5 de julio de 1996

1. Dada la aplicación lineal:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$$

a) Encuentre su representación matricial respecto a las bases canónicas.
b) Halle su núcleo y su imagen.
c) Calcule la imagen por T de un vector ortogonal a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$.
d) Halle la matriz de la aplicación con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^4$ y la base $B = \{(1, 3), (2, 1)\}$ en $\mathbb{R}^2$.(3 puntos)

2. Dado el subespacio S, generado por los vectores: $\{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (2, 1, 0)\}$, calcular la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ sobre S.(1.5 puntos)

3. Sea $\omega : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que, en la base canónica, tiene por expresión:

$$\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

a) Hallar la representación matricial de ω en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
b) Encontrar la matriz ortogonal P que reduzca ω a forma diagonal.
c) Estudiar el carácter de ω. (2.5 puntos)

4. Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde α y β son dos números reales.
a) Estudiar para que valores de α y β la matriz A es diagonalizable.
b) Para aquellos valores para los que no sea diagonalizable hallar la forma canónica de Jordan y la matriz de paso correspondiente en función de α y β.(3 puntos)

30 de enero de 1998

1. Se considera el endomorfismo f definido en $I\!R^3$ por las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + t\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) &= -2\,t\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 - 2\,t\,\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base de $I\!R^3$.
a) Hallar la dimensión del núcleo y de la imagen de f para todos los posibles valores de t. (1 punto)
b) Hallar las ecuaciones y una base del núcleo y la imagen de f para cualquier valor de t. (1.5 punto)

2. a) Descomponer el vector $(3,7,2)$ en suma de un vector proporcional a $(2,3,4)$ y de otro ortogonal a $(2,3,4)$. (1.5 puntos)
b) Calcular la proyección ortogonal de $\vec{b} = (2,1,1)$ sobre el espacio generado por los vectores $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$. (1 punto)

3. Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial real formado por los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Se define las aplicaciones lineales $f : P_2(x) \to P_2(x)$ tal que $f(p(x)) = p'(x)$ y $g : P_2(x) \to P_2(x)$ tal que $g(p(x)) = xp'(x)$, siendo $p(x)$ un polinomio de grado menor o igual que 2.
a) Estudiar si f es diagonalizable. En caso de que lo sea hallar la matriz diagonal del endomorfismo f indicando la matriz de paso y en caso de que no lo sea hallar la matriz de Jordan junto con la matriz de paso. (1.5 puntos)
b) Estudiar si g es diagonalizable. (1 punto)

4. Se considera la forma bilineal:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

a) Hallar una base del espacio vectorial conjugado del vector $(-1,0,0,0)$. (1 punto)
b) Determinar una base que exprese la forma cuadrática asociada por una matriz diagonal. (1 punto)
c) Estudiar el carácter de la forma cuadrática asociada. (0.5 puntos)

18 de noviembre de 1998

1. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación cartesiana $x + 2y - z = 0$

   (a) Determina las ecuaciones paramétricas de H y la dimensión de H.

   (b) Encuentra una base ortonormal de H para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Determina las coordenadas del vector $\vec{v} = (0, 1, 2)$ en la base calculada en el apartado anterior.

   (d) Calcula la proyección del vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ sobre el subespacio H.

   (e) Halla el vector de H más próximo a $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y la distancia de $\vec{u}$ a H.

   (f) Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base hallada en segundo apartado.

2. Sea $P_1(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que uno con el producto escalar $< p, q >= \int_1^2 p(x)q(x)dx$. Hallar la proyección ortogonal del polinomio $p^*(x) = 2$ sobre el subespacio engendrado por $p_1(x) = x$.

24 de marzo de 2000

1. Dada la aplicación lineal: (3,5 puntos)

$$T : I\!\!R^4 \to I\!\!R^2 \quad T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$$

   (a) Encuentra su representación matricial respecto a las bases canónicas.
   (b) Halla su núcleo y su imagen.
   (c) Halla la matriz de la aplicación con respecto a la base canónica en $I\!\!R^4$ y la base $B = \{(1,3),(2,1)\}$ en $I\!\!R^2$.
   (d) Calcula la imagen por T de un vector ortogonal a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$.
   (e) Halla la proyección ortogonal de $(1,1,1,1)$ sobre el núcleo de T.

2. Dada la aplicación lineal $T : I\!\!R^3 \to I\!\!R^3$, que tiene por matriz asociada en la base canónica (3 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Estudia para que valores de α A es diagonalizable.
   (b) En los casos en que sea diagonalizable halla la correspondiente matriz diagonal y la base en la que la aplicación tiene esa expresión diagonal.
   (c) En los casos en que no sea diagonalizable halla la forma canónica de Jordan, la matriz de paso y la base en la que la aplicación tiene esa expresión.

3. Sea $f : I\!\!R^3 \times I\!\!R^3 \to I\!\!R$ la forma bilineal definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + x_1y_2 - x_3y_3$$

   Se pide: (3,5 puntos)

   (a) Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica.
   (b) Hallar la matriz A' de f respecto de la base

$$\{(2,0,0),(1,2,0),(-3,1,1)\}$$

   (c) Clasificar la forma cuadrática asociada.
   (d) Hallar el subespacio conjugado del vector $\vec{x} = (1,1,1)$.

30 de junio de 1999

1. Sabiendo que la aplicación f transforma los vectores $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,1,0)$, $\vec{u}_3 = (1,1,1)$ de $I\!R^3$ en los vectores $\vec{w}_1 = (1,0,0)$, $\vec{w}_2 = (2,4,-2)$, $\vec{w}_3 = (2,5,-1)$ respectivamente, encuentre la matriz de f en las bases siguientes: (2,5 puntos)

   (a) La base canónica de $I\!R^3$.

   (b) La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

2. Estudie si la aplicación del ejercicio anterior es diagonalizable, si lo es halle su forma diagonal, la base en la que la matriz de la aplicación es diagonal y la matriz de paso. (2,5 puntos)

3. Sea $f : I\!R^3 \times I\!R^3 \to I\!R$ la forma bilineal definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + x_1y_2 - x_3y_3$$

   Se pide: (2,5 puntos)

   (a) Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica.

   (b) Hallar la matriz A' de f respecto de la base

$$\{(2,0,0), (1,2,0), (-3,1,1)\}$$

   (c) Clasificar la forma cuadrática asociada.

   (d) Hallar el subespacio conjugado del vector $\vec{x} = (1,1,1)$.

4. Sea E el espacio vectorial definido de la siguiente manera:

$$E = \{f : [0,1] \to I\!R,\ f \text{ es derivable}, f(0) = 0\},$$

   en el que está definido el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

   Aplique el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$. Halle la proyección de la función $h(x) = e^{-x} - 1$ sobre el espacio generado por $\{f_1(x), f_2(x)\}$. (2,5 puntos)

10 de febrero de 2000

1. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación cartesiana $x + 2y - z = 0$

   (a) Determina las ecuaciones paramétricas de H y una base ortonormal de H para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determina las coordenadas del vector $\vec{v} = (0, 1, 2)$ en la base calculada en el apartado anterior.

   (c) Calcula la proyección del vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ sobre el subespacio H.

   (d) Halla el vector de H más próximo a $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y la distancia de $\vec{u}$ a H.

   (e) Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base hallada en segundo apartado.

2. Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{u}_2 = (-1, 3, 5),\ \vec{u}_3 = (-2, 1, 1)\},$$

   y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} T(\vec{u}_1) &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ T(\vec{u}_2) &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ T(\vec{u}_3) &= 4\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \end{aligned}$$

   (a) Determina la matriz de la aplicación lineal en la base $\mathcal{B}$.

   (b) Halla la matriz de la aplicación en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Halla las ecuaciones cartesianas del núcleo y la imagen de la aplicación T.

   (d) ¿Cuáles son las dimensiones de $ker(T)$ e $Im(T)$?

   (e) Di si T es inyectiva, sobreyectiva, isomorfismo e isometría y justifica tu respuesta.

3. Dada la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que tiene por matriz asociada en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Estudia para que valores de α A es diagonalizable. En caso de ser diagonalizable halla la correspondiente matriz diagonal, la matriz de paso y la base en la que la aplicación tiene esa expresión diagonal.

4. Sea $P_1(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que uno. Se define la forma bilineal $\varphi : P_1 \times P_1 \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\varphi(p, q) = \int_1^2 p(x)q(x)dx.$$

   (a) Halla la matriz asociada a dicha forma bilineal en la base canónica de $P_1(\mathbb{R})$.

   (b) Escribe la forma cuadrática asociada.

   (c) Estudia el carácter de dicha forma cuadrática.

   (d) Se puede decir que es un producto escalar? Razona la respuesta.

   (e) Halla una forma canónica de la forma cuadrática y la base en la que dicha forma es canónica.

13 de junio de 2000 (corregido)

1. Se considera el endomorfismo f definido en $I\!R^3$ por las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 + t\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) & = & -2\,t\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 - 2\,t\,\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) & = & \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \end{array}$$

donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base de $I\!R^3$.

(a) Halla la dimensión del núcleo y de la imagen de f para todos los posibles valores de t. (1 punto).
La matriz asociada a la aplicación es

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2t & 1 \\ t & -2 & -1 \\ 1 & -2t & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A_f. El determinante es $\det(A_f) = -4 + 4t^2$, luego los puntos críticos son,$\{t = 1\}$ y $\{t = -1\}$. Para estos dos valores el rango es dos ya que el menor $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2t & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Por tanto la dimensión de la imagen es dos y la del núcleo es uno. Si $t \in I\!R$, con $t \neq \pm 1$, entonces la imagen tiene dimensión 3 y el nucleo se reduce al cero.

(b) Halla las ecuaciones y una base del núcleo y la imagen de f para $t = 1$. (0.5 puntos).
Para $t = 1$, la matriz asociada a la aplicación es

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una base de la imagen viene dada por $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ y su ecuación cartesiana viene dada por $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f : 4x - 2y - 2z = 0$. Para calcular una base del núcleo, recordemos que viene dado por $\ker f : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como sabemos que hay dos ecuaciones l.i., las ecuaciones cartesianas del núcleo vendrán dadas por

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2y + z = 1 \\ x - 2y - z = -1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $(2t_1, t_1, 0)$ para todo $t \in I\!R$, luego $\mathcal{B}_{\ker f} = \{(2, 1, 0)\}$.

(c) Encuentra la forma diagonal de la matriz asociada a f y una matriz de paso para $t=-1$. (1 punto).

Calculamos el polinomio caracteristico, obteniendo

$$\chi(\lambda)=\det(A_f-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ -1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}=2\lambda+2\lambda^2-\lambda^3=0.$$

Sus autovalores son $\lambda_1=0, \lambda_2=1-\sqrt{3}, \lambda_3=1+\sqrt{3}$. Los correspondientes autovectores son

$$\lambda_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=1-\sqrt{3}\Rightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 2 & 1\\ -1 & -3+\sqrt{3} & -1\\ 1 & 2 & 2+\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\ -2-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=1+\sqrt{3}\Rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 2 & 1\\ -1 & -3-\sqrt{3} & -1\\ 1 & 2 & 2-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ -2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

2. En $\mathbb{R}^3$ con su producto escalar usual se pide

(a) Descomponer el vector $\vec{v}=(2,0,1)$ en suma de un vector proporcional a $(-1,2,0)$ y de otro ortogonal a $(-1,2,0)$. (1.5 puntos)

Tomamos el plano ortogonal a $(-1,2,0)$ que es $x-2y=0$. Una base de este subespacio viene dada por $\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$. Procedemos a descomponer el vector. Tenemos que

$$\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}-a+2b=2\\ 2a+b=0\end{array}\right.\\ c=1\end{array}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a=\frac{-2}{5}\\ b=\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

luego $(2,0,1)=\left(\frac{2}{5},\frac{-4}{5},0\right)+\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},1\right)$.

(b) Calcular la proyección ortogonal de $\vec{b}=(2,1,1)$ sobre el espacio generado por los vectores $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$. (1 punto).

Estos dos vectores son ortogonales, por tanto para obtener una base ortonormal solo hay que normalizarlos. Tenemos pues la base ortonormal $\left\{u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1), u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$, luego la proyección es

$$\text{proy}_H\vec{b}=\left\langle\vec{b},u_1\right\rangle u_1+\left\langle\vec{b},u_2\right\rangle u_2=\frac{1}{2}(1,2,-1)+\frac{3}{2}(1,0,1)=(2,1,1)$$

3. Consideremos la base de $I\!R^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (-1,3,5), \mathbf{u}_3 = (-2,1,2)\}$ y sea $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ T(\mathbf{u}_3) &= 4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

(a) Demuestra que la matriz asociada a la aplicación en las bases canónicas es. (1.5 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 8 \\ 3 & -23 & 14 \\ 5 & -41 & 25 \end{pmatrix}$$

La aplicación en las base $\mathcal{B}$ es

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de cambio de base son

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{CB} = M_{BC}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 8 \\ 3 & -23 & 14 \\ 5 & -41 & 25 \end{pmatrix}$$

(b) Halla las ecuaciones cartesianas del $\ker T$ expresadas en función de la base canónica. (0.5 puntos)
Calculamos el determinante de A_f que es cero. Como hay un menor con determinante distinto de cero, el rango es dos. Calculemos pues el núcleo en las bases canómicas tomando dos ecuaciones cualesquiera

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 13y + 8z = 0 \\ 3x - 23y + 14z = 0 \end{array} \right. .$$

4. Dado el espacio vectorial $E = \{p \in P_3(I\!R) : p(1) = 0, p(0) = 0\}$, con la base $\{x(x-1), x^2(x-1)\}$ y el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^1 f'(x)g'(x)dx,$$

calcula la matriz de la forma bilineal asociada a este producto escalar. (1 punto).

Tenemos

$$\begin{aligned} A(1,1) &= \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{1}{3} \\ A(1,2) &= \int_0^1 (2x-1)\left(3x^2 - 2x\right) dx = \int_0^1 \left(6x^3 - 7x^2 + 2x\right) dx = \frac{1}{6} \\ A(2,2) &= \int_0^1 \left(3x^2 - 2x\right)^2 dx = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

(a) Diagonaliza la forma cuadrática asociada y encuentra una matriz de paso. (1 punto)

El polinomio caracteristico es

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} - \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{60} - \frac{7}{15}\lambda + \lambda^2$$

luego los autovalores son

$$\chi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{7}{30} + \frac{1}{30}\sqrt{34}, \lambda_2 = \frac{7}{30} - \frac{1}{30}\sqrt{34}$$

Entoces

$$\ker(A - \lambda_1 I) \quad : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{30}\left(3 - \sqrt{34}\right) & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}\left(3 + \sqrt{34}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) \quad : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{30}\left(3 + \sqrt{34}\right) & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}\left(3 - \sqrt{34}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de paso solo habría que normalizar estos vectores, ya que son ortogonales.

(b) Estudia su carácter. (0.5 puntos)

Al ser sus dos autovalores mayores que cero, esta forma es definida positiva.

6 de septiembre de 2000

1. Se considera el endomorfismo f definido en $\mathbb{R}^3$ por las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) &= -2\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

   donde $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Encuentra su representación matricial respecto de la base $\mathcal{B}$. (0.5 puntos)
   (b) Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios $\ker(f)+\mathcal{L}(1,1,0)$, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathcal{L}(2,0,4)$. (1 punto)
   (c) Calcula la imagen por f de un vector ortogonal a $\vec{v} = (1,1,1)$. (1 punto)
   (d) Halla la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el núcleo de f. (1 punto)

2. Dada la aplicación lineal $f : P_3(x) \to P_3(x)$ que transforma los elementos de una base de P_3 de la forma siguiente

$$f(1) = 2 - x - x^3,\ f(x) = 3x + x^3,\ f(x^2) = 4x^2,\ f(x^3) = x + 3x^3.$$

   (a) Halla la matriz de la aplicación en la base $\mathcal{B} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. (0.5 puntos)
   (b) Halla el núcleo y la imagen de esta aplicación. (1 punto)
   (c) Indica si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva. (0.5 puntos)
   (d) ¿Es diagonalizable? en caso de serlo halla la matriz diagonal y la matriz de paso. (1 punto)
   (e) Halla la matriz de la aplicación en la base $\mathcal{B}' = \{1,\ 1+x,\ x^2, x^3\}$. (1 punto)

3. Se considera la forma bilineal:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

   (a) Halla una base del espacio vectorial conjugado del vector $(-1,0,0)$. (1 punto)
   (b) Determina una base que exprese la forma cuadrática asociada por una matriz diagonal. (1 punto)
   (c) Estudiar el carácter de la forma cuadrática asociada. (0.5 puntos)

1.-Sea la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifica: $T(1,2,0)=(1,-1,-1,2)$; $T(1,1,0)=(0,-3,0,3)$ y $T(1,0,1)=(1,-4,-1,5)$.

a. Calcula la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas

b. Halla el núcleo y la imagen de T

c. Clasifica esta aplicación lineal

2.-Sea P_2 el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 y definimos un producto escalar de la forma: $<p(x),q(x)>=\int_{-1}^{1} p(t)\cdot q(t)\cdot dt$. Probar que $\{1,x,x^2\}$ no es una base ortonormal en P_2 con este producto escalar. Utiliza el método de Gram-Schmidt para convertirla en una base ortonormal. Halla la proyección ortogonal de x^2 sobre el subespacio generado por $\{1,x\}$.

3.-Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E=L(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$, donde $\overrightarrow{u_1}=(1,1,0,1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1,-1,-1,2)$, $\overrightarrow{u_3}=(1,1,-1,0)$ y $F\equiv x+z+t=0$,

a. Calcula una base de $E\cap F$ y de $E+F$

b. Calcula las ecuaciones cartesianas de $E\cap F$ y $E+F$

4.-Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a+9 & --6 & a-3 \\ -6 & a & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

a. Calcula, según los valores de a, los autovalores de A

b. Determina, según los valores de a, cuando es diagonalizable la matriz A

c. Halla la forma canónica de Jordan y la matriz de paso para aquellos valores de a en que no sea diagonalizable la matriz A.

ÁLGEBRA

1.-Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E = L\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$,donde $\overrightarrow{u_1} = (1,-1,2,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,-2,0,-1)$ y $\overrightarrow{u_3} = (2,-3,2,2)$ y F dado por : $F \equiv \begin{cases} x - t = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

a. Halla un base y las ecuaciones implícitas de $E + F$
b. Halla un base y las ecuaciones paramétricas de $E \cap F$
c. ¿ Es $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$? Razona la respuesta

2.-Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno en el que se ha definido el producto escalar: $< p_1(x), p_2(x) >= \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$. Se pide:

a. Matriz del producto escalar referida a la base {1,x}
b. Calcula una base ortonormal a partir de {1,x}
c. Calcula la proyección ortogonal de (x+3) sobre (x+2)

3.-Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que verifica:

f(1,0,1)=(5,2,1)
f(0,0,2)=(10,4,2)
f(2,1,0)=(0,0,0)

Calcula:

a. Matriz de f respecto a la base canónica
b. Valores propios y vectores propios del endomorfismo
c. Encontrar, si es posible, una base respecto de la cual la matriz del endomorfismo sea diagonal, y la matriz de f referida a dicha base.

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS | EXAMEN PARCIAL de ÁLGEBRA. MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas | **Primero de Ingeniería Química**

Universidad de Castilla-La Mancha | *16 de Diciembre de 2008*

1. Consideremos un subconjunto E de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ las matrices 2x2 en $\mathbb{R}$ definido de la forma,

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b+c & a \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

y consideremos la aplicación $f : E \to E$ definida por,

$$f \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Demostrar que E es un subespacio vetorial de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ y dar una base de E.

b) Demostrar que f es lineal y calcular la matriz asociada a f respecto de la base de E calculada en el apartado anterior.

c) Hallar una base del núcleo y de la Imf. Calcular las ecuaciones implícitas de la imagen y paramétricas del núcleo. ¿Es biyectiva la aplicación f?, razona la respuesta.

2. Sea la aplicación $T : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_3[x]$ definida por $T(p(x)) = x\,(p(x) + p'(x))$. Se pide:

a) Demostrar que T es lineal y hallar su representación matricial respecto de las bases canónicas.

b) Hallar unas ecuaciones paramétricas del núcleo y unas implícitas de Im(T).

c) Si se define el producto escalar

$$< p(x),\, q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

calcular la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = 1$ sobre la imagen de T.

3. Dado el endomorfismo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido como sigue

$$A(x,\, y,\, z) = (-x + \alpha y,\, -y + \beta z,\, 2z),$$

donde α y β son parámetros (valores) reales. Se pide:

a) La matriz $\mathcal{M}_A$ de la aplicación A respecto de la base canónica y estudia los valores reales de α y β para que la matriz $\mathcal{M}_A$ de la aplicación sea diagonalizable.

b) Para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$V \equiv x - y - z = 0; \qquad W = \mathcal{L}\left\{(1, 2, 3),\, (0, 0, 1)\right\}.$$

b.1) Dar una base de $V \cap W$ y de $V + W$. Calcular los subespacios vectoriales imagen $A(V \cap W)$ y $A(V + W)$. ¿Es $V + W$ suma directa ?, razona la respuesta.

b.2) Calcular $(\mathcal{M}_A)^4$.

b.3) Calcular la matriz $\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}$ de la aplicación respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0),\, (1, 1, 0),\, (1, 1, 1)\}$.

4. Consideramos la forma cuadrática

$$\phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Se pide:

a) La matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.

b) Determina los valores de λ y μ para los vectores $\mathbf{u_1} = (1,\, 0,\, 0)$, $\mathbf{u_1} = (1,\, \lambda,\, 0)$ y $\mathbf{u_3} = (-2,\, 1,\, \mu)$ forman una base de vectores conjugados con respecto de la forma bilineal asociada.

c) Diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática indicando la matriz de paso P.

d) Estudia el caracter de la forma cuadrática.

Nota: Los alumnos que tienen que examinarse de toda la asignatura sólo responderán a las siguientes cuestiones: **Álgebra**: 1 y 2. **Cálculo**: 1, 2, 3 y 4. **Ecuaciones diferenciales**: una de las cuestiones (a elegir por el alumno).

Los alumnos que sólo tienen que examinarse de **Álgebra** y **Cálculo** responderán a las siguientes cuestiones: **Álgebra**: 1 y 2. **Cálculo**: 1, 2, 3 y 4.

Los demás alumnos deberán contestar a todas las cuestiones de las partes que tengan que recuperar.

ÁLGEBRA

1. Dado el siguiente conjunto de las matrices,

$$F = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ M \cdot A = A \cdot M, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\},$$

   Se pide:

   (a) Demostrar que F es un subespacio vetorial de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

   (b) Obtener una base de F y calcular su dimensión.

   (c) Hallar un subespacio complementario de F en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que contenga a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sea V el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor e igual a 3 y el polinomio nulo con coeficientes reales. Sea la aplicación $\alpha : V \to V$ definida por $\alpha(p(x)) = x \cdot p'(x)$. Se pide:

   (a) Demostrar que α es una aplicación lineal.

   (b) Obtener su representación matricial respecto de las bases canónicas. Calcular la base del núcleo, $\mathrm{Ker}(\alpha)$, la base de la imagen, $\mathrm{Im}(\alpha)$ y sus respectivas dimensiones.

   (c) Hallar la contraimagen del polinomio $q(x) = 3x^2 - x$, es decir, $\alpha^{-1}(3x^2 - x)$.

3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Obtener una matriz ortogonal P tal que $P^t A P$ sea diagonal.

   (b) Encontrar una matriz B tal que $B^2 = A$.