Tema 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $y' = \dfrac{y^2+y}{t^2-t}$ *b)* $ty' + (2t^2-1)\mathrm{cot}y = 0$

   c) $(t^2+1)dy = (y+1)(t+\sqrt{t^2+1})dt$ *d)* $t^2(y+1)^2(y'-1) = y^2 - 2t^2y + 1$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   (a) $y' = \dfrac{-2ty\log|y|}{t^2}$.

   (b) $y' = \dfrac{\mathrm{sen}y + y\mathrm{sen}t}{\cos t - t\cos y}$.

   (c) $y' = \dfrac{-3t^2 - 2y\mathrm{sen}2t}{2\mathrm{sen}^2 t + 3y^2}$.

3. Encuentra el valor de b para que las siguientes ecuaciones sean exactas y con este valor resuélvelas:

   (a) $(ty^2 + bt^2y)dt + (t+y)t^2dy = 0,\;\; y(1) = -1$.

   (b) $(ye^{2ty} + t)dt + (tbe^{2ty})dy = 0,\;\; y(-1) = 0$.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones con valor inicial:

   (a) $tdt + ye^{-t}dy = 0,\;\; y(0) = \sqrt{2}$.

   (b) $y' = \frac{2t}{y+t^2y},\;\; y(0) = -2$.

   (c) $\mathrm{sen}2tdt + \cos 3ydy = 0,\;\; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

5. Comprueba que las siguientes ecuaciones no son exactas, pero se pueden transformar en exactas multiplicándolas por el factor integrante dado.

   (a) $t^2y^3dt + t(1+y^2)dy = 0,\;\; \mu(t,y) = \dfrac{1}{ty^3}$.

   (b) $(1-ty)dt + (1-t^2)dy = 0,\;\; \mu(t,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

   (c) $(3ty + y^2)dt + (t^2+ty)dy = 0,\;\; \mu(t,y) = (ty(2t+y))^{-1}$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones buscando un factor integrante adecuado:

   (a) $(t^3 + y^4)dt + 8ty^3dy = 0$.

   (b) $ty^3dt + (t^2y^2 - 1)dy = 0$.

7. Resuelve la siguiente ecuación buscando un factor integrante que dependa únicamente de $t+y$:
$$(7t^3 + 3t^2y + 4y)dt + (4t^3 + t + 5y)dy = 0$$

8. Dada la ecuación diferencial:
$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$
determina un factor integrante para esta ecuación y aplicarlo para integrar la ecuación:
$$y(x^2y^2 - 1)dx + x(x^2y^2 + 1)dy = 0$$

9. Dada la ecuación:
$$t\cos\left(\frac{y}{t}\right)y' = y\cos\left(\frac{y}{t}\right) - t$$

   (a) Encuentra el factor integrante más simple.
   (b) Halla otro factor integrante que sea función de y/t.
   (c) Obtén la solución de la ecuación diferencial.

10. Dada una ecuación diferencial de la forma: $P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$, se pide:

   (a) Halla la condición que tienen que cumplir P y Q para que la ecuación admita un factor integrante función de $t+y$.
   (b) Aplica lo anterior para hallar el factor integrante de la ecuación:
$$(2ty - y^2 - y)dt + (2ty - t^2 - t)dy = 0$$

11. Dada la ecuación:
$$(t^2y + y^3 - ty)dt + t^2dy = 0$$
Halla un factor integrante de la forma $t^{-3}f(y/t)$ y resuélvela.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(t^2+y^2)dt = 2tydy$	*b*) $ydt + (y-t)dy = 0$
c) $(t+4y)dt = 3tdy$	*d*) $ydt + (\sqrt{t^2+y^2} - t)dy = 0$
e) $tdy - ydt = \sqrt{t^2+y^2}dy$	*f*) $(2t+3y)dt + (y+2)dy = 0$
g) $y' = \dfrac{t-5y+5}{y-5t-1}$	*h*) $y' = \dfrac{(2t+6y-18)^2}{(9t+2y+19)^2}$
i) $y' = \dfrac{y+2t-1}{4t+2y+1}$	*j*) $y' = (\dfrac{t-y-1}{2t-2y+1})^2$
k) $(t+y)y' = 2y-1$	*l*) $(3t+4y+1)dy + (2t+3y+1)dt = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer orden:

a) $(y+1)dx + (xy+y^2+y+1)dy = 0$	*b*) $2\dfrac{x+1}{y+1}dx - \dfrac{(x+1)^2}{(y+1)^2}dy = 0$
c) $x(x+y)dy = (x^2+y^2)dx$	*d*) $y' = (1-y^2)\tan x$
e) $(9x+21y+3)dy = (7x-5y+45)dx$	*f*) $(x-y)^2dy = (x-y+1)^2dx$
g) $y^2dx + (xy+1)dy = 0$	*h*) $(2x^2+xy+1)ydx + (x+2y)(x^2+1)dy = 0$
i) $x\,\mathrm{sen}\dfrac{y}{x}dy = \left(y\,\mathrm{sen}\dfrac{y}{x} + x\right)dx$	

14. Calcula las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada:

$$a)\ 3x + 4y = c_1; \quad b)\ y = \frac{x}{1 + c_1 x}; \quad c)\ 4y + x^2 + 1 + c_1 e^{2y} = 0$$

15. Encuentra el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = c_1 e^y$ que pasa por $(0, 5)$.

15. Calcula las isoclinas (curvas de igual pendiente) de las siguientes ecuaciones y esbozar las gráficas de las soluciones

$$a)\ y' = \frac{x}{y}; \quad b)\ y' = \frac{-y}{x}; \quad c)\ y' = 2y - 1; \quad d)\ y' = y^2 - 3y + 2$$

16. La descomposición de N_2O bajo la influencia de un catalizador de platino viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = k\frac{a - x}{1 + bx}$$

donde a es la concentración de N_2O en el instante inicial $t = 0$, b es una constante y $x(t)$ es la concentración de producto en el instante t. Si para $t = 0$ es $x(0) = 0$, resolver la ecuación diferencial y determinar la expresión de la vida media de la sustancia (vida media de una sustancia es el tiempo T que tarda en reducirse a la mitad).

17. a) Integra la siguiente ecuación correspondiente a la velocidad de una reacción de tercer orden completa:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)(c - x)$$

con condición inicial $x(0) = 0$, supuesto que $a > b > c > 0$. Calcular la vida media T de esa reacción. ¿Qué ocurre con la solución si $a = b$ o $b = c$? ¿Y si a=b=c?

b) Integra la ecuación diferencial de la velocidad de reacción de la siguiente reacción incompleta:

$$\frac{dx}{dt} = 3(2 - x)(1 - x) - (1 + x)(2 + x)$$

con dato inicial $x(0) = 0$. ¿Para qué valor de la variable x cesa ésta su variación?

c) Resuelve la ecuación de la velocidad de reacción de una reacción de primer orden autocatalítica:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b + x)$$

con dato inicial $x(0) = 0$.

d) La velocidad de reacción de una reacción de primer orden con reacción inversa viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x) - k_2 x$$

Resuélvela si el dato inicial es $x(0) = x_0$. Particulariza para el caso en que $k_1 = k_2 = 100s^{-1}$, $a = 1mol/l$ y $x_0 = 0$. ¿Cuánto vale la solución cuando $t = 0.0005s$, $0.01s$ y $1s$?

18. Calcula la concentración en función del tiempo de una sustancia B que se forma a partir de una sustancia A con constante de velocidad k_1 y que se transforma en la sustancia C con constante de velocidad k_2:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

con condiciones iniciales $C_A(0) = 5$ y $C_B(0) = 0$. Plantear la ecuación diferencial que da la variación de la concentración de A con el tiempo y utilizar la solución para plantear la ecuación diferencial que da la variación de B con el tiempo. Discutir el comportamiento del sistema en función de las constantes de velocidad.

19. Un cohete con masa inicial M_0 despega en el instante $t = 0$. La masa decrece con el tiempo porque el combustible se gasta a una velocidad de combustión constante r; así la masa en el instante t es $M(t) = M_0 - rt$. Si el empuje proporcionado por los motores es una fuerza constante F y el movimiento es vertical con velocidad v, la segunda ley de Newton implica que:

$$F = M(t)g + \frac{d}{dt}(M(t)v(t))$$

donde se ha despreciado la fuerza de resistencia del aire.

a) Resuelve la ecuación diferencial anterior. Si la masa del cohete en el instante en que se agota el combustible es M_1, calcula la velocidad en ese instante.

b) Resuelve la ecuación anterior suponiendo además que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cohete, con una constante de proporcionalidad λ.

c) Si el cohete alcanzara una altura suficientemente grande no se puede suponer que g es constante, en cuyo caso debemos utilizar la correción $g = g_0 R_T^2/z^2$, siendo R_T el radio de la tierra, z la distancia del cohete al centro de la tierra y $g_0 = 9.8 m/s^2$. ¿De qué tipo es la ecuación diferencial que describe este problema?

20. Dado un circuito eléctrico simple, la ecuación que lo gobierna es:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

donde en este caso E = voltaje = constante; R = resistencia = constante > 0; L = inductancia = constante > 0; I = intensidad de corriente = $I(t)$; t = tiempo.

Resuelve la ecuación en I con un valor dado I_0 para $t = 0$. Dibuja la gráfica de la solución $I(t)$. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?

21. Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento es proporcional al número de habitantes?

22. En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente. a) Si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas, ¿qué número cabe esperar al cabo de 12 horas? b) Si hay 10^4 al cabo de una hora y $2 \cdot 10^4$ al cabo de 5 horas, ¿cuántos había al principio?

1 Tema 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

1. Integra las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + y' - 2y = t + 2te^t$	*b)* $y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
c) $y'' - 2y' + 5y = e^t \cos(2t)$	*d)* $y'' - 2y' + 10y = \mathrm{sen}(3t) + e^t$
e) $y''' + y'' - 2y' = -e^{3t}$	*f)* $y''' + y'' + y' + y = \cos t + 2\mathrm{sen}(3t)$
g) $y'' + y = \mathrm{tgt}$	*h)* $y'' + y = e^{2t}\cos(3t)$
i) $y'' - ky = 0$	*j)* $y'' + y = \mathrm{ctgt}$
k) $y'' - 2y' + y = e^t\mathrm{sen}t + e^{2t}\cos t$	*l)* $y'' + y = te^t + 2\mathrm{sen}t$
ll) $t^2y'' - ty' + y = 2t$	*m)* $(t+1)^2y'' - 3(t+1)y' + 4y = (1+t)^3$
n) $y'' + ty' + y = 0$	*o)* $y'' = ty$

2. Integra la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{2x}\left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

3. Halla la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{s^5}$	*b)* $\dfrac{3s+5}{s^2+7}$	*c)* $\dfrac{1}{s^3+5s^2+2s-8}$	*d)* $\dfrac{s+1}{s^5+6s^4+12s^3+8s^2}$
e) $\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$	*f)* $\dfrac{2s+4}{s^3+2s^2-5s-6}$	*g)* $\dfrac{s}{s^3+2s^2-4s-8}$	*h)* $\dfrac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}$
i) $\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$	*j)* $\dfrac{e^{-2s}}{s^3}$		

4. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}t^3$ *b)* $y''(t) - y'(t) = e^t \cos t$

c) $y''(t) + 4y'(t) = \mathrm{sen}t H_{2\pi}(t)$

5. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = e^{-4t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''(t) + y(t) = \mathrm{senh}(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = f(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$

donde $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$

6. Un cuerpo que pesa $0.1kg$. estira un resorte de $6cm$. Dicho cuerpo se suelta en $t = 0$ desde un punto que está a $8cm$ bajo la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 0.1m/s. Determina la función $x(t)$ que describe el movimiento libre resultante.

7. En el problema anterior, ¿cuál sería el movimiento resultante si se sabe que el medio ofrece una resistencia igual a la velocidad instantánea de la pesa?.

Tema 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Calcula la solución general de los siguientes sistemas:

$$a)\left\{\begin{array}{l} x'=x+3y,\\ y'=5x+3y, \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{l} x'=4x+y,\\ y'=-9x-2y, \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{l} x'=2x+3y,\\ y'=3x+2y, \end{array}\right. \quad d)\left\{\begin{array}{l} x'=4x+y,\\ y'=6x+5y, \end{array}\right.$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$a)\left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{x}{2},\\ y'=x-\dfrac{y}{2},\\ x(0)=3,\ y(0)=5. \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} x'=2x+4y,\\ y'=-x+6y,\\ x(0)=-1,\ y(0)=6. \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{l} x'=y+z,\\ y'=x+y+2z,\\ z'=x+z,\\ x(0)=1,\ y(0)=1,\ z(0)=0. \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{l} x'=x-12y-14z,\\ y'=x+2y-3z,\\ z'=x+y-2z,\\ x(0)=4,\ y(0)=6,\ z(0)=7. \end{array}\right.$$

3. Aplica la transformada de Laplace para determinar la solución de los sistemas siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{ll} x_1'(t)=x_1(t)+x_2(t), & t>0,\\ x_2'(t)=6x_1(t)+2x_2(t)+t, & t>0,\\ x_1(0)=x_2(0)=0. & \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{ll} x'(t)=3x(t)+y(t)+e^{2t}, & t>0,\\ y'(t)=-x(t)+y(t)+e^{2t}, & t>0,\\ x(0)=y(0)=1. & \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{l} 2x'+y'-y=t,\\ x'+y'=t^2,\\ x(0)=1,\ y(0)=0. \end{array}\right.$$

4. Aplica el método de la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema que describe el comportamiento de la corriente de un circuito eléctrico:

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 I_2'(t)+(R_1+R_2)I_2(t)+R_1 I_3(t)=E(t),\\ L_2 I_3'(t)+R_1 I_2(t)+R_1 I_3(t)=E(t),\\ I_1(t)-I_2(t)-I_3(t)=0,\\ I_1(0)=I_2(0)=I_3(0)=0, \end{array}\right.$$

siendo $R_1=6$ ohmios, $R_2=5$ ohmios, $L_1=L_2=1$ henrio y $E(t)=50\mathrm{sen}t$ voltios.

5. En un circuito L-R-C se suministra una diferencia de potencial constante $E(t)\equiv E_0$ durante un intervalo de tiempo $(0,T)$ después del cual la pila se descarga y $E(t)=0$ para $t>T$.

   (a) Determina la carga y la intensidad en el circuito en cada instante de tiempo bajo el supuesto $Q(0)=I(0)=0$.

   (b) ¿Cuáles son los valores de la carga y la intensidad en el instante en que se agota la pila?.

   (c) ¿Cuál es la carga de la pila para tiempos grandes?.

   (d) ¿Qué ocurre para otros valores iniciales de Q e I?.

6. Consideremos dos masas m_1 y m_2 sujetas a dos resortes acoplados (es decir, conectados entre sí) A y B de masas insignificantes y constantes k_1 y k_2 respectivamente. Denotemos por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio. Si no se aplican fuerzas externas al sistema y no hay fuerzas de amortiguación, la segunda Ley de Newton permite deducir que el movimiento del sistema acoplado viene descrito por el siguiente sistema de ecuaciones lineales de segundo orden

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1), \end{cases}$$

   Resolver el sistema anterior cuando $k_1 = 6,\ k_2 = 4$ y $m_1 = m_2 = 1$ sabiendo que las masas parten de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias, pero en sentidos opuestos.

7. El sistema:

$$\begin{cases} C_A'(t) = -k_{11}C_A(t) + k_{12}C_B(t), \\ C_B'(t) = -(k_{12} + k_{21})C_B(t) + k_{11}C_A(t) + k_{22}C_C(t), \end{cases}$$

   expresa la evolución, a partir de un instante inicial, de las concentraciones de tres reactivos A, B y C en un proceso químico gobernado por una pareja de reacciones reversibles $A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C$ siendo k_{11} y k_{12} las velocidades de las reacciones directas e inversas de la primera y k_{21} y k_{22} las correspondientes de la segunda. Sabiendo que en cualquier instante se verifica que $C_A(t) + C_B(t) + C_C(t) = 1$, calcular las concentraciones $C_A(t)$ y $C_B(t)$ en el caso en que $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 1$, $C_A(0) = 1/4$ y $C_B(0) = 3/10$.

8. Reduce las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones de orden superior a sistemas de ecuaciones de primer orden y resuelve los sistemas planteados:

   a) $2y''' - 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} t$.

   b) $4y''' + y = e^t$.

   c) $\begin{cases} x'' - x' + 5x + 2y'' = e^t \\ -2x + y'' + 2y = 3t^2 \end{cases}$.

   d) $\begin{cases} x'' - 2y'' = \operatorname{sen} t \\ x'' + y'' = \cos t \end{cases}$.