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \end{array}$$

Se pide:

(a) Matriz del homomorfismo $h = g \circ f : A \longrightarrow C$.

(b) Encontrar el conjunto $h^{-1}(1, 1, 1)$, donde $(1, 1, 1) \in C$.

(c) Núcleo de h.

(d) Imagen del subespacio intersección de los subespacios siguientes:

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha + \beta \\ x_2 = \alpha - \beta \\ x_3 = -\alpha \end{array} \right. , \quad V_2 \equiv x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

17. Determina en la base canónica de $I\!R^3$ la matriz del endomorfismo f definido por las siguientes condiciones:

(a) La aplicación f, restringida al plano que tiene por ecuación $x + y + z = 0$, es una homotecia de razón 3.

(b) La aplicación f transforma en sí misma la recta de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + 3z = 0, \\ x + 2y + z = 0. \end{array} \right. .$$

18. Demuestra que si f es una aplicacion ortogonal, entonces es un isomorfismo.

19. En $I\!R^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y el endomorfismo f definido respecto a la base $\mathcal{B}$ por:

$$f(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3) = (x_2 + x_3)\mathbf{u}_1 + (x_1 - x_2)\mathbf{u}_2 + (x_2 + x_1)\mathbf{u}_3.$$

Se pide:

(a) Expresión analítica de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

(b) Ecuaciones de $\ker f$ y de $\mathrm{Im} f$.

(c) Determinar una base de $\ker f$ y ampliarla a una base $\mathcal{B}_1$ de $I\!R^3$.

(d) Hallar la expresión analítica de f respecto de la base $\mathcal{B}_1$.

20. Sea V un espacio vectorial sobre $I\!R$ de dimensión 3. Para cada $a \in I\!R$, se considera el endomorfismo $f_a : V \longrightarrow V$ cuya matriz respecto a una base fija B de V es,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Clasifica los endomorfismos f_a según los valores de a.

21. Consideremos la base de $I\!R^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (-1,3,5), \mathbf{u}_3 = (-2,1,2)\}$ y sea $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \\ T(\mathbf{u}_3) &= 4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

   (a) Determina la matriz de la transformación respecto de la base canónica y las ecuaciones cartesianas del $\ker T$ referidas a la base canónica y a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.
   (b) Las ecuaciones cartesianas del subespacio L engendrado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ y la proyección ortogonal de $\mathbf{u}_3$ sobre L.

22. Halla una aplicación lineal $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ tal que:

   (a) $f(1,0,0)$ sea proporcional a $(0,0,1)$.
   (b) $f^2 = f$
   (c) La ecuación de $\ker f$ sea $x + z = 0$

23. Sea $f : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^4$ el homomorfismo definido por

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (0,0,1),\ f(1,0,1,0) = (1,1,-1), \\ f(1,1,1,0) &= (0,0,-1),\ f(-1,-2,0,0) = (1,1,1). \end{aligned}$$

   (a) Halla la matriz de f respecto de las bases canónicas.
   (b) Halla la dimensión y ecuaciones cartesianas de $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

24. Se considera el homomorfismo $f : I\!R^3 \to I\!R^2$ que hace corresponder a los vectores (1,0,1), (0,1,0), (,1,1,0) los vectroes $(1,0), (0,2), (1,1)$, respectivamente. Se pide:

   (a) Matriz asociada a f en las bases canónicas de $I\!R^3$ y $I\!R^2$.
   (b) Subespacio transformado de $V \equiv 5x_1 - 3x_2 - x_3$.
   (c) Ecuación de $f(V)$ en la base $\mathcal{B} \equiv \{(1,1), (2,0)\}$.

25. En un espacio vectorial V de dimensión n se considera un endomorfismo f tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Sea $\mathbf{v}$ tal que $f^{n-1}(v) \neq 0$

   (a) Demuestra que $\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), f^2(\mathbf{v}), ..., f^{n-1}(\mathbf{v})$ es una base de V.
   (b) Halla la matriz de f respecto dicha base.

26. Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales. Se considera la aplicación $u : \mathbb{P}_{n-1} \to \mathbb{P}_n$ tal que $u(P) = Q$ con Q definido por

$$Q(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} P(x)\right), x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Demuestra que la aplicación es lineal.
   (b) Halla el núcleo de u.
   (c) Halla la dimesión de la imagen de u.
   (d) Determina la matriz de u en las bases canónicas.

27. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$definida por

$$f(x, y, z) = (x + z, y + z).$$

   Determina las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, tales que la matriz de f respecto a $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. Sea la matriz de orden n con coeficientes en $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Halla A^p pasando a endomorfismos de $\mathbb{R}^n, (p \in \mathbb{N})$.

29. Se considera el homorfismo $f : \mathbb{P}_3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$f\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \begin{pmatrix} a & b+d \\ c+d & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Halla la matriz del homorfismo en las bases canónicas.
   (b) Da las ecuaciones implícitas del subespacio imagen.
   (c) Calcula una base del núcleo.

30. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno, con las operaciones usuales, y f el endomorfismo de V que verifica las condiciones siguientes:

   - $f(1 + x) = 2 - x$.
   - El núcleo de f coincide con la imagen.

   Se pide:

   (a) Matriz del endomorfismo f en la base $\mathcal{B} = \{1, x\}$.
   (b) Calcular una base de $f(W)$, siendo W el subespacio de ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$.
   (c) Imagen inversa del conjunto $\{(1, 1), (0, 0)\}$.

31. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{e}_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_3, & g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, & g(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2, \\ f(\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1, & g(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3. \end{array}$$

(a) Estudia si f y g son ortogonales.

(b) Halla $h = f \circ g$.

32. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a la base canónica viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -a \\ a & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores de a la matriz A es ortogonal.

Tema 4: Valores y vectores propios

1. Halla los valores propios y los vectores propios de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que están dadas por las siguientes matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{c} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{d} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{f} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{g} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   En los casos que sea posible halla una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios, y la matriz en esa base, de las aplicaciones dadas en el ejercicio anterior.

2. Señala cuáles de las siguientes matrices pueden reducirse a una matriz diagonal y encuentra una matriz de cambio de base P:

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Busca los valores y vectores propios de la aplicación derivación D, en $\mathbb{P}_3$.

4. Determina para que valores $a, b \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Estudia para que valores reales de α la matriz A es diagonalizable y en los casos en que lo sea, encuentra su forma diagonal, D, y una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Demuestra que si $\mathbf{x}$ es vector propio de f para el valor propio λ, entonces $\mathbf{x}$ es vector propio de f^n para el valor propio λ^n, $n \in N$. ¿Qué ocurre si además f es invertible?

7. En $\mathbb{R}^3$, consideramos el endomorfismo f dado por

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z),$$

   y sea A la matriz de f respecto de la base canónica. Determina: autovectores, autovalores, diagonalización y matriz de paso.

8. En $\mathbb{R}^3$ consideramos la aplicación $f(x, y, z) = (3x + y, -x + y, 0)$. Halla los valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?

9. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y f un endomorfismo de E tal que $f^2 = f$. Demuestra que $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

10. Si $\dim(E) = 3$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es una base de E tal que

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}, f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, f(\mathbf{w}) = 0,$$

determina una base $\mathcal{B}'$ de E respecto de la cual la matriz de f sea diagonal.

11. Estudia si es diagonalizable el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(a, b) = (a + b, b)$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya expresión analítica respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula los autovalores y sus subespacios propios asociados.

   (b) ¿Se puede encontrar otra base $\mathcal{B}'$, tal que respecto a ella sea f diagonalizable?.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

   (a) Halla la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$.

   (b) Calcula los autovalores, los subespacios propios y comprueba que el subespacio suma de estos subespacios es suma directa.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya expresión analítica respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

   Encuentra una nueva base B' tal que respecto de ella la expresión analítica de f venga dada por una matriz diagonal.

15. Eleva A a la potencia enésima siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

16. Demuestra que una matriz A y su traspuesta A^t tienen el mismo polinomio característico.

17. Sea A una matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Halla la condición necesaria y suficiente para que los valores propios sean iguales.

18. Halla todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales que tengan por valores propios 1 y -1.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $V = W_1 \oplus W_2$ donde $\dim(W_1) = m$. Encuentra el polinomio característico de la proyección π_1 de V sobre W_1.

20. En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que tres se define la aplicación f dada por $f(p(x)) = p(x) + p'(x)$.

   (a) Demuestra que f es un endomorfismo.

   (b) Halla la matriz A asociada al endomorfismo f respecto de la base canónica.

   (c) Sea la matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = A + J$. Prueba que las matrices I, B, B^2, B^3 y B^4 son linealmente independientes.

   (d) Halla la matriz inversa de B.

21. Se considera la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Prueba que es diagonalizable y determinar una matriz P que permita la diagonalización.

22. Encuentra una matriz C tal que $C^2 = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{pmatrix}.$$

23. Calcula, aplicando el teorema de Cayley-Hamilton, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz de un endomorfismo referido a dicha base. En dicho endomorfismo, los subespacios

$$V_1 \equiv x + y + z = 0, \quad V_2 = \begin{cases} x - y = & 0 \\ x - z = & 0 \end{cases}$$

   están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = 1/2$. Se pide:

   (a) Diagonalizar la matriz A.

   (b) Calcular la matriz $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$.

   (c) Calcular la matriz $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$.

25. Estudia para qué valores reales de t, la matriz A es diagonalizable en el campo real siendo

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

26. Diagonaliza las siguientes matrices simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculando una matriz de paso P ortogonal que permita escribir su forma diagonal A' como $A' = P^t AP$.

27. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ del que se conoce

- $f(e_2) = -e_2$.
- $f(e_3 + e_4) = e_3 + e_4$.
- $f(e_5) = 2e_5 + e_1 - e_2$.
- El polinomio característico de f tiene la raíz triple 2.
- Las ecuaciones implícitas, respecto de la base $\mathcal{B}$, del núcleo del endomorfismo $f - 2I$ son
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Halla la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$.

28. Dada la matriz A:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
donde α y β son dos números reales. Se pide

(a) Estudiar para qué valores de α y β la matriz A es diagonalizable.

(b) Para aquellos valores para los que sea diagonalizable hallar la matriz diagonal y la matriz de paso correspondiente en función de α y β.

29. Estudia para qué valores de los parámetros a y b, reales, la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$
es diagonalizable y calcula en ese caso la matriz diagonal y la matriz de paso.

30. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Se sabe que una base del núcleo del endomorfismo está constituida por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ y que la imagen del vector $(0, 2, 1)$ es el vector $(1, 1, 0)$. Se pide

(a) utovalores y subespacios invariantes de f.

(b) Diagonalizar el endomorfismo f.

(c) Clasificar dicho endomorfismo.

(d) Obtener los subespacios invariantes de f^n.

Tema 5: Formas bilineales y cuadráticas

1. Estudia si las siguientes aplicaciones son formas bilineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1 + 3x_1y_3 + x_2y_3$.

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

   (c) $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2$.

   (d) $t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $t(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_3$.

   (e) $l : V \times V \to K$ definida por $l(\vec{x}, \vec{y}) = \phi_1(\vec{x})\phi_2(\vec{y})$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son aplicaciones lineales de V en K.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

   Se pide:

   (a) Demostrar que f es bilineal. Decir si es simétrica.

   (b) Hallar la matriz A de f respecto de la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

   (c) Hallar la matriz A' de f respecto de la base $\{(2, 1), (1, -1)\}$.

   (d) Hallar la matriz P tal que $A' = P^tAP$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

   Se pide:

   (a) Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica.

   (b) Hallar la matriz A' de f respecto de la base $\{(2, 0, 0), (1, 2, 0), (-3, 1, 1)\}$.

   (c) Hallar la matriz P tal que $A' = P^tAP$.

4. Considérese la forma bilineal

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) &= \alpha x_1y_1 + \beta x_1y_2 + 6x_2y_1 + \gamma x_2y_2 + \delta x_1y_3 - 2x_3y_1 \\ &\quad + \epsilon x_2y_3 - 4x_3y_2 + \kappa x_3y_3. \end{aligned}$$

   Estudia para qué valores de los parámetros la forma es simétrica y para cuales es antisimétrica.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

   Se pide obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$$

   Se pide:

(a) Hallar la matriz asociada a la forma bilineal.

(b) Decir si el producto escalar definido en el tema 2 es una forma bilineal.

(c) Hallar la matriz del producto escalar respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$.

7. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes, encuentra la matriz simétrica A tal que la forma cuadrática pueda ser escrita en la forma $\vec{x}^t A\vec{x}$:

   (a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$.

   (b) $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_4 + x_4^2$.

   (c) $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 3x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 - 4x_3x_4 - 6x_4^2 + 3x_1x_5 - 5x3x_5 + x_4x_5 - x_5^2$.

   (d) $8x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2$.

8. De la forma cuadrática $\omega : I\!R^3 \to I\!R$ se sabe que

$$\begin{aligned} \omega(\vec{e}_1) = 0, &\qquad \omega(\vec{e}_2) = -2, \\ \omega(\vec{e}_3) = 3, &\qquad \omega(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 5, \\ \omega(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 6, &\qquad \omega(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -4, \end{aligned}$$

   donde los vectores que aparecen son los de la base canónica. Halla la expresión analítica de ω.

9. Escribe cada una de las formas cadráticas siguientes en las nuevas variables x', y', y z' de modo que no aparezcan términos cruzados (xy, xz, yz).

   (a) $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$.

   (b) $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2$.

   (c) $-x^2 + 4xy - y^2 + 4xz + 4yz + z^2$.

   (d) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$.