

LIBRO  
DE  
RESÚMENES

NONLINEAL 2004

TOLEDO, 1-4 DE JUNIO DE 2004

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA



# Índice general

Comités del congreso	3
Horario	5
Lista de conferencias plenarias	7
Contenidos de las sesiones paralelas	9
Resúmenes de las conferencias plenarias	21
Resúmenes de las comunicaciones orales	27
Resúmenes de los paneles	103
Estadísticas del congreso	115
Lista alfabética de autores	119



**Comité organizador**

- Lluís Alseda (Universidad Autónoma de Barcelona)
- Susanna C. Manrubia (Centro de Astrobiología)
- Amadeu Delshams (Universidad Politécnica de Cataluña)
- Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos de Madrid)
- Jordi García Ojalvo (Universidad Politécnica de Cataluña)
- Henar Herrero (Universidad de Castilla-La Mancha) (*directora*)
- Miguel Ángel López Guerrero (Universidad de Castilla-La Mancha) (*secretario*)
- Víctor M. Pérez-García (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Luis Vázquez (Universidad Complutense de Madrid)

**Comité asesor**

- Francisco Balibrea (Universidad de Murcia)
- Angel Calsina (Universidad de Girona)
- Ramon Codina (Universidad Politécnica de Cataluña)
- Manuel de León (I. Matemáticas y Física Fundamental, CSIC, Madrid)
- José Durany (Universidad de Vigo)
- Andrés Fernández Díaz (Universidad Computense de Madrid)
- Mario Floria (Universidad de Zaragoza)
- Enrique Ponce (Universidad de Sevilla)
- José L. Rodríguez Marrero (Universidad Pontificia Comillas de Madrid)
- Ramón Román Roldán (Universidad de Granada)
- Miguel Rubí (Universidad de Barcelona)
- José M. Sancho (Universidad de Barcelona)
- Manuel Silva (Universidad de Córdoba)
- Juan Soler (Universidad de Granada)
- Luis Vega (Universidad del País Vasco)
- Ramon Vilaseca (Universidad Politécnica de Cataluña)

**Comité local**

- Alfonso Bueno Orovio (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Juan Luis García Guirao (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Sergio Hoyas Calvo (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Teresa Montañés Calvelo (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Gaspar Montesinos Matilla (Universidad de Castilla-La Mancha)



## HORARIO DE SESIONES

Martes 1 de junio		Miércoles 2 de junio	
9:30–10:15	PLENARIA 1: Jordi Bascompte	9:30–10:15	PLENARIA 4: José Manuel Casado
10:15–11:00	Inauguración	10:30–11:50	XA1 Ciclos límite XA2 Métodos numéricos para EDPs XA3 Electrónica y comunicaciones XA4 Sistemas hamiltonianos
11:00–11:30	Café	11:50–12:20	Café
11:30–12:30	MA1 Modelos basados en ecs. Schrödinger MA2 Sistemas neuronales MA3 Órbitas periódicas I MA4 Reacciones químicas	12:20–13:40	XB1 Control y optimización II XB2 Sistemas forzados XB3 Dinámica integrable XB4 Caos I
12:40–13:40	MB1 Control y optimización I MB2 Fenómenos de transporte MB3 Series temporales I MB4 Economía	14:00–16:00	Comida
14:00–16:00	Comida	16:00–17:40	XC1 Métodos algebraicos XC2 Bifurcaciones II XC3 Estructuras localizadas XC4 Sistemas dinámicos discretos
16:00–16:45	PLENARIA 2: Flavio Fenton	17:40–18:40	Mesa redonda
16:55–17:40	PLENARIA 3: Manuel de Castro	18:40–19:40	Paneles y vino español
17:40–18:10	Merienda		
18:10–19:30	MC1 Sistemas integrables MC2 Sistemas con retraso MC3 Redes complejas MC4 Bifurcaciones I		
20:00	Visita guiada al Casco Antiguo de Toledo		

Jueves 3 de junio		Viernes 4 de junio	
9:30–10:15	PLENARIA 5: Alfonso Valencia	9:30–11:10	VA1 Ondas no lineales VA2 Osciladores no lineales VA3 Osciladores acoplados VA4 Dinámica de fluidos
10:30–11:50	JA1 Sistemas extensos I JA2 Predicción JA3 Dinámica de fluidos computacional JA4 Caos II	11:10–11:30	Café
11:50–12:20	Café	11:30–12:15	PLENARIA 8: Àngel Jorba
12:20–13:40	JB1 Poblaciones estructuradas JB2 Variedades invariantes JB3 Métodos numéricos JB4 Ruido en sistemas extensos	12:25–13:10	PLENARIA 9: Jordi Caballé
14:00–16:00	Comida	13:10	Clausura
16:00–16:45	PLENARIA 6: Albert Díaz-Guilera		
16:55–17:40	PLENARIA 7: Juan Luis Vázquez		
17:40–18:10	Merienda		
18:10–19:30	JC1 Órbitas periódicas II JC2 Estrategias evolutivas JC3 Sistemas extensos II JC4 Series temporales II		
21:00–23:00	Cena del congreso		





## Lista de conferencias plenarias

Las conferencias plenarias se celebrarán en la *Iglesia de San Pedro Mártir*.

<i>Redes de interacciones mutualistas: la arquitectura de la biodiversidad</i>	
Jordi Bascompte	pág. 23
Martes 1 de Junio, 9:30-10:15	
Modera: Susanna C. Manrubia	
<i>Dinámica de ondas espirales y su relación con las arritmias cardíacas</i>	
Flavio H. Fenton	pág. 23
Martes 1 de Junio, 16:00-16:45	
Modera: Victor M. Pérez-García	
<i>La predicción numérica del tiempo: determinismo y caos</i>	
Manuel de Castro Muñoz de Lucas	pág. 23
Martes 1 de Junio, 16:55-17:40	
Modera: Victor M. Pérez-García	
<i>Sincronización transitoria en colectivos de neuronas</i>	
José Manuel Casado Vázquez	pág. 24
Miercoles 2 de Junio, 9:30-10:15	
Modera: Miguel A. F. Sanjuán	
<i>Complejidad de las redes de interacción entre proteínas: una perspectiva bioinformática</i>	
Alfonso Valencia	pág. 24
Jueves 3 de Junio, 9:30-10:15	
Modera: Jordi García-Ojalvo	
<i>Física estadística de redes complejas</i>	
Albert Díaz-Guilera	pág. 25
Jueves 3 de Junio, 16:00-16:45	
Modera: Luis Vázquez	
<i>Progresos en difusión no lineal. Teoría y aplicaciones</i>	
Juan Luis Vázquez	pág. 25
Jueves 3 de Junio, 16:55-17:40	
Modera: Luis Vázquez	
<i>Cálculo efectivo de objetos invariantes</i>	
Àngel Jorba	pág. 25
Viernes 4 de Junio, 11:20-12:05	
Modera: Amadeu Delshams	
<i>Formación de hábitos y externalidades del consumo en modelos económicos</i>	
Jordi Caballé Vilella	pág. 26
Viernes 4 de Junio, 12:15-13:00	
Modera: Amadeu Delshams	



# CONTENIDOS DE LAS SESIONES PARALELAS



**Sesión MA1: Sistemas modelados por ecuaciones de Schrödinger****Martes, 1 de junio (11:30-12:30)****Aula 1.2**

MODERA: FLORENTINO BORONDO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Movilidad de <i>breathers</i> en redes de Schrödinger no lineales	Jesús Gómez Gardeñes	29
11:50	Dinámica de vórtices ópticos en condensados de luz	María J. Paz Alonso	29
12:10	Condiciones locales de frontera absorbente para la ecuación no lineal de Schrödinger	Isaías Alonso Mallo	30

**Sesión MA2: Modelos y análisis de datos neuronales****Martes, 1 de junio (11:30-12:30)****Aula 2.2**

MODERA: JOSÉ MANUEL CASADO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Estudio de la regularidad de los electroencefalogramas de pacientes con la enfermedad de Alzheimer con la Entropía Aproximada	Daniel-Emilio Abásolo Baz	30
11:50	Universalidad y especificidad en el electroencefalograma de sueño/vigilia	José Angel Oteo Araco	31
12:10	Respuestas de neuronas de Morris-Lecar acopladas a estímulos estocásticos y modulación periódica	Pablo Balenzuela	31

**Sesión MA3: Órbitas periódicas I****Martes, 1 de junio (11:30-12:30)****Iglesia de San Pedro Mártir**

MODERA: LUIS FLORÍA

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Construcción de órbitas periódicas atractoras de una familia de métodos iterativos de tercer orden	Sergio Amat Plata	31
11:50	Órbitas periódicas en perturbaciones de sistemas lineales a trozos no controlables	Victoriano Carmona Centeno	32
12:10	Dinámica de partículas en caída libre sobre perfiles escalonados	María José Romero Vallés	33

**Sesión MA4: Reacciones químicas****Martes, 1 de junio (11:30-12:30)****Teatrillo de San Pedro Mártir**

MODERA: CARLOS BRIONES

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Estudio computacional de la cinética de oxidación de alcoholes por hexacianoferrato(III) catalizada por rutenio(VI)	Oscar Sánchez Díaz	33
11:50	Distribución fractal del adsorbato en reacciones catalíticas heterogéneas	José Juan Luque Palomo	33
12:10	Ondas concéntricas en la reacción de oxidación de CO sobre Pt(110)	Michael Stich	34

**Sesión MB1: Control y optimización I****Martes, 1 de junio (12:40-13:40)****Aula 1.2**

MODERA: MANUEL DE LEÓN

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:40	Un método de colocación para problemas de control óptimo en convección	M. Cruz Navarro Lérida	34
13:00	Límite de problemas lineales parabólicos con condiciones de Dirichlet cuando los coeficientes y los dominios son simultáneamente variables	Carmen Calvo-Jurado	34
13:20	Un esquema de multirresolución no lineal y no separable para el procesamiento de imágenes	Juan Carlos Trillo Moya	35

**Sesión MB2: Fenómenos de transporte****Martes, 1 de junio (12:40-13:40)****Aula 2.2**

MODERA: MIGUEL RUBÍ

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:40	Movimientos aleatorios con ramificación, sistemas hiperbólicos no lineales y ondas viajeras	Nikita Ratanov	36
13:00	Estudio de estabilidad de nanodiodos balísticos n+-n-n+ dopados	Inmaculada R. Cantalapiedra	36
13:20	Estabilidad del sistema multidimensional de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck en el régimen de campo alto	J. Nieto	37

**Sesión MB3: Series temporales I****Martes, 1 de junio (12:40-13:40)****Iglesia de San Pedro Mártir**

MODERA: RAMÓN ROMÁN ROLDÁN

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:40	Leyes de potencia y memoria larga en las series financieras de alta frecuencia	Pilar Grau Carles	37
13:00	Identificación de no linealidades en sistemas físicos mediante técnicas estadísticas de alto orden	M. C. Carrión	38
13:20	Predicción de series temporales mediante redes neuronales. Aplicación a la predicción del consumo eléctrico	Miguel Angel Jaramillo Morán	38

**Sesión MB4: Aplicaciones en economía****Martes, 1 de junio (12:40-13:40)****Teatrillo de San Pedro Mártir**

MODERA: BARTOLO LUQUE

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:40	¿Cuántas monedas llevas en tu bolsillo?	Juan C. Nuño	39
13:00	Dinámica caótica en economías emergentes con restricciones en el crédito	Xavier Jarque Ribera	39
13:20	Thermodynamics of profit seeking bosons	Kestutis Staliunas	39

**Sesión MC1: Sistemas integrables****Martes, 1 de junio (18:10-19:30)****Aula 1.2**

MODERA: FRANCISCO BALIBREA

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Miwa's representation of the Volterra hierarchy	V.E. Vekslerchik	40
18:30	Integración por modificación: un método de reducción de orden para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	Andrew Pickering	40
18:50	Inversos de factor integrante polinomiales para sistemas diferenciales cuadráticos	Antoni Ferragut i Amengual	40
19:10	Persistencia de órbitas periódicas y simetrías	Jorge Galán Vioque	41

**Sesión MC2: Sistemas con retraso****Martes, 1 de junio (18:10-19:30)****Aula 2.2**

MODERA: J. SOLER

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Un resultado de existencia y unicidad de solución para el sistema de LANS-alfa tridimensional estocástico con retardo	Antonio Miguel Márquez Durán	41
18:30	Estudio de la influencia de la dispersión de ganancia en la dinámica, coherencia y ruido en la intensidad de un láser de semiconductor multimodo con reinyección óptica	Carles Serrat Jurado	42
18:50	Un sistema depredador-presa periódico con retraso finito	Clotilde Martínez Alvarez	42
19:10	Estudio numérico de una ecuación de sine-Gordon fraccionaria	Teresa Pierantozzi	43

Sesión MC3: Redes complejas			
Martes, 1 de junio (18:10-19:30)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: SUSANNA C. MANRUBIA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Sincronización en redes complejas tipo <i>scale-free</i>	Miguel Vázquez-Prada Baillet	44
18:30	Nolinealidad y Caos en Redes de Comunicaciones de tipo Small-World	Pedro Pascual Broncano	44
18:50	La red de colaboraciones europea en el contexto del Programa Marco	Juan Antonio Almendral Sánchez	45
19:10	Scale-free brain functional networks	Víctor M. Eguíluz	45

Sesión MC4: Bifurcaciones I			
Martes, 1 de junio (18:10-19:30)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: EMILIO FREIRE			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Bifurcaciones globales en la degeneración Punto-T-Hopf	Fernando Fernández Sánchez	45
18:30	Influencia de la variedad estable de puntos de silla en la generación de ciclos límite de baja frecuencia en un regulador <i>boost</i>	Luis Benadero García-Morato	46
18:50	Bifurcaciones <i>cocoon</i>	Santiago Ibáñez Mesa	46
19:10	Sobre las inestabilidades tridimensionales de flujos bidimensionales con simetría espacio-temporal $Z_2$	Francisco Marqués Truyol	47

Sesión XA1: Ciclos límite			
Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)		Aula 1.2	
MODERA: ENRIQUE PONCE			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Isócronas, existencia y estabilidad de ciclos límite a través de simetrías de Lie	Toni Guillamon Grabolosa	48
10:50	Polynomial vector fields with algebraic limit cycles	Natalia Sadovskaia	48
11:10	Ciclos límite algebraicos en sistemas cúbicos de Liénard con rozamiento lineal	Isaac A. García Rodríguez	49
11:30	Sobre el periodo de los ciclos límite que aparecen en bifurcaciones uniparamétricas de sistemas diferenciales en el plano	Víctor Mañosa Fernández	49

Sesión XA2: Métodos numéricos para EDPs			
Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)		Aula 2.2	
MODERA: HENAR HERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Solución analítico-numérica del problema asociado a la estimación del flujo en colectores de escape de motores de combustión interna alternativo	Jose Manuel Arnau Pilar	50
10:50	Métodos espectrales para EDPs en dominios irregulares. Aplicaciones a problemas cardiológicos	Alfonso Bueno Orovio	50
11:10	Una técnica eficiente para disminuir notablemente la reducción de orden en tiempo al integrar problemas parabólicos semilineales	Begoña Cano Urdiales	51

Sesión XA3: Electrónica y comunicaciones			
Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ MARRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Histéresis en la conducta oscilatoria de un circuito electrónico tridimensional	Javier Ros Padilla	51
10:50	Realización, simulación y control del circuito de Chua	Damián Ginestar Peiró	51
11:10	Codificación de canal usando caos	Francisco Javier Escribano Aparicio	52
11:30	Convertidores de potencia como sistemas complementarios	Carles Batlle Arnau	52

Sesión XA4: Caos en sistemas hamiltonianos			
Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: MIGUEL ÁNGEL F. SANJUAN			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Cálculo numérico del <i>scattering map</i>	Pablo Roldán Gonzalez	53
10:50	Análisis multifractal en el estudio de la estructura caótica de sistemas hamiltonianos	Rosa María Benito Zafrilla	54
11:10	Estudio de la sensibilidad de ODEs y DAEs mediante métodos de Taylor: aplicación en indicadores de caos	Roberto Barrio Gil	54
11:30	Caracterización de la inestabilidad local en un Hamiltoniano 3D	Juan Carlos Vallejo Chavarino	54

Sesión XB1: Control y optimización II			
Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)		Aula 1.2	
MODERA: HENAR HERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Programación dinámica Lipschitz continua: aplicación a la explotación óptima de recursos renovables	José María Maroto Fernández	55
12:40	Estados extremos y dinámica asintótica de sistemas de reacción difusión	Alejandro Vidal López	55
13:00	Regularidad de las soluciones extremales de algunos problemas elípticos degenerados	Manel Sanchón Rodellar	55
13:20	Algunos resultados de controlabilidad para un modelo de campo de fases con un único control	Rosario Pérez García	56

Sesión XB2: Sistemas forzados			
Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)		Aula 2.2	
MODERA: MARIO FLORIA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Efectos del ruido aditivo en un sistema biestable forzado con una señal bicromática	José Pablo Baltanás Illanes	56
12:40	<i>Rocking</i> : un nuevo mecanismo de excitación de patrones en sistemas autooscilantes	Manuel Francisco Martínez Quesada	57
13:00	Movimiento caótico en el balanceo de bloques bajo una fuerza armónica: los pilares de edificios históricos bajo la acción de un terremoto	Florentino Borondo Rodríguez	57
13:20	Eatabilización de solitones vectoriales para un sistema de $N$ componentes	María I. Rodas Verde	58



Sesión XB3: Sistemas integrables en dinámica			
Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: JAUME LLIBRE			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Polynomial systems having a given Darbouxian function as a first integral or as an integrating factor	Chara Pantazi	58
12:40	Ecuaciones diferenciales lineales e integrabilidad para sistemas en el plano	Maite Grau Montaña	58
13:00	Nuevas soluciones de las ecuaciones de Jacobi para sistemas Hamiltonianos generalizados	Benito Hernández Bermejo	59
13:20	Simetrías y reducciones en un problema de Störmer generalizado	Víctor Lanchares Barrasa	60

Sesión XB4: Caos I			
Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: FRANCISCO BALIBREA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Clases de universalidad y comportamiento colectivo en osciladores caóticos	Susanna C. Manrubia	60
12:40	Control de transitorios caóticos en entornos ruidosos	Jacobo Aguirre Araujo	61
13:00	Polinomios caóticos en espacios de dimensión infinita	Félix Martínez Giménez	61
13:20	La mínima cantidad de caos	Alejo Barrio Blaya	62

Sesión XC1: Métodos algebraicos			
Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)		Aula 1.2	
MODERA: JAUME LLIBRE			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:00	Forma normal única bajo $C^\infty$ -equivalencia	Cristóbal García García	62
16:20	No existencia de ciclos límite algebraicos en la familia (I) de la clasificación china	Jordi Sorolla Bardají	63
16:40	Enfoque cartesiano para sistemas mecánicos con enlaces	Rafael Ramírez Inostroza	63
17:00	Bifurcation of limit cycles from a 4-dimensional center in control systems	Adriana Buică	64
17:20	Demostración algebraica de la no-integrabilidad del Problema de Hill	Sergi Simon i Estrada	64

Sesión XC2: Bifurcaciones II			
Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)		Aula 2.2	
MODERA: HENAR HERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:00	Bifurcaciones de Hopf para diversos números de onda en el problema de Poiseuille plano bidimensional	Pablo S. Casas	64
16:20	Bifurcaciones de órbitas periódicas cerca de un punto-T no transversal	Manuel Merino Morlesín	65
16:40	Bifurcaciones en modelos de calidad ambiental urbana	Jesús García Quesada	65
17:00	Bifurcaciones no suaves en sistemas <i>stick-slip</i>	Iván Merillas Santos	65
17:20	Estudio de la ecuación "inner" en un problema de escisión de separatrices exponencialmente pequeño en $\mathbf{R}^3$	Tere M-Seara	66

Sesión XC3: Estructuras localizadas			
Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: MARIO FLORIA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:00	Estabilización de solitones de la ecuación de Schrödinger no lineal	Gaspar D. Montesinos Matilla	66
16:20	Inestabilidades temporales y excitabilidad en estructuras localizadas en cavidades ópticas no lineales	Manuel A. Matías	67
16:40	Atractores para una ecuación seno-Gordon con retardo finito	Tomás Caraballo Garrido	67
17:00	Dinámica de los defectos en la ecuación de Ginzburg-Landau compleja en dos dimensiones	María Aguares Carrero	67
17:20	Simetrías no clásicas de un modelo de vibraciones de viga.	José Carlos Camacho Moreno	68

Sesión XC4: Osciladores no lineales y comportamiento asintótico			
Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: MIGUEL A. LÓPEZ GUERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:00	Calentamiento por microondas usando un modelo de modulaciones de temperatura en un circuito	C. Arturo Vargas Guadarrama	68
16:20	Variedades invariantes límite en sistemas cercanos a una rotación	Ernest Fontich Julià	69
16:40	Estudio analítico y computacional del oscilador de Helmholtz	Jesús Seoane Sepúlveda	69
17:00	Cuenca de atracción del equilibrio de un oscilador no lineal en un sistema mecánico con rozamiento	Francisco Rodrigo Muñoz	69
17:20	Una caracterización de los omega-límites de flujos analíticos en el plano, la esfera y el plano proyectivo	Víctor Jiménez López	70

Sesión JA1: Sistemas extensos I			
Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)		Aula 1.2	
MODERA: ANA MARÍA MANCHO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Análisis asintótico de ecuaciones degeneradas de reacción-difusión	Monique Madaune-Tort	70
10:50	Observación de la transición Ising-Bloch en una cavidad óptica no lineal	Adolfo Esteban Martín	71
11:10	Atractores de ecuaciones de reacción-difusión en dominios no acotados	Francisco Morillas Jurado	71
11:30	Antiespirales en sistemas de reacción difusión oscilatorios	Ernesto Miguel Nicola	72

Sesión JA2: Predicción			
Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)		Aula 2.2	
MODERA: MANUEL DE CASTRO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Predicción y control medioambiental: un ejemplo a través de un sistema dinámico discreto	Mariló López González	72
10:50	Redes neuronales y sistemas dinámicos complejos	M. Victoria Caballero Pintado	73
11:10	Predicción de la precipitación mediante autómatas celulares	Óscar García Delgado	73

Sesión JA3: Dinámica de fluidos computacional			
Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: J. DURANY			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Producto de elementos finitos y método espectral para modelos de Navier-Stokes hidrostáticos	Francisco Guillén González	73
10:50	Semiflujos estocásticos generalizados y su comportamiento asintótico. Atractores para las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes	Pedro Marín Rubio	74
11:10	Inestabilidad de <i>streak breakdown</i> y transición a la turbulencia en el problema de Hagen-Poiseuille	Álvaro Meseguer Serrano	74

Sesión JA4: Caos II			
Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: S. IBÁÑEZ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
10:30	Caos en la música española del siglo XVI	Ruth Mateos de Cabo	75
10:50	La distribución de ceros de la función de Husimi como indicador de caos cuántico	Francisco Javier Arranz Saiz	75
11:10	Sub-órbitas sindéticas densas	Alfred Peris Manguillot	76
11:30	Crisis interiores continuas en el modelo neuronal de Hindmarsh-Rose	Jesús Manuel González Miranda	76

Sesión JB1: Poblaciones estructuradas			
Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)		Aula 1.2	
MODERA: JOAN SALDAÑA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Medidas entrópicas de divergencia composicional. Estudio teórico y aplicación a la segmentación de secuencias simbólicas de ADN	José Martínez Aroza	77
11:50	Memoria in vivo en cuasiespecies de retrovirus	Carlos Briones Llorente	77
12:10	Estudio de la estabilidad en un modelo no lineal de dinámica de poblaciones estructuradas	Jordi Ripoll i Missé	78

Sesión JB2: Variedades invariantes			
Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)		Aula 2.2	
MODERA: AMADEU DELSHAMS			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Cálculo de toros invariantes en un <i>cluster</i> de PCs	Estrella Olmedo	78
12:40	Análisis de un tres-toro con una frecuencia muy pequeña en el flujo de Taylor-Couette de altura pequeña	Juan Manuel López	79
13:00	Técnicas numéricas para el cálculo de variedades estables e inestables de trayectorias hiperbólicas en flujos oceánicos	Ana María Mancho Sánchez	80
13:20	La ecuación <i>inner</i> para sistemas hamiltonianos con un grado y medio de libertad rápidamente forzados	Inmaculada Baldomá Barraca	80

Sesión JB3: Métodos numéricos			
Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: ÀNGEL CALSINA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Técnica de iteración para sistemas no lineales	María Tomás Rodríguez	81
12:40	Integradores simplécticos explícitos para sistemas binarios	M <sup>a</sup> Begoña Melendo Pardos	81
13:00	La clasificación local de campos de vectores inducida por el método de Newton	Ricardo Riaza Rodríguez	81
13:30	Termohidrodinámica de un par eje-cojinete con fluidos cavitacionales	José Durany Castrillo	82

Sesión JB4: Ruido en sistemas extensos			
Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: JOSÉ M. SANCHO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:20	Fluctuaciones cuánticas en solitones brillantes de cavidad	Isabel Pérez Arjona	82
12:40	Análisis fraccional de reacciones limitadas por subdifusión	Santos Bravo Yuste	83
13:00	Resonancia coherente espacial	Oliver Carrillo Parramón	83
13:20	Atractores aleatorios de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardos	María José Garrido Atienza	84

Sesión JC1: Órbitas periódicas II			
Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)		Aula 1.2	
MODERA: VÍCTOR JIMÉNEZ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Acerca de las órbitas infinitesimales en torno a los puntos lagrangianos de libración en el problema plano elíptico restringido de tres cuerpos	Luis Floría Gimeno	84
18:30	Conjuntos analíticos y ciclos de largo periodo en ecuaciones de tipo péndulo	Juan Campos Rodríguez	85
18:50	Trayectorias homoclínicas de billares dentro de elipsoides perturbados	Rafael Ramírez Ros	85
19:10	Multifractal Properties of R90 Cellular Automaton with Memory	Juan Roberto Sánchez	86

Sesión JC2: Estrategias evolutivas			
Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)		Aula 2.2	
MODERA: JORDI BASCOMPTE			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Un modelo de tipo logístico para la interacción simbiótica de dos especies	Ricardo López-Ruiz	86
18:30	Caracterización de las estrategias evolutivamente estables en modelos matriciales de metapoblaciones y de poblaciones estructuradas	Joan Saldaña Meca	86
18:50	Desarrollo de modelos numéricos para el estudio de la acumulación de mutaciones en virus RNA	Ester Lázaro Lázaro	87
19:10	Efecto de las heterogeneidades espaciales en la dinámica de poblaciones. Regiones de permanencia	Santiago Cano Casanova	87

Sesión JC3: Sistemas extensos II			
Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: JORDI GARCÍA OJALVO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Fórmulas de superposición no lineales: su aplicación a la obtención de soluciones exactas para ecuaciones integrales en derivadas parciales	Pilar Ruiz Gordo	88
18:30	Influencia de la geometría en el comportamiento tipo diodo en medios activos	Irene Sendiña Nadal	88
18:50	Transición Ising-Bloch en un resonador Kerr anisótropo	Víctor J. Sánchez-Morcillo	89
19:10	Analyticity and singularity formation in the generalized KdV equation	Henrik Kalisch	89

Sesión JC4: Series temporales II			
Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: JORDI CABALLÉ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:10	Análisis de los registros electroencefalográficos de pacientes sometidos a terapia electroconvulsiva, mediante dinámica simbólica	María Isabel Parra Arévalo	90
18:30	Análisis de la coordinación cardiovascular y cardiorrespiratoria con técnicas no lineales multivariantes	Julián J. González González	90
18:50	Una primera aproximación al estudio de series temporales de datos de teledetección mediante técnicas de dinámica no lineal	Juan José Miralles Canals	91
19:10	Estudio de órbitas de sistemas dinámicos mediante <i>wavelets</i>	Francisco Ballesteros Olmo	92

Sesión VA1: Ondas no lineales			
Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)		Aula 1.2	
MODERA: VÍCTOR M. PÉREZ GARCÍA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Soluciones moduladas tipo solitón para la ecuación de Zakharov-Kuznetsov	María del Carmen Jorge y Jorge	92
9:50	Transmisión, reflexión y generación del segundo armónico en una guía de ondas no lineal	Grant Lythe	93
10:10	Ecuación diferencial ordinaria como límite para una ecuación de ondas no lineal para un sistema muelle-masa	Marta Pellicer Sabadí	93
10:30	Diffusion of intrinsic localised modes by attractor hopping	Matthias Meister	93
10:50	Estudio de ecuaciones tipo Klein-Gordon no lineales mediante un formalismo Lagrangiano	Elías Zamora-Sillero	94

Sesión VA2: Sistemas dinámicos discretos			
Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)		Aula 2.2	
MODERA: LLUÍS ALSÈDÀ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Modelos dinámicos discretos de neuronas	Borja Ibarz Gabardós	94
9:50	Sobre ANCE's en sistemas triangulares con base no conjugada a una rotación	Sara Costa Romero	95
10:10	Dinámica mínima en árboles	David Juher Barrot	95
10:30	Combinación periódica de aplicaciones cuadráticas y paradoja de Parrondo	Daniel Peralta-Salas	96
10:50	Sistemas dinámicos discretos que generan únicamente conjuntos scrambled bipuntuales	Juan Luis García Guirao	96

Sesión VA3: Osciladores acoplados			
Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)		Iglesia de San Pedro Mártir	
MODERA: JOSÉ MARÍA SANCHO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Competición de dominos de sincronización en redes de osciladores caóticos	Inmaculada Leyva Callejas	97
9:50	Competición de osciladores no-lineales a través de un elemento excitable. Aplicación a arritmias cardíacas	Ana María Lacasta Palacio	97
10:10	Bifurcaciones paramétricas en osciladores perturbados resonantes	Mercedes Arribas Jiménez	98
10:30	Synchronization between two Hele-Shaw convective cells	Jean Bragard	98
10:50	Láseres de semiconductor multimodo: sincronización y comunicación encriptada	Javier Martín Buldú	98

Sesión VA4: Dinámica de fluidos			
Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)		Teatrillo de San Pedro Mártir	
MODERA: FRANCISCO MARQUÉS			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Uso del p-Laplaciano en modelos de consolidación de Biot monodimensionales	Patrick Saint-Macary	99
9:50	Convección de Bénard-Marangoni en un dominio cilíndrico	Sergio Hoyas Calvo	99
10:10	Leyes de escala y semejanza para flujos en tuberías lisas y rugosas	Pedro Luis Luque Escamilla	99
10:30	Un método numérico para la ecuación no lineal de Reynolds en dispositivos magnéticos	J. Jesús Cendán Verdes	100
10:50	Un esquema paralelo en tiempo y espacio para la resolución de problemas en mecánica de fluidos	José Román Galo Sánchez	100

# CONFERENCIAS PLENARIAS





## Redes de interacciones mutualistas: la arquitectura de la biodiversidad

Jordi Bascompte

*Estación Biológica de Doñana, CSIC  
Apdo. 1056, E-41080 Sevilla (Spain)*

E-MAIL: [bascompte@ebd.csic.es](mailto:bascompte@ebd.csic.es)

WWW: <http://bascompte.org>

COLABORADORES: Pedro Jordano (EBD, CSIC), Carlos J. Melián (EBD, CSIC) y Jens M. Olesen (University of Aarhus, Denmark)

Las interacciones coevolutivas entre plantas y los animales que las polinizan o dispersan sus semillas son uno de los grandes motores de generación de biodiversidad en la Tierra. La mayoría de estudios de interacciones planta-animal se han centrado en interacciones muy específicas entre un número muy pequeño de especies. Algunos investigadores han reconocido que estos ejemplos de especialización extrema son la excepción; la mayoría de las interacciones mutualistas involucran a un número mucho mayor de especies. Dichos autores han acuñado el término coevolución difusa para describir esta situación. No obstante, dicho concepto no da pistas sobre la estructura de las redes coevolutivas. Nuestra aproximación pretende construir un marco conceptual que describa cómo se estructuran las interacciones mutualistas en comunidades ricas de especies.

Utilizando una gran base de datos con un total de 53 redes coevolutivas hemos analizado la distribución de conectividades, es decir, la probabilidad acumulada  $P(k)$  de que una especie escogida al azar interactúe con  $k$  especies. La mayoría de las redes estudiadas presentan distribuciones de conectividad que no se ajustan a una distribución exponencial ni a una ley de potencia, sino a una ley de potencia truncada. Dicha distribución corresponde a un proceso de autoorganización en el que nuevas especies se conectan con mayor probabilidad a las especies más conectadas (como en las distribuciones libres de escala), pero con un límite máximo en el número de conexiones que una especie puede mantener. Dicha distribución se origina de la existencia de interacciones prohibidas entre pares de especies (por ejemplo por restricciones fenológicas o de tamaño: un ave difícilmente dispersará los frutos de una especie de planta cuyo tamaño sea mayor del que su pico pueda manipular). Dichas redes son muy heterogéneas (hay especies mucho más conectadas de lo esperado por azar) pero menos frágiles ante la eliminación de las especies más conectadas que las redes libres de escala.

El estudio de la distribución de conectividades es sólo un primer paso en la caracterización del grado de estructura de las redes mutualistas. Como segundo paso, hemos estudiado una propiedad macroscópica de la matriz de interacciones: su grado de anidamiento. Una matriz es anidada si los especialistas interactúan con subconjuntos definidos de las especies que interactúan con los generalistas. La estructura resultante es similar a la de las muñecas rusas, con grupos de especies encajados en conjuntos mayores. La mayoría de las redes coevolutivas son significativamente anidadas, no existiendo diferencias entre el grado de anidamiento entre los dos tipos de mutualismos.

En resumen, estos resultados sugieren que las redes coevolutivas, independientemente del tipo, tamaño, latitud, etc. tienen una arquitectura común. Esta arquitectura es fundamental para entender el proceso coevolutivo en comunidades

ricas en especies. La estructura aquí descrita tiene también profundas implicaciones para la estabilidad de dichas comunidades. Nuestra comprensión de la organización y persistencia de la biodiversidad no puede pues alcanzarse reduciendo estas comunidades a colecciones aisladas de pares de especies.

---

## Dinámica de ondas espirales y su relación con las arritmias cardíacas

Flavio H. Fenton

*Beth Israel Medical Center, New York, USA  
and Department of Physics*

*Hofstra University*

*New York, USA.*

E-MAIL: [Flavio.H.Fenton@hofstra.edu](mailto:Flavio.H.Fenton@hofstra.edu)

WWW: <http://arrhythmia.hofstra.edu>

COLABORADORES: Elizabeth M. Cherry, Harold M. Hastings (Hofstra University) and Steven J. Evans (Beth Israel Medical Center)

Las enfermedades cardíacas son una de las dolencias más extendidas en el mundo y la causa primera de muerte en los países industrializados. Solamente en Europa, las enfermedades cardiovasculares son responsables de unos cuatro millones de muertes al año, lo cual representa aproximadamente un 50% del total. Actualmente se cree que las arritmias más peligrosas se deben a ondas espirales reentrantes de actividad eléctrica. En particular, una única onda *scroll* del potencial de acción se puede asociar a la taquicardia, un ritmo cardíaco rápido que frecuentemente precede a la fibrilación, estando esta última asociada a ondas *scroll* múltiples. La fibrilación es usualmente un tipo letal de arritmia si ocurre en los ventrículos. Presentaremos descripciones matemáticas y computacionales que han sido usadas para comprender los estados iniciales y la evolución posterior de las arritmias cardíacas como función de ciertas características electrofisiológicas y anatómicas.

---

## La predicción numérica del tiempo: determinismo y caos

Manuel de Castro Muñoz de Lucas

*Universidad de Castilla-La Mancha  
Departamento de Ciencias Ambientales,  
Avda. Carlos III  
Toledo, 45071*

E-MAIL: [Manuel.Castro@uclm.es](mailto:Manuel.Castro@uclm.es)

WWW: <http://momac.uclm.es>

La predicción meteorológica se basa actualmente en el uso de modelos matemáticos de la atmósfera a escala global o regional. Estos modelos consisten básicamente en la resolución del sistema tridimensional de ecuaciones no lineales que rigen la evolución temporal de los procesos físicos más importantes que en ella tienen lugar. Para resolver esas ecuaciones se utilizan aproximaciones aplicando diversos esquemas numéricos. La discretización espacial que involucran tales esquemas obliga también a usar ecuaciones adicionales para parametrizar los efectos de aquellos procesos atmosféricos cuyas escalas espaciales son comparables o menores al

tamaño de la malla del modelo. Las condiciones iniciales del estado de la atmósfera se deducen de los datos obtenidos con múltiples sistemas de observación que cubren todo el globo terrestre, aplicando técnicas especiales de interpolación y asimilación. Para realizar esta gran cantidad de cálculos se utilizan los ms potentes ordenadores.

No obstante, la mayor dificultad radica en el carácter caótico del sistema atmosférico, pues eso implica que las predicciones realizadas con modelos presentan una extremada sensibilidad a las condiciones iniciales. Este tipo de incertidumbre determina una seria limitación en la predecibilidad de la evolución del sistema, que se añade a la que se deriva del uso de los métodos aproximados para resolver las ecuaciones. No obstante, ambas tienen naturaleza diferente. La segunda puede reducirse mejorando los modelos. Pero la primera es una propiedad intrínseca del sistema no lineal atmosférico que no es posible soslayar, ni aun en el caso ideal de que se llegara a disponer de modelos perfectos. Sin embargo, existen procedimientos para cuantificar de manera aproximada su contribución al error inherente en cualquier predicción de la evolución del caótico sistema atmosférico. Consecuentemente, esto introduce un cierto grado de determinismo en el ejercicio de la predicción numérica del tiempo, por lo que podría calificarse con el aparentemente contradictorio término de caos determinista.

En resumen, la predicción meteorológica con modelos numéricos constituye pues un excelente campo de actividad científica para los matemáticos, los físicos de la atmósfera y los informáticos que quieran experimentar con los métodos, técnicas o dispositivos más avanzados. Y todo ello, además, con una expectativa de aplicabilidad práctica e inmediata de los resultados.

---

## Sincronización transitoria en colectivos de neuronas

José Manuel Casado Vázquez  
*Universidad de Sevilla*  
*Facultad de Física*  
*Apartado de Correos 1065 Sevilla 41080.*

E-MAIL: [casado@us.es](mailto:casado@us.es)

La aparición espontánea de comportamiento sincronizado en poblaciones de osciladores no lineales se ha revelado como un fenómeno de la máxima relevancia en el campo de las ciencias de la vida. En Neurociencia, las ideas sobre sincronización de neuronas se remontan a los trabajos de Hebb (1949). Desde entonces, el papel de la sincronización neuronal en el funcionamiento del sistema nervioso se ha hecho indiscutible.

El trabajo matemático sobre sincronización de grandes colectivos de osciladores no lineales consiguió su primer éxito notable con los resultados de Mirollo y Strogatz en 1990. Previamente, los trabajos de Winfree y Kuramoto habían puesto las bases para un estudio riguroso de los problemas de sincronización en poblaciones de osciladores no lineales acoplados. Luego, el descubrimiento por Pecora y Carroll de la sincronización de osciladores caóticos añadió una nueva dimensión al campo de estudio.

En el transcurso de las dos últimas décadas, el trabajo sobre sincronización de osciladores biológicos ha sido urgente y en el dominio de la Neurociencia, en particular, se ha elaborado una enorme cantidad de modelos para estudiar diferentes problemas relacionados con la sincronización

neuronal. En 1996, Wehr y Laurent describieron un tipo de *sincronización transitoria* en el comportamiento de ciertas neuronas del sistema olfativo de la langosta americana.

A partir de ahí, los trabajos de H.D.I. Abarbanel y colaboradores han proporcionado el fundamento teórico y experimental para la formulación de un nuevo mecanismo para la computación neuronal en base a la idea de *Winnerless Competition Network* (WCN). En un sistema de este tipo, cada estímulo externo queda codificado en un patrón de activaciones y sincronizaciones secuenciales que recorre todas las neuronas del colectivo. La idea de WCN ha sido implementada recientemente por Rabinovich *et al.* mediante un sistema de osciladores de FitzHugh-Nagumo acoplados sinápticamente y por Casado, empleando una red acoplada de aplicaciones bidimensionales estudiadas anteriormente por Rulkov.

El propósito de esta charla es mostrar la importancia de la sincronización de osciladores en Neurociencia y describir los trabajos sobre sincronización transitoria en el contexto de la dinámica no-lineal de redes de unidades neuronales acopladas.

---

## Complejidad de las redes de interacción entre proteínas: una perspectiva bioinformática

Alfonso Valencia  
*Protein Design Group*  
*Cetro Nacional de Biotecnología, CNB-CSIC*  
*Cantoblanco, Madrid E-28049, Spain*

E-MAIL: [valencia@cnb.uam.es](mailto:valencia@cnb.uam.es)

WWW: <http://www.pdg.cnb.uam.es>

La Biología Molecular ha sufrido una espectacular transformación en los últimos años con la introducción de técnicas de robotización y automatización de procesos experimentales. Resultados de esta transformación son las primeras descripciones de los sistemas celulares en términos de las relaciones entre los componentes moleculares básicos, incluyendo los primeros mapas de control entre genes para la regulación de la expresión coordinada de las proteínas en respuesta a las condiciones externas, y los primeros gráficos de interacciones entre proteínas, en los que se contiene la información sobre la organización y funcionamiento de las máquinas moleculares (complejos de proteínas) en cargados de las funciones básicas de los organismos. La explosión de datos generados en el dominio de Biología Molecular y Biomedicina supone un reto formidable para la Bioinformática y la Biología Computacional. En este caso estamos hablando de unas 500 bases de datos de conocimiento específico dispersas, con un contenido de información pobremente estructurado, altamente heterogéneo y generalmente muy complejo sobre más de un millón de proteínas. Desde un punto de vista aplicado, la información sobre la organización y control de los circuitos moleculares en sistemas celulares abre una nueva perspectiva para el desarrollo de medicamentos y la racionalización del conocimiento médico. Las cuestiones tipo en este área están relacionadas con las diferencias entre individuos con distintas susceptibilidades a enfermedades o fármacos. Desde el punto de vista puramente científico el análisis de las primeras redes de control génico e interacción de proteínas ha revelado que se trata de sistemas complejos que se ajustan a un comportamiento libre de escala, en las que pueden detectarse compartimentos (módulos) relacionados con funciones diferenciadas. Las cuestiones actualmente debatidas tienen

que ver con el origen histórico de esta organización, la influencia de la selección natural en la misma, y las diferencias entre organismos vivos respecto a otros sistemas de organización artificiales. Nuestro grupo de investigación está directamente implicado en los aspectos Bioinformáticos del problema (bases de datos, extracción de información de textos científicos y bases de datos, organización y representación de la información). En colaboración con grupos experimentales (Victor de Lorenzo CNB-CSIC), y teóricos (Luis Vázquez UCM, Juan Pérez-Mercader CAB-INTA-CSIC) trabajamos en el análisis y manipulación de sistemas de biodegradación (comunidades de bacterias que en condiciones naturales utilizan compuestos tóxicos como fuente de energía) como un sistema modelo para el estudio de las redes de interacción y control. Este nuevo panorama de la Biología Molecular, en el que confluyen los aspectos informáticos, experimentales y teóricos, es lo que ha comenzado a denominarse Biología de Sistemas, y el que pensamos que será crucial para el desarrollo de la ciencia en la primera mitad del siglo XXI.

### Física estadística de redes complejas

Albert Díaz-Guilera  
*Universitat de Barcelona*  
*Departament Física Fonamental,*  
*Martí i Franquès, 1*  
*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [albert.diaz@ub.edu](mailto:albert.diaz@ub.edu)  
 WWW: <http://complex.ffn.ub.es>

Matemáticamente, una red es un conjunto de puntos (nodos) unidos por vértices (enlaces). Las propiedades de las redes han sido extensamente estudiadas por los matemáticos, aunque restringiéndose a redes muy regulares o a redes muy desordenadas, en las cuales juegan un papel muy importante las propiedades estadísticas. Sin embargo, en los últimos años hemos vivido una verdadera revolución científica que nos ha hecho darnos cuenta de que muchos fenómenos en disciplinas tan dispares como la biología, la física, la informática, la economía o las ciencias sociales, tienen lugar en complejos entramados de interacción entre los elementos que las forman. Aunque en cada una de estas disciplinas el concepto de enlace entre dos nodos tiene significados diferentes; así por ejemplo, en una red trófica, los nodos son las especies animales y los enlaces corresponden a pares depredador-presa, Internet es una red de ordenadores conectados mediante conexiones de soporte físico, la World-Wide-Web es un entramado de documentos relacionados entre ellos mediante hiperenlaces, o las relaciones de parentesco y amistad configuran determinadas redes sociales. Estas redes complejas han estado siempre ahí, pero ha sido precisamente una de ellas, la propia Internet, la que ha puesto al alcance de muchos científicos de diferente formación grandes cantidades de inmensas bases de datos. La potencia de los ordenadores actuales, que permite un estudio detallado de esta información digitalizada, ha hecho el resto, permitiendo establecer que las estructuras que aparecen en la naturaleza o en la sociedad están a medio camino entre el orden total y el desorden absoluto.

Y las ciencias sociales han sido una de las grandes beneficiadas de esta nueva manera de ver la ciencia. Por otra parte las propias redes de ordenadores han favorecido la aparición de nuevas redes sociales, incrementando la comunicación entre amigos y familiares, creando comunidades virtuales de

personas que de otra manera nunca se hubieran conocido. Pero para investigar las propiedades de estas complejas redes necesitamos nuevas herramientas que nos permitan monitorizar su funcionamiento, para saber si la comunicación uye en la dirección y con la intensidad correctas, y también herramientas que nos permitan diseñar redes con un mejor funcionamiento. De hecho, la construcción de modelos matemáticos nos ayuda a poder establecer algunas predicciones sobre el comportamiento de estas redes.

### Progresos en difusión no lineal. Teoría y aplicaciones

Juan Luis Vázquez  
*Departamento de Matemáticas*  
*Universidad Autónoma de Madrid*  
*Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid*

E-MAIL: [juanluis.vazquez@uam.es](mailto:juanluis.vazquez@uam.es)  
 WWW: <http://www.uam.es/juanluis.vazquez>

En la charla se expondrán varios resultados recientes en la teoría de las ecuaciones parabólicas no lineales cuya forma general es

$$u_t = \sum \partial_i(A_i(u, Du)) + \sum_i \partial_i B_i(x, u, Du)$$

y se informará de algunas aplicaciones en curso. He aquí una lista de temas:

- (i) existencia, movimiento y regularidad de fronteras libres;
- (ii) estimaciones de decaimiento y estabilización. Soluciones con colas no exponenciales. Convexidad asintótica;
- (iii) relación con ecuaciones cinéticas;
- (iv) nuevos conceptos de solución: viscosidad, entropía;
- (v) aplicación en procesamiento de imágenes.

### Cálculo efectivo de objetos invariantes

Àngel Jorba  
*Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi*  
*Universitat de Barcelona*  
*Gran Via de les Corts Catalanes, 585*  
*08007 Barcelona*

E-MAIL: [angel@maia.ub.es](mailto:angel@maia.ub.es)

El propósito de la charla es ilustrar, mediante ejemplos, el cálculo de variedades invariantes en sistemas dinámicos.

Si dejamos de lado los puntos fijos y las órbitas periódicas, los objetos más "simples" que nos podemos encontrar son los toros invariantes, que aparecen de manera natural al estudiar movimientos oscilatorios que involucran más de una frecuencia. En la charla describiremos algunos de los métodos utilizados para calcularlos, así como su utilidad en algunos ejemplos concretos.

También comentaremos el cálculo de variedades estables, inestables y centrales. Como veremos, en muchos casos el conocimiento de dichas variedades permite dar una descripción cualitativa de la estructura del espacio de fases y, por tanto, de la dinámica.

## **Formación de hábitos y externalidades del consumo en modelos económicos**

Jordi Caballé Vilella

*Universitat Autònoma de Barcelona*

*Departamento de Economía y de Historia Económica*

*Edificio B*

*08193 Bellaterra (Barcelona)*

E-MAIL: [jordi.caballe@uab.es](mailto:jordi.caballe@uab.es)

WWW: <http://hotelling.uab.es/~jcaballe/>

La introducción de hábitos en las preferencias de los agentes económicos conlleva la introducción de un vínculo dinámico adicional en las decisiones de consumo y ahorro. Los individuos saben que el nivel de consumo presente se utilizará para ser comparado con el consumo futuro. Veremos cómo, en los modelos de acumulación de capital con productividad marginal del capital constante, la presencia de hábitos sirve para generar dinámica transicional. Por otra parte, la sola introducción de externalidades en el consumo contemporáneo no suele conllevar que las trayectorias de acumulación de capital sean sub-óptimas. Presentaremos condiciones bajo las cuales la combinación de las externalidades en el consumo y de hábitos es una fuente de ineficiencia. También discutiremos las implicaciones macroeconómicas y financieras de otras desviaciones respecto a las especificaciones tradicionales de las preferencias de los consumidores, tales como los hábitos externos, así como las formas funcionales de la función de utilidad multiplicativas versus las aditivas. Finalmente discutiremos el papel de la política fiscal en estos contextos.

---

# COMUNICACIONES ORALES



---

## Sesión MA1: Sistemas modelados por ecuaciones de Schrödinger

Martes, 1 de junio (11:30-12:30)

Aula 1.2

Moderador: Florentino Borondo

---

### Movilidad de *breathers* en redes de Schrödinger no lineales

Jesús Gómez Gardeñes

Universidad de Zaragoza

Dept. de Física de la Materia Condensada e Instituto de Biocomputación y Física de los Sistemas Complejos,

c/Pedro Cerbuna, 12

Zaragoza, 50009

E-MAIL: [gardenes@unizar.es](mailto:gardenes@unizar.es)

COLABORADORES: Luis Mario Floría Peralta (U. Zaragoza), Fernando Falo Forniés (U. Zaragoza)

El estudio de la movilidad de soluciones localizadas en redes de Schrödinger no lineales es de gran interés debido a su aplicación a campos de la Física como condensados de Bose-Einstein y transmisión de pulsos en dispositivos de óptica no lineal. La ecuación que describe la dinámica en tales sistemas es la conocida ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLSE). Los intentos de encontrar soluciones móviles intrínsecamente localizadas en esta ecuación se han basado en el estudio perturbativo de las soluciones móviles de otra ecuación no lineal, la ecuación de Ablowitz-Ladik (ALE), que es integrable y se puede deformar, destruyendo la integrabilidad, hacia la DNLSE.

Nuestro trabajo ha consistido en continuar las soluciones móviles del límite integrable de la ALE hacia la DNLSE, siguiendo el camino propuesto por Salerno. Un *breather* móvil presenta dos escalas de tiempo: el periodo de su oscilación interna  $T_b$  y, debido a la discretitud, la dada por su velocidad  $\tau_b$ . El algoritmo de continuación exige a la nueva solución fuera del límite integrable poseer las mismas escalas de tiempo que la solución continuada en el límite integrable. Este procedimiento requiere que ambas escalas de tiempo sean conmensuradas  $T_b/\tau_b = p/q$ , de forma que partimos de conjuntos de soluciones etiquetados por la relación  $p/q$  entre las dos escalas. En cada conjunto  $p/q$ , una solución concreta de período  $T_b^*$  y velocidad  $1/\tau_b^*$  se continúa, fuera de la integrabilidad, a otra que posea los mismos valores de estas magnitudes.

Las soluciones encontradas fuera del límite integrable presentan un *background* extendido formado por una superposición de ondas planas cuyos números de onda satisfacen una relación de resonancia que damos explícitamente. Una vez analizada la estructura del *background* se estudia el papel desempeñado por éste en el régimen no integrable.

La existencia de este *background* está íntimamente relacionada con la emergencia de una barrera de Peierls-Nabarro. Esta barrera está definida por la diferencia de energía entre dos soluciones estáticas con la misma frecuencia interna, una centrada en un sitio de la red ( $n$ ) y la otra entre dos sitios ( $n \pm 1/2$ ). Estas dos soluciones estáticas son las únicas posibles fuera del límite integrable (ALE), ya que fuera de ese punto se rompe la invariancia traslacional. En esta situación un *breather* móvil debe aportar esta diferencia

de energía para viajar a lo largo de la red. Hemos estudiado el desarrollo de la barrera de Peierls-Nabarro a lo largo del modelo de Salerno mediante el uso de *breathers* estáticos y lo hemos comparado con el comportamiento de la amplitud del *background* de las soluciones móviles. La conclusión es que el *background* de las soluciones contribuye a aportar la energía necesaria que el *breather* móvil necesita para superar las barreras de Peierls-Nabarro y poder moverse a lo largo de la red.

En resumen, el método de continuación desarrollado permite obtener soluciones móviles exactas fuera del límite integrable (en concreto en la DNLSE, de gran importancia para diversos campos de la física). La estructura de estas soluciones presenta un *background* extendido cuya composición se explica de manera exacta teniendo en cuenta la resonancia con las escalas de tiempo de la solución. La función de este *background* es contribuir a la superación de las barreras de Peierls-Nabarro que aparecen en el régimen no integrable.

---

### Dinámica de vórtices ópticos en condensados de luz

María J. Paz Alonso

Universidade de Vigo

Facultade de Ciencias de Ourense, Área de Óptica,

Campus As Lagoas s/n,

Ourense, 32004

E-MAIL: [mpa@uvigo.es](mailto:mpa@uvigo.es)

WWW: <http://optics.uvigo.es>

COLABORADORES: Humberto Michinel Álvarez (U. Vigo), José Ramón Salgueiro Piñeiro (U. Vigo) y David Olivieri (U. Vigo)

El objetivo de nuestro trabajo es reforzar la idea de que haces de luz que se propagan en materiales denominados cúbico-quínticos pueden experimentar una transición de fase de un gas de fotones a un líquido de luz. Para ello se ha estudiado la dinámica de los vórtices que se pueden formar en un láser. Este tipo de singularidades topológicas son análogas a las que aparecen en ramas muy diversas de la física, como por ejemplo mecánica de fluidos, condensados de Bose-Einstein y astrofísica. En óptica estos defectos se pueden producir iluminando adecuadamente un holograma generado por ordenador, o pueden surgir espontáneamente durante la propagación de luz a través de medios ópticos turbulentos.

En el presente trabajo hemos estudiado, a través de simulaciones numéricas, las propiedades colisionales de vórtices ópticos bidimensionales inmersos en haces de luz finitos. Nuestro estudio cubre un amplio rango de momento angular  $l > 1$ . Hemos centrado nuestra atención en vórtices ópticos con perfil cuadrado, que son los autoestados de la ecuación cúbico-quíntica de Schrödinger, obteniendo analíticamente los valores críticos de la constante de propagación y de la amplitud pico que caracterizan el dominio de existencia de estos vórtices, y que no dependen del valor de la carga topológica. Para probar su estabilidad hemos simulado la reflexión total de dichos haces en la frontera de un material cúbico-quíntico con un material lineal, demostrando que la tensión superficial de los haces de luz impide la filamentación del haz para cierto rango de ángulos de reflexión total, incluso en el caso de que el vórtice se divida dando lugar a varios vórtices de menor carga topológica.

---

## Condiciones locales de frontera absorbente para la ecuación no lineal de Schrödinger

Isaías Alonso Mallo  
 Universidad de Valladolid  
 Facultad de Ciencias,  
 c/Dr. Mergelina, s/n  
 Valladolid, 47011

E-MAIL: isaias@mac.uva.es

COLABORADORES: Nuria Reguera (U. de Burgos)

Consideramos el problema de valor inicial para la ecuación cúbica de Schrödinger  $\partial_t u(x,t) = i(\partial_{xx} u(x,t) + \nu |u(x,t)|^2 u(x,t))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  junto con la condición inicial  $u(x,0) = u_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

La importancia de esta ecuación en diferentes campos, como física del plasma, teoría de ondas en agua profunda, óptica no lineal, es bien conocida (véase por ejemplo [1] y referencias en [2]).

Naturalmente, para la aproximación numérica de esta ecuación debemos restringirnos a un subdominio finito. Para ello una opción muy extendida es incorporar condiciones de frontera artificiales que garanticen que la solución del problema en el subdominio coincide o aproxima bien a la restricción del problema original. Esta opción ha sido ampliamente usada en la literatura para diversas ecuaciones (véase por ejemplo el trabajo pionero [3]). En este trabajo, la ecuación es discretizada en espacio mediante diferencias finitas centrales, incorporando posteriormente las llamadas condiciones de frontera absorbentes en un dominio computacional finito.

Estas condiciones de frontera, que tienen la ventaja sobre otras de ser locales, se han obtenido previamente para la ecuación lineal de Schrödinger (véase [4, 5]) tratando de que los reflejos hacia el interior del dominio computacional sean mínimos. Para ello se utilizan las bien conocidas técnicas de [3]. Los problemas así obtenidos originan discretizaciones totales que adolecen de ciertas inestabilidades de carácter débil que aumentan cuando se usan órdenes de absorción altos.

Una solución es mantener un orden de absorción bajo y usar una implementación adaptativa en la que la condición de frontera es modificada automáticamente para absorber la solución que llega a la frontera. Esta opción ha demostrado ser útil en el caso de la ecuación lineal de Schrödinger.

En esta comunicación probamos cómo pueden modificarse adecuadamente las condiciones de frontera absorbente anteriores y la implementación adaptativa para conseguir una absorción alta sin sufrir inestabilidades.

1. G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
2. F. If, P. Berg, P.L. Christiansen and O. Skovgaard, *Split-step spectral method for nonlinear Schrödinger equation with absorbing boundaries*, J. Comput. Phys., 72, (1987), pp. 501–503.
3. B. Engquist and A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput., 31, (1977), pp. 629–651.
4. I. Alonso-Mallo and N. Reguera, *Discrete absorbing boundary conditions for Schrödinger-type equations*.

*Construction and error analysis*, SIAM J. Numer. Anal., 41, (2003), pp. 1824–1850

5. I. Alonso-Mallo and N. Reguera, *Discrete absorbing boundary conditions for Schrödinger-type equations. Practical implementation.*, Math. Comput., 73, (2004), pp. 127–142

---

## Sesión MA2: Modelos y análisis de datos neuronales

Martes, 1 de junio (11:30-12:30)

Aula 2.2

Modera: José Manuel Casado

---

### Estudio de la regularidad de los electroencefalogramas de pacientes con la enfermedad de Alzheimer con la Entropía Aproximada

Daniel-Emilio Abásolo Baz  
 Universidad de Valladolid  
 E.T.S. Ingenieros de Telecomunicación,  
 Camino del Cementerio s/n  
 Valladolid, 47011

E-MAIL: danaba@tel.uva.es

COLABORADORES: Roberto Hornero (U. Valladolid), Pedro Espino (Hospital Universitario Valladolid), Jesús Poza (U. Valladolid), Clara Isabel Sánchez (U. Valladolid)

La enfermedad de Alzheimer es la principal causa de demencia en los países occidentales. Pese a que su diagnóstico sólo puede ser definitivo mediante necropsia, el estudio de la dinámica no lineal en las señales de electroencefalograma (EEG) puede ayudar a los médicos en esa tarea. En este trabajo hemos analizado señales de EEG, registradas con los electrodos distribuidos según el sistema 10-20, de 7 pacientes con un diagnóstico de la enfermedad de Alzheimer (edad media:  $74,9 \pm 4,4$ ) y 7 sujetos de control (edad media:  $76,0 \pm 5,3$ ). Para ello hemos empleado la Entropía Aproximada (EnAp), un nuevo método de análisis no lineal que permite cuantificar la complejidad o irregularidad de una serie temporal. Se introdujo para estimar la regularidad de secuencias pensando en aplicaciones en las que los conjuntos de datos fueran pequeños y ruidosos, como es el caso en las señales biomédicas. La EnAp asigna un número no negativo a una secuencia o serie temporal, con valores más elevados cuanto mayor sea la irregularidad o complejidad en los datos analizados. Para calcular la EnAp de una serie temporal es necesario fijar dos parámetros de entrada: una longitud  $m$  y una ventana de tolerancia  $r$ . La EnAp mide la similitud logarítmica de patrones próximos (separados una distancia menor que  $r$ ) para  $m$  observaciones contiguas, y estima la probabilidad de que permanezcan a una distancia menor que  $r$  en siguientes comparaciones incrementando la longitud. Hemos estimado la Entropía Aproximada de tramas de 5 segundos correspondientes al electrodo C3 del EEG con los valores habituales  $m = 2$  y  $r = 0,25$  veces la desviación típica de la señal. Nuestros resultados muestran que la EnAp es mayor en los EEG de los sujetos de control y que, además, las diferencias existentes entre los dos grupos son significativas ( $p$ -ANOVA  $< 0,01$ ). Esto sugiere que el EEG



de los enfermos de Alzheimer es más regular y menos complejo y permite intuir que este método podría ser empleado en el futuro como ayuda en el diagnóstico de dicha patología.

---

### Universalidad y especificidad en el electroencefalograma de sueño/vigilia

José Angel Oteo Araco  
*Universidad de Valencia,  
 Departamento de Física Teórica,  
 Burjassot (Valencia), 46100*

E-MAIL: [oteo@uv.es](mailto:oteo@uv.es)

COLABORADORES: Antonia Chornet Lurbe (Servicio de Neurofisiología Clínica, Hospital La Salud, Valencia), José Ros Pallarés (U. Valencia, Dep. Física Teórica)

La actividad cerebral durante el sueño y su comparación con la vigilia es un tema en el que se investiga desde diferentes perspectivas. Su interés no es sólo puramente teórico sino que eventualmente puede tener importantes aplicaciones clínicas.

Una fuente de información sobre esta actividad la constituyen los registros electroencefalográficos (EEG). Éstos (y no sólo los de sueño/vigilia) han sido utilizados con relativa frecuencia como ejemplos de estructuras fractales en señales biomédicas, con resultados no siempre coincidentes. El EEG es producto de la actividad eléctrica colectiva de una gran multitud de neuronas, lo cual justifica la complejidad de su apariencia.

Una característica a destacar de los trazados EEG obtenidos en la práctica clínica es que una modificación adecuada de escalas en los ejes de representación transforma el EEG de un estado fisiológico en el de otro. Esto puede interpretarse como una indicación del carácter autosemejante de la señal.

En esta contribución se presentan distintos análisis de los EEGs correspondientes a las diferentes fases de sueño (I, II, III/IV, REM) y vigilia relajada. Se analizan 1380 muestras de EEGs seleccionadas de acuerdo con el estándar clínico habitual, libres de artefactos, de 30 seg de duración, correspondientes a 21 sujetos. Se consideran tres tipos de análisis cuantitativos:

- Métodos espectrales: Fourier, Hilbert.
- Métodos de geometría fractal: dimensiones fractales, lagunaridad, textura, tiempos característicos.
- Métodos de dinámica no lineal: entropías, tiempos de residencia, propiedades de escala.

Los resultados permiten concluir que los EEGs no tienen un origen aleatorio sino que son el vestigio de la información fisiológica que circula por la red de neuronas. Existen indicadores de universalidad que revelan lo que tienen en común EEGs correspondientes a diferentes estados fisiológicos, mientras que otros análisis permiten una discriminación estadística entre estos estados.

---

### Respuestas de neuronas de Morris-Lecar acopladas a estímulos estocásticos y modulación periódica

Pablo Balenzuela  
*Universidad Politécnica de Catalunya,  
 Departamento de Física e Ingeniería Nuclear  
 Calle Colom, 11  
 08222 Terrassa*

E-MAIL: [Pablo.Balenzuela@upc.es](mailto:Pablo.Balenzuela@upc.es)  
 WWW: <http://www.df.uba.ar/~balen>

COLABORADORES: Jordi Garcia Ojalvo (U. Politécnica de Catalunya)

Es bien sabido que la presencia de ruido en sistemas excitables puede estimular una respuesta casi periódica de los mismos. Dado que las redes de neuronas transmiten información en un ambiente ruidoso (debido, por ejemplo, a aperturas aleatorias de canales o actividad sináptica espontánea), nos preguntamos cómo depende su comportamiento de la presencia e intensidad del ruido, cuando el acoplamiento entre ellas es relevante en la respuesta del conjunto.

Con este objetivo, en este trabajo usamos el modelo de Morris-Lecar para estudiar el comportamiento de neuronas acopladas. En primer lugar, analizamos si la presencia de ruido externo con una intensidad apropiada puede estimular una respuesta prácticamente periódica en una neurona cuando ésta se encuentra en un régimen excitable. Analizamos también si la presencia de un estímulo débilmente periódico puede agudizar esta respuesta. Por último estudiamos el comportamiento de un sistema de neuronas acopladas y su respuesta a los estímulos anteriormente mencionados, es decir, ruido externo y señal periódica. Para ello acoplamos las neuronas usando un modelo sencillo de sinapsis que nos permite que ésta sea excitatoria o inhibitoria dependiendo del valor de los parámetros del modelo.

---



---

## Sesión MA3: Órbitas periódicas I

Martes, 1 de junio (11:30-12:30)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: Luis Floría

---

### Construcción de órbitas periódicas atractoras de una familia de métodos iterativos de tercer orden

Sergio Amat Plata  
*U.P. Cartagena  
 Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
 Avd. Alfonso XIII, 52  
 Cartagena, 30203*

E-MAIL: [sergio.amat@upct.es](mailto:sergio.amat@upct.es)  
 WWW: <http://www.dmae.upct.es/~amat/>

COLABORADORES: Sonia Busquier (U.P. Cartagena), Sergio Plaza (U. Santiago de Chile)

Uno de los problemas más clásicos en matemáticas es la resolución de ecuaciones. Salvo para ciertas ecuaciones

muy particulares, como pueden ser las polinómicas de grado menor que cinco, no existen métodos para resolver ecuaciones exactamente. Por este motivo, se desarrollan y estudian aproximaciones numéricas. El objetivo de este trabajo es presentar la aparición de posibles problemas a la hora de utilizar cierto tipo de estas aproximaciones (los métodos iterativos). En particular, se justificará la necesidad de obtener condiciones para estar seguros de que la aproximación hallada es de garantía.

Aproximaciones numéricas a las raíces de una ecuación no lineal

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

pueden hallarse mediante métodos iterativos. Se parte de una aproximación inicial  $z_0$  y con ayuda de una función de iteración  $\Phi$ , se genera una secuencia de sucesivas aproximaciones  $z_{n+1} = \Phi(z_n)$  que bajo ciertas hipótesis converge a  $z^*$  solución de (1).

El ejemplo más conocido lo encontramos en el método de Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = N_p(z_n).$$

Para ecuaciones polinómicas  $p(z) = 0$ , las raíces simples de  $p(z)$ , es decir, raíces que no son puntos críticos, resultan ser puntos fijos super-atractores de  $N_p$ . Esto implica que si  $z_0$  es tomado suficientemente cerca de una raíz el método convergerá con orden dos.

Los métodos clásicos de tercer orden mejoran los resultados obtenidos por Newton cuando el cálculo de la segunda derivada es sencillo (ecuaciones polinómicas, ecuaciones integrales).

Consideramos

$$z_{n+1} = z_n - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(z_n)}{1 + b_n \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}} + c_n L_f(z_n)^2 \right) \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad (2)$$

$$n \geq 0, \quad (3)$$

donde  $b_n$  y  $c_n$  son parámetros dependientes de  $n$  y  $L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$ .

En esta familia aparecen los métodos de Chebyshev, Halley, Super-Halley, C-métodos, etc.

Las raíces simples de la ecuación son puntos fijos super-atractores de las distintas funciones de iteración de los métodos introducidos. Nótese que tanto las raíces como sus cuencas de atracción se encuentran en el conjunto de Fatou. Estas cuencas representan regiones donde la convergencia del método iterativo a una raíz está asegurada. La no convergencia de un método iterativo puede venir causada por diferentes circunstancias: la existencia de puntos fijos adicionales de  $\Phi$ , la existencia de órbitas periódicas, etc.

El objetivo de este trabajo es introducir un procedimiento para encontrar órbitas periódicas super-atractoras de cualquier periodo procedentes de ecuaciones polinómicas. La existencia de dichas órbitas interfiere con la convergencia de los métodos. En particular, justifica el interés en la obtención de teoremas de convergencia.

1. S. Amat, S. Busquier and J.M.Gutiérrez, Geometric Constructions of Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations. *J. of Comp. and App. Math.*, Vol. 157(1), pp. 197-205, 2003.
2. J. H. Curry, L. Garnett, D. Sullivan, On the iteration of a rational function: computer experiment with Newton method. *Comm. Math. Phys.* 91 (1983), 267-277.

3. A. Emerenko and M. Lyubich, The Dynamics of Analytic Transformations. *Leningrad Math. J.*, **1** (3), 563-634, (1990).
4. M. Hurley, Attracting orbits in Newton method. *Trans. A.M.S.* 237 (1) (1986), 143-158.
5. H.O. Peitgen (Ed.), *Newton's method and Dynamical Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
6. S. Plaza, V. Vergara, Existence of attracting periodic orbits for the Newton's method. *Scientia, Series A: Mathematical Sciences*, Vol. 7 (2001), 31-36.

---

### Órbitas periódicas en perturbaciones de sistemas lineales a trozos no controlables

Victoriano Carmona Centeno

*Universidad de Sevilla*

*E.U. Politécnica,*

*c/Virgen de África, 7*

*Sevilla, 41011*

E-MAIL: [carmona@platero.eup.us.es](mailto:carmona@platero.eup.us.es)

WWW: <http://www.ma2.us.es/gisdi>

COLABORADORES: Emilio Freire Macías, Enrique Ponce Núñez, Francisco Torres Peral (U. Sevilla)

En este trabajo se analiza la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas. La estrategia para dicho análisis consiste en escribir estos sistemas como la perturbación de sistemas no controlables cuyas matrices comparten un par de autovalores complejos conjugados con parte real nula. La dinámica de estos últimos sistemas degenerados es completamente conocida y sólo pueden presentarse uno y sólo uno de los siguientes comportamientos:

1. Dinámica caracterizada por la ausencia de equilibrios y órbitas periódicas. Todas las órbitas son no acotadas.
2. Un solo equilibrio de tipo topológico silla-centro que pertenece a una variedad no acotada foliada por un continuo de órbitas periódicas isócronas.
3. Dos equilibrios de tipo topológico silla-centro que pertenecen a una variedad acotada foliada por un continuo de órbitas periódicas isócronas.

Cuando el sistema no perturbado posee una variedad foliada por órbitas periódicas es posible definir, para los sistemas perturbados, una aplicación de Poincaré  $P$  a partir de la composición de dos semi aplicaciones de Poincaré. Analizando, en primera aproximación, la aplicación  $P$  podemos observar qué órbitas periódicas de la variedad permanecen tras la perturbación y cuáles son sus estabilidades. El método empleado también es capaz de detectar las posibles bifurcaciones de estas órbitas periódicas; entre ellas, podemos destacar bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas, bifurcaciones de Hopf en el infinito y bifurcaciones de tipo foco-centro-ciclo límite características de los sistemas lineales a trozos.

---

**Dinámica de partículas en caída libre sobre perfiles escalonados**

María José Romero Vallés  
 Universidad de Granada  
 Facultad de Ciencias  
 Avenida Severo Ochoa s/n  
 Granada , 13071

E-MAIL: [mjrv@ugr.es](mailto:mjrv@ugr.es)  
 WWW: <http://www.ugr.es/~ecuadif>

COLABORADORES: Juan Campos Rodríguez (U. de Granada),  
 Pedro Torres Villarroja (U. de Granada)

Partiendo de dos variables  $x(t)$  e  $y(t)$  que representen en el instante  $t$  las componentes horizontal y vertical de una partícula que cae por una escalera, respectivamente, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = -g & \text{si } y(t) > -bE(\frac{x(t)}{a}) \\ y'(t^+) = -\lambda y'(t^-) & \text{si } y(t) = -bE(\frac{x(t)}{a}) \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  denotan la anchura y la altura del escalón, respectivamente;  $0 < \lambda < 1$  el coeficiente de restitución en el impacto,  $g$  la gravedad y  $E$  la función parte entera.

El sistema anterior se puede escribir como un problema de impulso-impacto, que tras una reparametrización ( $z = \frac{y}{b}$ ,  $G = \frac{g}{b}$ ,  $x' = 1$ ) quedaría:

$$\begin{cases} z'' = -G & \text{si } z(t) > 0, t \notin a\mathbb{Z} \\ z'(t^+) = -\lambda z'(t^-) & \text{si } z(t^-) = 0, \text{ si no } z'(t) \text{ continua} \\ z(t^+) = z(t^-) + 1 & \text{si } t \in a\mathbb{Z}, \text{ si no } z(t) \text{ continua.} \end{cases} \quad (1)$$

Se pueden destacar principalmente dos aspectos de nuestro trabajo: el estudio de (1) como sistema dinámico discontinuo y el análisis del continuo de soluciones periódicas.

La charla se centra en este segundo punto, probando a partir de un operador de *shooting* la estabilidad de las soluciones periódicas, cuya existencia está restringida por condiciones de compatibilidad (en los parámetros) y limitada a determinadas regiones del espacio de fase (condiciones iniciales). Asimismo, se demuestra la no existencia de dichas soluciones para la mayor parte de los valores del parámetro  $a$ .

**Sesión MA4: Reacciones químicas**

Martes, 1 de junio (11:30-12:30)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: Carlos Briones

**Estudio computacional de la cinética de oxidación de alcoholes por hexacianoferrato(III) catalizada por rutenio(VI)**

Oscar Sánchez Díaz  
 Universidad de Castilla-La Mancha  
 Facultad de Ciencias Químicas, Departamento de Matemáticas  
 C/ Camilo José Cela, 3, Ciudad Real, 13071

E-MAIL: [osanchez@ind-cr.uclm.es](mailto:osanchez@ind-cr.uclm.es)  
 WWW: <http://www.terra.es/personal4/logico-es/>

COLABORADORES: Henar Herrero (U. Castilla-La Mancha),  
 Antonio Mucientes (U. Castilla-La Mancha)

En este trabajo se propone un mecanismo cinético para la reacción descrita en el título. En dicho mecanismo aparecen unas constantes cuyo valor se quiere ajustar teniendo en cuenta los datos experimentales de la concentración de uno de los compuestos que intervienen en la reacción. Para ello, en primer lugar, se modela el mecanismo de la reacción mediante un sistema de EDOs:

$$\begin{cases} x'_1 = k_{-1}x_2 + k_3(R - x_1 - x_2)x_3 - Ax_1k_1 \\ x'_2 = k_1Ax_1 - (k_2 + k_{-1})x_2 \\ x'_3 = -2k_3(R - x_1 - x_2)x_3, \end{cases} \quad (1)$$

en el que  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son concentraciones,  $R$  y  $A$  son constantes conocidas y  $k_{-1}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son las constantes cuyo valor se quiere ajustar. Este sistema es sencillo, tiene un único punto fijo asintóticamente estable  $\vec{x} = \vec{0}$ . Este comportamiento coincide con el de la reacción. Desde el punto de vista numérico es moderadamente rígido. Estas ecuaciones se resolverán de forma numérica con la subrutina de MATLAB `ode15s` que utiliza fórmulas NDF, apropiadas para sistemas rígidos. En segundo lugar, se plantea la función

$$F(k_1, k_2, k_3, k_{-1}) = \sum_{i=1}^n (X(t_i) - x_3(t_i, k_1, k_2, k_3, k_4))^2, \quad (2)$$

en la que  $X$  es la medida experimental de la concentración denominada  $x_3$  en el sistema de EDOs, y  $x_3$  es la solución numérica del sistema de EDOs. Se halla de forma numérica un mínimo de esta función de cuatro variables utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt de la función de MATLAB `lsqcurvefit`. Por último, se realiza un estudio estadístico de los resultados, con el que observamos que la medida de error en las constantes es pequeña. De todo el estudio se concluye que el mecanismo propuesto para la cinética de la reacción es correcto.

**Distribución fractal del adsorbato en reacciones catalíticas heterogéneas**

José Juan Luque Palomo  
 Departamento de Física de la Materia Condensada  
 Universidad de Sevilla  
 Apartado 1065  
 Sevilla, 41080

E-MAIL: [luque@us.es](mailto:luque@us.es)  
 WWW: <http://www.personal.us.es/luque/>

COLABORADORES: Antonio Córdoba Zurita, Antonio Gómez Labrador

Los sistemas catalíticos heterogéneos alejados del equilibrio presentan comportamientos complejos como consecuencia de la no linealidad de sus cinéticas. En condiciones estacionarias es frecuente observar que cambian su estado cuando se modifica un parámetro de control relacionado con condiciones externas de presión o temperatura, y pasa de un estado reactivo a un estado de envenenamiento del catalizador. En estas circunstancias se ha observado que el adsorbato desarrolla estructuras fractales, no sólo en la zona reactiva, sino en la zona de envenenamiento, cuando el catalizador se cubre por varias especies químicas.

Mediante el método de Monte Carlo hemos simulado la reacción de reducción de NO ( $\text{CO} + \text{NO} \rightarrow \text{CO}_2 + \frac{1}{2}\text{N}_2$ ). El número de coordinación reticular produce comportamientos diferentes. Cuando la red es triangular, para un determinado rango del parámetro de control se produce una zona reactiva y, fuera de él, el catalizador se envenena, en un caso por átomos de oxígeno y nitrógeno y en otro por moléculas de CO y átomos de nitrógeno. Sobre una red cuadrada no se observa ninguna zona reactiva y el catalizador se envenena por átomos de oxígeno y nitrógeno y moléculas de CO en diferentes proporciones. Esta última situación cambia cuando se considera la difusión de nitrógeno y también se produce una zona reactiva.

Examinando todos los casos descritos, red triangular y cuadrada y caso reactivo y envenenado, observamos que la distribución de cada una de las especies químicas adsorbidas sobre el catalizador, así como de los sitios vacantes que se producen en el caso reactivo, se ordenan formando estructuras fractales.

---

## Ondas concéntricas en la reacción de oxidación de CO sobre Pt(110)

Michael Stich  
*Instituto Pluridisciplinar,  
 Universidad Complutense de Madrid  
 Paseo Juan XXIII, 1  
 28040 Madrid*

E-MAIL: [stich@fluidos.pluri.ucm.es](mailto:stich@fluidos.pluri.ucm.es)  
 WWW: <http://fluidos.pluri.ucm.es/~stich>

COLABORADORES: Janpeter Wolff, Carsten Beta y Harm Hinrich Rotermund (Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft, Berlín, Alemania)

Se estudia la formación de patrones de ondas concéntricas, conocidas como *target patterns*, en la reacción de oxidación de CO sobre superficies de Pt(110) en régimen oscilatorio (artículo enviado a J. Phys. Chem. B). Las ondas son creadas por un láser enfocado a la superficie catalizadora, formando así un generador de ondas, conocido como *pacemaker*, que consiste en una región con una temperatura más alta y una cinética química modificada. Las propiedades de las ondas se controlan con el rendimiento del láser, el tamaño del foco del mismo, la temperatura base y las presiones parciales de CO y O<sub>2</sub>. Se observan ondas concéntricas que se dirigen hacia fuera y, por primera vez en este sistema de reacción difusión, hacia dentro (*anti-targets*). Además, se observan ondas restringidas a la zona más cercana del foco del láser. Partiendo de estudios recientes [1,2], comparamos los resultados experimentales con un estudio teórico de la ecuación compleja de Ginzburg-Landau y con simulaciones del modelo Krischer-Eiswirth-Ertl para la reacción catalíti-

ca de CO sobre Pt(110). Para obtener una correspondencia buena con el experimento hay que tener en cuenta el acoplamiento global a través de la fase gaseosa.

1. M. Stich, Target patterns and pacemakers in reaction-diffusion systems, Doctoral thesis, Technische Universität Berlin, 2003.
2. M. Stich and A.S. Mikhailov, Z. Phys. Chem. 216 (2002), 521.

---

## Sesión MB1: Control y optimización I

Martes, 1 de junio (12:40-13:40)

Aula 1.2

Moderador: Manuel de León

---

### Un método de colocación para problemas de control óptimo en convección

M. Cruz Navarro Lérida  
*Universidad de Castilla-La Mancha  
 Facultad de Ciencias Químicas,  
 c/Camilo Jose Cela, 12  
 Ciudad Real, 13071*

E-MAIL: [mcruznavarro@hotmail.com](mailto:mcruznavarro@hotmail.com)

WWW: <http://matematicas.uclm.es/qui-cr/>

COLABORADORES: H. Herrero, S. Hoyas y A. M. Mancho

En este trabajo estudiamos problemas de control óptimo en fluidos termoconvectivos desde un punto de vista numérico. Usamos la convección térmica como mecanismo de control: esto es, el control se ejerce a través de la temperatura en una parte de la frontera. El estado es la velocidad del fluido y el funcional coste involucra la norma de la vorticidad del fluido. La relación entre el control y el estado, esto es, la ecuación de estado, es descrita mediante las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la ecuación del calor. Resultados teóricos previos muestran la existencia de un control óptimo y derivan condiciones necesarias de primer orden que caracterizan el control. Una vez que se obtienen las condiciones necesarias de optimalidad se desarrollan métodos numéricos para resolver tales condiciones. En nuestro caso desarrollamos un método de colocación con polinomios de Chebyshev y presentamos los resultados numéricos obtenidos.

---

### Límite de problemas lineales parabólicos con condiciones de Dirichlet cuando los coeficientes y los dominios son simultáneamente variables

Carmen Calvo-Jurado  
*Universidad de Extremadura  
 Escuela Politécnica  
 Avda. de la Universidad, s/n  
 Cáceres, 10071*

E-MAIL: [ccalvo@unex.es](mailto:ccalvo@unex.es)

COLABORADORES: Juan Casado-Díaz (U. de Sevilla)

El problema que tratamos se enmarca dentro del estudio numérico de sistemas físicos o técnicos modelizados mediante ecuaciones en derivadas parciales lineales o no lineales provenientes de la física o la ingeniería. Más exactamente, dentro del estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que varían como consecuencia de la influencia de pequeños parámetros (por ejemplo, variación de los coeficientes de las ecuaciones o de los abiertos donde éstas se plantean).

Una motivación de este estudio sería, además del análisis numérico de los problemas planteados, sus aplicaciones desde el punto de vista técnico. Por ejemplo, el estudio de materiales compuestos, normalmente aquéllos en los que aparece una compleja estructura que se va repitiendo de forma periódica con un periodo pequeño o la selección óptima de materiales y formas.

En nuestro caso particular, el problema que estudiaremos es el siguiente:

Dados  $T > 0$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado y  $\Omega_n \subset \Omega$  una sucesión arbitraria de abiertos, nuestro objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de los siguientes problemas lineales parabólicos

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \operatorname{div} A_n(x, t) \nabla u_n = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_n \times (0, T)) \\ u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_n)) \\ u_n(x, 0) = 0 \text{ en } \Omega_n, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $A_n : \Omega_n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una sucesión de operadores lineales de segundo orden que dependen del tiempo y están uniformemente acotados y  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Cuando la sucesión de abiertos permanece fija, este problema ha sido estudiado para operadores elípticos y parabólicos en [5] y [6]. Cuando lo es la de coeficientes, en [3], [4] y [7]. El caso en que ambas sucesiones varían ha sido tratado en [1] y [2].

En nuestro trabajo, sin imponer ninguna hipótesis acerca de la estructura de  $\Omega_n$ , probamos el siguiente resultado:

**Teorema.** Para una subsecuencia de  $n$ , existen una matriz  $A$  en el mismo conjunto que la sucesión de matrices  $A_n$ , una medida no negativa de Borel  $\mu$  y una función  $F \in L_{\mu}^{\infty}(\Omega \times (0, T))$ , tales que para toda  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , la sucesión  $u_n$  de soluciones de (1) converge débilmente en  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  a la única solución  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  del problema

$$\begin{cases} \langle \partial_t u, v \rangle + \int_{\Omega} A(x, t) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} F(x, t) uv d\mu = \langle f, v \rangle \text{ en } \mathcal{D}'(0, T) \\ \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L_{\mu}^2(\Omega)) \\ u(x, 0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Los resultados obtenidos tienen aplicación en teoría de control, donde las variables de control son los coeficientes de la ecuación y el dominio donde ésta se plantea y están relacionados con la selección óptima de materiales y formas.

1. C. Calvo-Jurado, J. Casado-Díaz, J. Math. Pur. Appl. 81 (2002), 471-493.
2. C. Calvo-Jurado, J. Casado-Díaz, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 133A (2003), 1231-1248.
3. J. Casado-Díaz, A. Garroni, SIAM J. Math. Anal. 31, 3 (2000), 581-624.

4. D. Cionarescu, F. Murat, Collège de France seminar. Vols. II and III. Eds. H. Brézis and J. L. Lions. Research Notes in Math. 60 and 70 Pitman (London, 1982), 98-138 and 154-78.
5. F. Murat, L. Tartar, en *Topics in the mathematical modelling of composite materials*. Eds. A. Cherkhev, R. Kohn. Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl. Birkäuser (Boston, 1997), 21-43.
6. A. Pankov, *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators*. Math. and its Appl., 422. Kluwer (London, 1997).
7. I.V. Skrypnik, Mat. Sb. 184, 10 (1993), 67-90.

### Un esquema de multirresolución no lineal y no separable para el procesamiento de imágenes

Juan Carlos Trillo Moya

Univ. Valencia

Dpto. Matemática Aplicada (F. Matemáticas),

C/Dr. Moliner, 50

Burjassot (Valencia), 46100

E-MAIL: [jctrillo@uv.es](mailto:jctrillo@uv.es)

COLABORADORES: Sergio Amat (U.P. Cartagena), Sonia Busquier (U.P. Cartagena)

Las transformaciones multi-escala, como la multirresolución de Harten [1], son una herramienta eficaz para el procesamiento de imágenes. Para una adaptación óptima en la presencia de los ejes (discontinuidades tipo salto), es crucial desarrollar esquemas no lineales bidimensionales no basados en el producto tensorial, es decir, no separables [2-5]. En este estudio se conecta la pirámide no separable quincunx [6-8], con la multirresolución discreta no lineal de Harten [9].

En los algoritmos directos de multirresolución una sucesión discreta  $\tilde{f}^L$ , que representa medias ponderadas de una cierta función  $f(x)$  en el nivel de resolución más fino  $L$ , es transformada para producir una representación multi-escala de su información  $(\tilde{f}^0, e^1, e^2, \dots, e^L)$ , donde  $\tilde{f}^0$  corresponde a las medias ponderadas de  $f$  en el nivel más grosero de resolución y cada sucesión  $e^k$  representa los detalles intermedios que son necesarios para recuperar  $\tilde{f}^k$  a partir de  $\tilde{f}^{k-1}$ .

Esta representación de la señal está bien adaptada para la compresión de imágenes mediante truncado y cuantización.

Así, la representación multi-escala se comprime resultando  $(\tilde{f}^0, \hat{e}^1, \hat{e}^2, \dots, \hat{e}^L)$ , que se parece a la representación original. Después de aplicar el algoritmo inverso se obtiene  $\hat{\tilde{f}}^L$  la cual debería de estar cerca de  $\tilde{f}^L$ . Por lo tanto, los algoritmos deben de ser estables.

En el resto del trabajo, se introducirán algoritmos de control del error y de la estabilidad. Se obtendrán cotas explícitas del error tanto *a priori* como *a posteriori*.

Finalmente, se testarán los algoritmos en diversos tipos de imágenes, comparándolos con los algoritmos lineales. En particular, se validarán las cotas teóricas del error obtenidas.

1. A. Harten, *Multiresolution representation of data II*. SIAM J. Numer. Anal., **33** (3), pp. 1205-1256, 1996.
2. S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen and R. Donat, *Tensor product multiresolution analysis with error control for compact image representation*. Signal Processing, **82**(4), pp. 587-608, 2002.

3. S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, R. Donat, G. García and M. von Oehsen, *Data compression with ENO schemes*. Applied and Computational Harmonic Analysis, **11**, pp. 273-288, 2001.
4. S. Amat, R. Donat, J. Liandrat and J.C. Trillo, *Analysis of a fully nonlinear multiresolution scheme for image processing*. Preprint 38-02 U.P.Cartagena (Spain), 2002.
5. W. Sweldens, *The lifting scheme: A construction of second generation wavelets*. SIAM J. Math. Anal., **29**, pp. 511-546, 1997.
6. J.C. Feauveau, *Wavelets for the Quincunx Pyramid*. Ruskai, Mary Beth (ed.) et al., Wavelets and their applications. Boston, MA etc.: Jones and Bartlett. pp. 53-66, 1992.
7. H.J.A.M. Heijmans and J. Goutsias, *Morfological pyramids and wavelets based on the quincunx lattice wavelets*. Mathematical Morphology and its applications to Image and Signal Processing, J.Goutsias, L.Vincent and D.S.Bloomberg, pp. 272-281, 2000.
8. Z. Shi, D.S. Zang, D.J. Kouri and D.K. Hoffman, *Nonlinear Quincunx Filters*. Submitted to IEEE Transaction on PAM, 1999.
9. F. Aràndiga and R. Donat, *Nonlinear Multi-scale Decompositions: The Approach of A.Harten*. Numerical Algorithms, **23**, pp. 175-216, 2000.

---

## Sesión MB2: Fenómenos de transporte

Martes, 1 de junio (12:40-13:40)

Aula 2.2

Modera: Miguel Rubí

---

### Movimientos aleatorios con ramificación, sistemas hiperbólicos no lineales y ondas viajeras

Nikita Ratanov

Universidad del Rosario

Calle 14, No. 4-69,

Bogotá, Colombia

E-MAIL: nratanov@urosario.edu.co

Las ondas viajeras para la ecuación de difusión semi lineal han sido extensivamente estudiadas comenzando por los artículos clásicos de Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov y Fisher. Esta ecuación está motivada por aplicaciones en física, química y biología.

La relación entre esta ecuación y procesos de difusión con ramificación es conocida y ha sido extensamente aplicada. Sin embargo, este enfoque tiene fallos evidentes: las partículas difusivas tienen velocidades infinitas y las direcciones de su movimiento en intervalos de tiempo separados son independientes. Para remediar estos rasgos no físicos introducimos un modelo similar que está basado en un movimiento aleatorio con la velocidad finita.

Consideramos una partícula, inicialmente (a tiempo  $t = \tau$ ) situada en el punto  $x$ , que se mueve sobre una línea con velocidad constante  $c$ . En el instante de tiempo  $\tau$  escoge uno

u otro sentido inicial con la misma probabilidad. Sin embargo, la partícula repetidamente toma el sentido opuesto en los instantes aleatorios  $T_1, T_2, \dots$ , que forman un flujo de Poisson.

Ulteriormente, en el tiempo  $S$  exponencialmente distribuido la partícula se divide en un número aleatorio de pedazos. Estas nuevas partículas siguen a lo largo de caminos independientes el mismo movimiento aleatorio, que comienza en el punto de ramificación  $X(S)$ , y son sujetas a la misma regla de división que la partícula original. A tiempo  $t - \tau$  tenemos  $n = n(t - \tau)$  partículas localizadas en  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , donde  $n(t - \tau)$  es un número estocástico. Escribamos  $P_{+, (x, \tau)}$  y  $P_{-, (x, \tau)}$  para las leyes de este proceso cuando comienza en el instante de tiempo  $\tau$  adelante (+) y hacia atrás (-) respecto de la posición  $X(\tau) = x$ . Las probabilidades condicionales

$$u_+(x, \tau, t) = P_{+, (x, \tau)}(X_1(t) > 0, \dots, X_n(t) > 0), \quad (1)$$

$$u_-(x, \tau, t) = P_{-, (x, \tau)}(X_1(t) > 0, \dots, X_n(t) > 0) \quad (2)$$

solucionan el sistema hiperbólico semilineal

$$-\frac{\partial u_+}{\partial \tau} - c \frac{\partial u_+}{\partial x} = \mu_+(u_- - u_+) - \lambda_+ u_+ + \lambda_+ F_+(u_+, u_-), \quad (3)$$

$$-\frac{\partial u_-}{\partial \tau} + c \frac{\partial u_-}{\partial x} = \mu_-(u_+ - u_-) - \lambda_- u_- + \lambda_- f_-(u_+, u_-), \quad t > \tau \quad (4)$$

con las condiciones terminales

$$u_+ |_{\tau \uparrow t} = u_- |_{\tau \uparrow t} = \theta(x).$$

Aquí  $\mu_+ > 0$  y  $\mu_- > 0$  son las intensidades de vueltas,  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  son las intensidades de ramificación de la partícula, que se mueve adelante o hacia atrás, respectivamente;  $F_+$  y  $F_-$  representan la regla de ramificación.

El sistema (3)-(4) puede ser solucionado por argumentos de renovación usuales. El objetivo principal es estudiar el comportamiento asintótico de soluciones del tipo (1)-(2) de (3)-(4), según el siguiente programa:

- 1) demostración de la convergencia

$$u_+(x + m_+, \tau, t) \rightarrow w_+(x), \quad u_-(x + m_-, \tau, t) \rightarrow w_-(x), \quad (5)$$

si  $\tau \downarrow -\infty$  con algunos centralizadores  $m_{\pm} = m_{\pm}(t - \tau)$ ;

- 2) estudio de propiedades de estabilidad de frentes viajeros con respecto al valor de la velocidad;
- 3) identificación de los límites en (5) como una solución viajera de (3)-(4).

---

### Estudio de estabilidad de nanodiodos balísticos n+-n-n+ dopados

Inmaculada R. Cantalapiedra

Universidad Politécnica de Catalunya

E.P.S. de la Edificación,

c/Gregorio Marañón, 44-50

Barcelona, 08028

E-MAIL: inma@fa.upc.es

WWW: <http://dfa.upc.es/websfa/eupb/inma.html>

COLABORADORES: G. Gomila (U. Barcelona), J. A. Carrillo (U. A. Barcelona)

Los conductores balísticos se caracterizan por tener una región activa a través de la cual se mueven las cargas sin que sufran procesos de choque cuando se inyecta carga por los contactos (*i.e.* el recorrido libre medio de los electrones es mayor que la longitud de la región activa). Los nanodiodos balísticos n+-n-n+ han sido los más estudiados entre los semiconductores balísticos. En estos diodos uno de los n+ contactos actúa como emisor, el otro como colector y la n-base es el canal de transporte balístico. Estos dispositivos constituyen las estructuras más simples para estudiar el transporte balístico y son el primer paso para estudiar las propiedades de estructuras más complicadas, como los transistores balísticos. En estos dispositivos la característica corriente- voltaje presenta un comportamiento lineal para valores bajos de voltaje seguida por dos tipos distintos de no-linealidad para voltajes más altos (dependencias según leyes de potencia con coeficientes de 1/2 y 1/3, respectivamente).

En esta contribución presentamos las inestabilidades que se observan en las ecuaciones de Vlasov-Poisson cuando se inyectan en los contactos electrones con distribuciones de tipo Fermi-Dirac para distintos voltajes y longitudes. El conocimiento de los rangos de valores aptos para un buen diseño de dispositivos es de vital importancia para posibles aplicaciones.

**Estabilidad del sistema multidimensional de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck en el régimen de campo alto**

J. Nieto  
*Universidad Granada*  
*Depto. Matemática Aplicada*  
*Campus Fuentenueva S/N*  
*18071 Granada*

E-MAIL: [jjmnieto@ugr.es](mailto:jjmnieto@ugr.es)  
 WWW: <http://www.ugr.es/local/jjmnieto>

COLABORADORES: T. Goudon (U. Lille 1, Francia), F. Poupaud (U. Nice, Francia), J. Soler (U. Granada)

El comportamiento cinético de un sistema numeroso de partículas con movimiento Browniano inmersas en un baño térmico puede ser descrito a través de la función de distribución de partículas  $f \geq 0$  por el sistema no lineal de EDP's de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP).

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \frac{q}{m_e} \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_v (vf + \theta_e \nabla_v f), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$-\Delta_x \phi = \frac{q}{\epsilon_0} \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv,$$

El acoplamiento con la ecuación de Poisson (tipo repulsivo) significa que el campo (electrostático)  $-\nabla_x \phi$  de fuerzas que actúa sobre las partículas está producido por la propia densidad de cargas de éstas  $\rho$ , mientras que el operador de Fokker-Planck  $L_{FP}[f] := \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_v (vf + \theta_e \nabla_v f)$  está relacionado con la difusión de las partículas al interactuar con el baño que las envuelve.

Bajo ciertas hipótesis físicas sobre las constantes que gobiernan el sistema obtenemos un comportamiento en el que la magnitud del campo predomina sobre la difusión del sistema. Este régimen de campo alto se corresponde matemáticamente con un modelo de VPFP reescalado dependiente de

un único parámetro (sin dimensiones)  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon \right) - \nabla_x \phi_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon = \operatorname{div}_v (v f_\varepsilon + \nabla_v f_\varepsilon).$$

Mostraremos que, en este régimen y en dimensión arbitraria (véase [2]), la densidad macroscópica de cargas  $\rho_\varepsilon$  se aproxima a una medida positiva  $\rho$  y el campo  $-\nabla_x \phi_\varepsilon$  a un campo límite en  $L^2$ , que resuelven el sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - \operatorname{div}_x (\rho \nabla_x \phi) = 0, \quad -\Delta_x \phi = \rho,$$

que corresponde al de los gases sin presión para  $N = 1$  [3]. Para realizar este estudio riguroso usaremos técnicas basadas en el uso de energía modulada [1] y, en el caso bidimensional, las medidas de defecto diagonal [4].

1. Y. Brenier, Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations, *Comm. P.D.E.* **25**, (2000), 737–754.
2. T. Goudon, J. Nieto, F. Poupaud, J. Soler, Multidimensional high-field limit of the electrostatic Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, (enviado)
3. J. Nieto, F. Poupaud, J. Soler, High-field limit for the VPFP system, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **158**, (2001), 29–59.
4. F. Poupaud, Diagonal defect measures, adhesion dynamics and Euler equations, *Meth. and Appl. of Anal.* **9**(4), (2002), 533–562.

**Sesión MB3: Series temporales I**

Martes, 1 de junio (12:40-13:40)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: Ramón Román Roldán

**Leyes de potencia y memoria larga en las series financieras de alta frecuencia**

Pilar Grau Carles  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Paseo de los Artilleros s/n*  
*28032 Madrid*

E-MAIL: [grau@fcjs.urjc.es](mailto:grau@fcjs.urjc.es)

COLABORADORES: Ricardo Gimeno (U. Pontificia de Comillas), Lorenzo Escot (U. Complutense), Ruth Mateos (U. San Pablo-CEU), Elena Olmedo (U. de Sevilla)

El estudio de las series financieras de alta frecuencia permite un mejor conocimiento sobre el funcionamiento de los mercados financieros, ya que permite construir series con distintas resoluciones de tiempo. Sin embargo, la mayoría de la literatura financiera se basa en series de baja frecuencia. Este es el caso de las investigaciones sobre el comportamiento de la volatilidad. Estudios realizados con datos diarios de tipos de cambio o cotizaciones de índices bursátiles concluyen que la función de correlación de la volatilidad decae a una tasa hiperbólica, lo que es una evidencia de memoria larga en las series. No existe sin embargo unanimidad sobre la existencia de memoria larga en los rendimientos bursátiles. Utilizando datos de alta frecuencia, en la presente investigación se

contrasta si dichas series, tanto de rendimientos, como de volatilidad, para diferentes resoluciones de tiempo, exhiben memoria larga y se comportan como un ruido fraccional. Asimismo se obtiene que la distribución de los rendimientos no es estable en el tiempo. Además se demuestra que existe una ley de reescalado que relaciona el horizonte temporal y la volatilidad medida como tamaño de los movimientos de los precios.

---

### Identificación de no linealidades en sistemas físicos mediante técnicas estadísticas de alto orden

M. C. Carrión

*Universidad de Granada*

*Facultad de Ciencias, Dpto. de Física Aplicada*

*Campus Fuentenueva*

*Granada, 18071*

E-MAIL: [mcarrion@ugr.es](mailto:mcarrion@ugr.es)

COLABORADORES: D. P. Ruiz, D. Blanco e I. M. Tienda

En el análisis y estudio de la respuesta de los sistemas físicos es de gran importancia la información recogida en la función de autocorrelación o en su transformada de Fourier, la función densidad espectral o espectro de potencia. Sin embargo, cuando la respuesta del sistema físico no es gaussiana, la información recogida en estas funciones no es suficiente, haciéndose necesaria la utilización de promedios estadísticos conocidos como series de cumulantes o momentos de alto orden, en el dominio del tiempo, o como poliespectros, en el dominio de la frecuencia [1]. Debido a ello, ha cobrado un enorme auge en la última década un tipo de análisis basado en la llamada estadística de alto orden (HOS), también conocida como análisis espectral de alto orden o simplemente análisis poliespectral. Una de las grandes ventajas que presentan estas nuevas herramientas es que permiten obtener información de la linealidad (o no) de sistemas físicos a partir de la respuesta de los mismos a entradas de tipo armónico. Consideremos en primer lugar cómo es la respuesta de un sistema lineal a una excitación que sea la suma de componentes armónicas. Dicha respuesta es otra suma de componentes armónicas con las mismas frecuencias pero diferentes amplitudes y/o fases. La función densidad espectral correspondiente presentará una serie de picos justo en las frecuencias correspondientes a cada una de las componentes de la excitación. En segundo lugar, consideremos un sistema no lineal excitado también por una suma de componentes armónicas. La respuesta, en este caso, es más complicada. Además de aparecer términos correspondientes a cada una de las componentes armónicas de la excitación, también aparecen términos con suma de dos componentes armónicas, tres componentes armónicas, y así sucesivamente. Pues bien, cuando tenemos términos en los que además de sumarse las frecuencias también aparecen sumadas las fases, se dice que la respuesta del sistema posee un acoplo cuadrático de fase, un acoplo cúbico de fase y así respectivamente. Los acoplos de fase son por tanto característicos de la existencia de mecanismos no lineales en los sistemas físicos y aparecen en diferentes campos de la física como por ejemplo en problemas de dispersión en electromagnetismo y en oceanografía. En primera aproximación el oleaje puede ser considerado como una superposición de componentes espectrales libres e independientes. Sin embargo, para órdenes de aproximación superiores existen interacciones entre las componentes

espectrales que pueden dar lugar a acoplos [2]. En este trabajo se propone un método de detección de acoplos cúbicos de fase basado en la elaboración de un modelo autorregresivo del triespectro [3]. Se pone de manifiesto cómo es posible construir sistemas de ecuaciones basadas en cumulantes de cuarto orden cuya solución permite estimar el triespectro y a partir de éste distinguir qué picos espectrales corresponden a un acoplo y cuáles no, permitiendo de este modo identificar la no linealidad del sistema físico cuya respuesta se analiza.

1. C. L. Nikias and A. P. Petropulu, Higher-Order Spectra Analysis. A Nonlinear Signal Processing Framework, Ed. Prentice Hall, 1993.
2. M. Pacheco, Análisis numérico-experimental del oleaje en mares mixtos, Tesis Doctoral, 2003.
3. D. Blanco, D.P. Ruiz, E. Alameda and M.C. Carrión, Fourth-order stationarity and ergodicity conditions for harmonics processes, IEEE Transactions on Signal Processing, en prensa (aceptado para publicación).

---

### Predicción de series temporales mediante redes neuronales. Aplicación a la predicción del consumo eléctrico

Miguel Angel Jaramillo Morán

*Universidad de Extremadura*

*E. de Ingenierías Industriales,*

*Avda. de Elvas, s/n*

*Badajoz, 06071*

E-MAIL: [miguel@unex.es](mailto:miguel@unex.es)

COLABORADORES: Diego Carmona Fernández (U. Extremadura), Eva González Romera (U. Extremadura), Juan Antonio Alvarez Moreno (U. de Extremadura)

Las redes neuronales han demostrado ser una potente herramienta en la predicción de la evolución de series temporales debido a su capacidad de aprender la dinámica inherente a los sistemas dinámicos. Son estructuras algorítmicas que reproducen la organización de los sistemas neuronales biológicos. Su capacidad de aprendizaje se basa en la adecuada modificación de las uniones sinápticas entre las neuronas de la red, o de éstas con sus entradas, durante un proceso de aprendizaje. Será necesario, por tanto, llevar a cabo un entrenamiento de la red en el cual se le presentarán un conjunto de datos de entrada y salida que serán convenientemente asociados mediante la modificación de los pesos asociados a cada unión sináptica. La red así entrenada será capaz de generalizar el conocimiento adquirido generando salidas apropiadas a patrones de entrada no aprendidos. Como ejemplo de serie temporal se ha utilizado la de los consumos eléctricos mensuales en España desde el año 1975 hasta el 2002. Para poder utilizar la red neuronal será necesario determinar tanto el número de capas de que consta como el número de neuronas que constituyen cada una de ellas. Los mejores resultados se han obtenido con tres capas dotadas de 8, 4 y 8 neuronas cada una. Por otro lado, hay que tener presente que los datos de la serie temporal con la que se trabaja deberán ser convenientemente normalizados para adaptar sus valores al rango de funcionamiento de la red neuronal. Se han probado varias formas de normalización para determinar aquélla que proporciona los mejores resultados, siendo ésta la que divide cada dato por la media de un conjunto dado de valores anteriores. Un aspecto importante en



la predicción de series temporales es el número de términos pasados que es necesario considerar para realizar la predicción. Se han probado varias opciones, habiéndose obtenido los mejores resultados con doce valores. Una vez que se ha comprobado el buen funcionamiento de las redes neuronales en este tipo de predicciones se ha estudiado la posibilidad de predecir no sólo el siguiente valor de la serie sino también varios posteriores. Se han realizado predicciones de hasta los cinco valores siguientes, pudiéndose comprobar como éstas empeoraban cuanto más alejada estaba la predicción de los datos disponibles. Por último, se ha estudiado la opción de entrenar a la red antes de realizar cada predicción, con el objeto de aprovechar todos los datos disponibles para el entrenamiento. Sin embargo, se ha podido comprobar que esta opción no aporta ninguna mejora frente a la opción de entrenar una sola vez y realizar con la red así obtenida todas las predicciones.

---

## Sesión MB4: Aplicaciones en economía

Martes, 1 de junio (12:40-13:40)  
Teatrillo de San Pedro Mártir  
Modera: Bartolo Luque

---

### ¿Cuántas monedas llevas en tu bolsillo?

Juan C. Nuño  
*Universidad Politécnica de Madrid*  
*E.T.S.I. de Montes*  
*Ciudad Universitaria*  
*28040-MADRID*

E-MAIL: [jcsn@montes.upm.es](mailto:jcsn@montes.upm.es)

COLABORADORES: Claude Grasland, Fernando Blasco, France Guerin-Pace, Bartolo Luque, José Olarrea

Unas encuestas realizadas en Francia durante los últimos dos años han revelado una distribución de monedas en los bolsillos asimétrica, con un pico principal en 10 monedas y con valor medio aproximado de 14 monedas y con una larga cola exponencial. Esta distribución ofrece información muy valiosa acerca de la interacción entre tres factores fundamentales que intervienen en microeconomía. Por un lado, los hábitos de pago de los ciudadanos y, por otro, el sistema monetario y la distribución de precios en la zona donde se efectúan las transacciones. Con el principal objetivo de explicar estos datos experimentales se ha definido un modelo computacional que describe la evolución temporal de un hipotético bolsillo que lleva a cabo sucesivos pagos con monedas de acuerdo a unas reglas básicas. Si el dinero en el bolsillo no es suficiente para realizar el pago, entonces se utiliza un billete del menor valor que exista en el sistema. Si, por el contrario, el valor del bolsillo es mayor que el precio a pagar, entonces se opta aleatoriamente entre dos opciones opuestas: (a) con probabilidad  $q$ , atendiendo al principio de mínimo esfuerzo, el pago se efectúa utilizando el menor número de monedas que iguale o supere por la mínima cantidad el precio; (b) con una probabilidad  $1 - q$ , siguiendo un principio de descarga, se paga haciendo uso del máximo número de monedas. De acuerdo a estas reglas el bolsillo cambia su contenido y alcanza un estado estacionario cuya

distribución depende de  $q$ , de la distribución de precios y del sistema monetario utilizado. Las simulaciones teóricas ajustan sorprendentemente bien los datos experimentales obtenidos en Francia, dentro de la zona Euro, suponiendo una distribución de precios uniforme y un valor del parámetro  $q$  de aproximadamente 0.63. Para corroborar la bondad del modelo teórico se están diseñando nuevas encuestas en otras zonas monetarias del mundo.

---

## Dinámica caótica en economías emergentes con restricciones en el crédito

Xavier Jarque Ribera  
*Universidad de Barcelona*  
*Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi*  
*Gran via 585*  
*08007 Barcelona*

E-MAIL: [xavier.jarque@ub.edu](mailto:xavier.jarque@ub.edu)

WWW: <http://www.maia.ub.es/~xjarque>

COLABORADORES: Jordi Caballé (Universitat Autònoma de Barcelona), Elisabetta Michetti (Università degli Studi di Macerata)

El trabajo analiza el papel del nivel de financiación como fuente de inestabilidad endógena para una economía pequeña y abierta, es decir, una economía que no influye de forma determinante en los mercados internacionales pero que se sirve de los mismos para poder desarrollarse. Bajo la hipótesis de que las empresas hacen frente a limitaciones de crédito se observan comportamientos muy ricos en la dinámica asociada al nivel de riqueza de las empresas para valores intermedios del parámetro que determina el nivel de desarrollo de la economía. Este parámetro  $\mu$  determina las limitaciones de crédito de las empresas con motivo de la valoración externa de la economía en los mercados internacionales.

El modelo, finalmente descrito por un sistema dinámico discreto, presenta zonas de dinámica caótica para valores intermedios de  $\mu$ , mientras que determina dinámicas totalmente estables tanto para economías en fase de desarrollo como para economías totalmente desarrolladas. Es interesante observar que la función que describe la dinámica admite un punto de no derivabilidad, de forma que, para los valores adecuados del parámetro, la cascada de bifurcación no presenta los mismos fenómenos que los de la bifurcación logística.

---

## Thermodynamics of profit seeking bosons

Kestutis Staliunas  
*Departament de Física i Enginyeria Nuclear*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Colom 11, E-08222 Terrassa*

E-MAIL: [kestutis.staliunas@icrea.es](mailto:kestutis.staliunas@icrea.es)

Financial systems are described as condensates, similar to Bose-Einstein condensates. Basing on the condensate model, the statistical distributions in finance markets are calculated: The calculated distributions of investments into speculated financial assets are found to be equivalent to exponentially truncated Pareto distribution, and the calculated distributions of the price moves are found to be equivalent

to exponentially truncated Lévy distributions.

The presentation is to be based on the recent work [1], where the above equilibrium distributions are derived analytically. Two properties of the behaviour of market participants are assumed in the derivation: 1) that the individual market participants tend to cluster, and to behave according to the opinion of the others and the majority (herding); 2) that the market participants seek for profit. The detailed balance in the system with the above two properties (the system of “profit seeking bosons”) leads to exponentially truncated Pareto and Lévy distributions with power exponents corresponding well to the ones observed in financial markets. The presentation will also include an extension of the work [1], where the above distributions were investigated numerically: 1) by integrating numerically the corresponding master equation for the evolution of the distributions in profit seeking boson system; 2) by Monte-Carlo simulations of the trajectories of individual profit seeking bosons.

1. K. Staliunas, Bose-Einstein Condensation in Financial Systems, Phys. Rev. E, subm. 2003, <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0303271>

---

## Sesión MC1: Sistemas integrables

Martes, 1 de junio (18:10-19:30)

Aula 1.2

Modera: Francisco Balibrea

---

### Miwa’s representation of the Volterra hierarchy

V.E. Vekslerchik

*Universidad de Castilla-La Mancha*

*Fac. de Ciencias Químicas*

*c/Camilo Jose Cela, 3*

*Ciudad Real, 13071*

E-MAIL: No disponible

This talk is devoted to the functional representation of the Volterra hierarchy (VH). Starting from the standard inverse scattering approach I derive a functional relation which is equivalent to an infinite set of the equations of the VH. This relation describing an action of the Miwa’s shifts on the Volterra tau functions can be viewed as the Fay’s identity for the VH and is closely related to the discrete-time Volterra chain. It can be used to obtain a formal solution of the scattering problem associated with VH, generating function of the constants of motion and Backlund transformations. It is also shown that in Miwa’s representation the problem of finding pure soliton and finite-gap quasiperiodic solutions can be reduced to simple algebraic equations. I also discuss some new integrable models which can be ‘embedded’ in the VH.

---

### Integración por modificación: un método de reducción de orden para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Andrew Pickering

*Universidad de Salamanca*

*Departamento de Matemáticas*

*Plaza de la Merced 1*

*37008 Salamanca*

E-MAIL: [andrew@gugu.usal.es](mailto:andrew@gugu.usal.es)

COLABORADORES: Pilar Ruiz Gordoa (U. Rey Juan Carlos), Julia Prada Blanco (U. Salamanca)

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias puede no ser integrable en ninguno de los bien definidos significados de la palabra integrabilidad. En tal caso lo máximo que puede esperarse es que sea posible reducir su orden, y la solución a este problema puede traducirse a menudo en utilizar para ello la estructura misma de dicho sistema. Por ejemplo, como es bien conocido, siempre puede reducirse el orden de un sistema autónomo. En este trabajo mostramos que para sistemas con una cierta estructura una reducción de orden, a menudo muy drástica, es siempre posible.

Así, para sistemas con la estructura apropiada, el procedimiento consiste básicamente en integrar primero una versión modificada del sistema y establecer a continuación una transformación de Bäcklund entre el sistema modificado integrado y una versión integrada del sistema original. Por transformación de Bäcklund nos referimos a un sistema de ecuaciones que combina dos conjuntos de variables (las originales y las modificadas) tales que la eliminación de un conjunto de variables proporciona el sistema de ecuaciones que satisface el otro conjunto de variables.

Algunas de las aplicaciones de nuestro método incluyen la reducción de orden de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias derivados como análogos de orden superior de las seis ecuaciones de Painlevé.

---

### Inversos de factor integrante polinomiales para sistemas diferenciales cuadráticos

Antoni Ferragut i Amengual

*Departament de Matemàtiques*

*Universitat Autònoma de Barcelona*

*08193 Bellaterra, Barcelona*

E-MAIL: [ferragut@mat.uab.es](mailto:ferragut@mat.uab.es)

COLABORADORES: Bartomeu Coll (Universitat de les Illes Balears), Jaume Llibre (Universitat Autònoma de Barcelona)

La existencia de una integral primera en un campo vectorial plano  $X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $P$  y  $Q$  definidos en  $\mathbb{R}^2$ , determina su retrato de fase. Como consecuencia, dado un campo  $X$  es importante establecer si posee una integral primera. Una integral primera es una función  $H : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que es constante sobre las órbitas solución de  $X$ ; es decir,  $PH_x + QH_y = 0$ .

Un inverso de factor integrante global asociado al campo  $X$  es una función  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el vector  $X/V$  es Hamiltoniano. Es decir,  $X/V = dH$  para alguna función  $H$ . Notemos que  $H$  es una integral primera de  $X$ . La función  $V$  cumple la siguiente ecuación diferencial:

$PV_x + QV_y = (P_x + Q_y)V(1)$ . En general, la expresión de la integral primera  $H$  no es fácil y no está necesariamente definida en todo  $\mathbb{R}^2$ , pero por otro lado la expresión de  $V$  es normalmente más sencilla. Además, si existe un inverso de factor integrante  $V$ , entonces el conjunto  $\{V = 0\}$  está formado por órbitas del sistema y contiene todos los ciclos límite del sistema.

El objetivo principal de este trabajo es el de clasificar todos los campos cuadráticos que poseen un inverso de factor integrante polinomial  $V(x, y)$ . Con este fin, usamos la clasificación de los sistemas cuadráticos en diez formas normales. Debido a la extensión y, en algunos casos, la dificultad de la clasificación, en este trabajo presentamos todos los inversos de factor integrante polinomiales de seis de las diez formas normales.

Para obtener la clasificación de los inversos de factor integrante polinomiales, imponemos en la ecuación (1) que  $V$  sea un polinomio de grado  $k$ . A partir de aquí operamos de diversas maneras:

1. Obtenemos un sistema lineal homogéneo donde las incógnitas son los coeficientes de  $V$ . El sistema puede resolverse, pero es difícil para polinomios de grado elevado.
2. Escribimos  $V$  como suma de polinomios homogéneos o como un polinomio en la variable  $x$  o en la variable  $y$ .
3. En algunos casos, calculamos una integral primera resolviendo el sistema, y a partir de ella calculamos  $V$ .

Tras esta clasificación, computamos las integrales primeras asociadas a los inversos de factor integrante obtenidos. Estas integrales primeras son siempre funciones Darbouxianas, que incluso pueden ser polinomiales o racionales. En el caso de sistemas cuadráticos con una integral primera racional, también computamos todos los valores remarcables críticos y sus curvas algebraicas remarcables críticas asociadas. Finalmente, probamos que no hay sistemas cuadráticos en estos seis casos con un inverso de factor integrante polinomial y ciclos límite.

### Persistencia de órbitas periódicas y simetrías

Jorge Galán Vioque  
*Matemática Aplicada II*  
*Universidad de Sevilla*  
*Camino de los Descubrimientos s/n*  
*Sevilla, 41092*

E-MAIL: [jgv@ma2.us.es](mailto:jgv@ma2.us.es)  
 WWW: <http://www.maw.us.es/~gisdi>

COLABORADORES: F. J. Muñoz-Almaraz,  
 A.Vanderbauwhede, E.J. Doedel, E. Freire

Las órbitas periódicas están aisladas de forma genérica en los sistemas dinámicos. Sin embargo, en los sistemas que se plantean en la mecánica es habitual la presencia de integrales primeras y/o simetrías reversibles en el tiempo. Estas propiedades, como es bien conocido, permiten probar que una órbita periódica (salvo caso de degeneración) pertenece a una familia de órbitas periódicas, con lo que éstas ya no se encuentran aisladas.

En esta charla exponemos el estudio que hemos realizado sobre cómo la presencia de múltiples integrales primeras

y/o simetrías reversibles en el tiempo influye en la estructura local de la familia de órbitas periódicas. Los resultados teóricos sobre persistencia de órbitas periódicas obtenidos tienen su motivación en los métodos numéricos para órbitas periódicas, los cuales se ilustrarán a lo largo de la exposición con algunos ejemplos para sistemas como el péndulo muelle, el problema de los tres cuerpos, etc.

---

## Sesión MC2: Sistemas con retraso

Martes, 1 de junio (18:10-19:30)

Aula 2.2

Modera: J. Soler

---

### Un resultado de existencia y unicidad de solución para el sistema de LANS-alfa tridimensional estocástico con retardo

Antonio Miguel Márquez Durán  
*Dpto. Ecuaciones Diferenciales*  
*y Análisis Numérico*  
*Universidad de Sevilla*  
*Apdo. Correos 1160,*  
*Sevilla, 41080*

E-MAIL: [ammarquez@andaluciajunta.es](mailto:ammarquez@andaluciajunta.es)

COLABORADORES: José Real Anguas (Universidad de Sevilla)

El presente trabajo tiene por objetivo extender resultados obtenidos recientemente por T. Caraballo, J. Real y T. Taniguchi para el modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes estocástico al caso en que aparecen efectos de memoria en el sistema. El modelo citado tiene interés en Mecánica de Fluidos.

Más exactamente, suponemos dados  $D$  un subconjunto abierto conexo y acotado de  $\mathbf{R}^3$ , con una frontera Lipschitziana  $\partial D$ , un tiempo final  $T > 0$ , y una constante  $h > 0$ . Denotamos por  $A = -P\Delta$  al operador de Stokes, y consideramos el sistema

$$(P) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha\Delta u) + \nu(Au - \alpha\Delta(Au)) + (u \cdot \nabla)(u - \alpha\Delta u) \\ -\alpha\nabla u^* \cdot \Delta u + \nabla p = F(t, u_t) + G(t, u_t)\dot{W}(t), \\ \quad \text{en } D \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{en } D \times (0, T), \\ u = 0, Au = 0, \text{ sobre } \partial D \times (0, T), \\ u(0) = u^0, \text{ en } D, \\ u(t) = \phi(t), \text{ en } D \times (-h, 0), \end{cases}$$

donde  $u = (u^1, u^2, u^3)$  y  $p$  son campos aleatorios incógnita definidos sobre  $D \times [0, T]$ , que representan, respectivamente, las velocidades y la presión promediadas, en cada punto de  $D \times [0, T]$ , de un fluido viscoso e incompresible con densidad constante que llena el dominio  $D$ . Las constantes  $\nu > 0$  y  $\alpha > 0$  son datos, y representan respectivamente la viscosidad cinemática del fluido y el cuadrado de la escala espacial a la que el movimiento del fluido es filtrado. Los términos  $F(t, u_t)$  y  $G(t, u_t)\dot{W}(t)$  son fuerzas externas aleatorias dependientes de manera no lineal de la función  $u_t(s) = u(t+s)$ ,

$s \in (-h, 0)$ , donde  $\dot{W}(t)$  denota la derivada con respecto al tiempo de un proceso de Wiener cilíndrico. Finalmente,  $u_0$  y  $\phi$  son datos iniciales.

El problema (P) en el caso determinista, i.e. cuando  $G = 0$ , y cuando  $F!$  no depende de  $u_t$ , ha sido estudiado, entre otros, en sendos recientes trabajos por D. Coutand, J. Peirce y S. Shkoller, (Comm. on Pure and Appl. Anal. 1, no.1, 35–50, 2002) y J.E. Marsden y S. Shkoller (R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 359, no. 1784, 1449–1468, 2001).

En nuestro trabajo se obtiene, bajo hipótesis adecuadas sobre  $F$  y  $G$ , la existencia y unicidad de solución para el problema completo (P), utilizando para ello un resultado abstracto que contiene al sistema en estudio como un caso particular.

---

### Estudio de la influencia de la dispersión de ganancia en la dinámica, coherencia y ruido en la intensidad de un láser de semiconductor multimodo con reinyección óptica

Carles Serrat Jurado  
*Departament de Física i Enginyeria Nuclear,  
 Universitat Politècnica de Catalunya,  
 Colom 11, 08222-Terrassa, Spain*

E-MAIL: [carles.serrat-jurado@upc.es](mailto:carles.serrat-jurado@upc.es)  
 WWW: <http://segre.upc.es>

COLABORADORES: Stefan Prins (Vrije Universiteit Brussel), Benoît Le Ny (École Polytechnique), Ramon Vilaseca (Universitat Politècnica de Catalunya)

Investigamos la dependencia en la dispersión de ganancia de la dinámica, el tiempo de coherencia y el ruido en la intensidad, de un láser de semiconductor multimodo con reinyección óptica. Primero, consideramos una cavidad externa de longitud intermedia, y observamos características del régimen dinámico de cavidad corta en una región donde la frecuencia de las oscilaciones de relajación es mayor que la frecuencia de la cavidad externa. Las escalas de tiempo de la dinámica están controladas en este caso por la intensidad de la reinyección. Hemos examinado las propiedades de coherencia de la emisión multimodo estudiando la visibilidad y el tiempo de coherencia en función de la dispersión de la ganancia, y hemos observado la degradación de la coherencia en función del grado de emisión multimodo. Por otro lado, el ruido en la intensidad de emisión ha sido analizado en un amplio intervalo de intensidades de reinyección, considerando además todos los rangos de frecuencia. En las regiones de baja frecuencia, la dispersión en la ganancia influye considerablemente en el ruido de la intensidad asociado a regímenes caóticos. Finalmente, mostramos como el ruido total en la intensidad en niveles bajos de reinyección puede aportar una forma de medir el grado de emisión multimodo.

---

### Un sistema depredador-presa periódico con retraso finito

Clotilde Martínez Alvarez  
*Universidad de Granada  
 Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales,  
 Campus de Cartuja  
 Granada, 18071*

E-MAIL: [clotilde@ugr.es](mailto:clotilde@ugr.es)

COLABORADORES: Manuel Gámez Cámara (U.Almeria)

Consideramos el sistema Lotka-Volterra con retraso finito

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t) \int_0^t k_1(s)y(t-s)ds] \\ y'(t) &= y(t)[-d(t) + e(t) \int_0^t k_2(s)x(t-s)ds - f(t)y(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

donde las funciones  $a(t), b(t), \dots, f(t)$  son continuas y periódicas.

Los sistemas del tipo (1) son usados a menudo para modelar la dinámica de una población de dos especies, donde una es la presa y la otra el depredador. Así  $x(t), y(t)$  representan los tamaños de la población en el instante  $t$  de la población presa y depredadora respectivamente. Los coeficientes  $a(t)$  y  $d(t)$  son la tasa de natalidad y de mortalidad de la presa y depredador respectivamente;  $b(t)$  y  $f(t)$  determinan el efecto inhibitorio o de fricción social que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento. Por último, los términos con retraso reflejan la influencia heredada o acumulada que el tamaño de una especie ha tenido sobre la otra.

Entre los aspectos interesantes de estos modelos, desde el punto de vista biológico, podemos destacar el estudio de la estabilidad y acotación de las soluciones positivas ( véase [2], [3]); es importante asegurar que la población se mantiene en unos ciertos niveles y también encontrar condiciones bajo las cuales ésta tiende a estabilizarse en torno a un cierto nivel de equilibrio. Es dentro de este marco donde se sitúan los resultados obtenidos.

En este trabajo analizamos el problema de la existencia de soluciones positivas y periódicas para el sistema (1), así como las propiedades de atracción de las mismas.

Será clave en nuestro estudio la obtención de un esquema iterativo basado en los datos por López-Gómez, Ortega y Tineo en [4] y por Tineo en [5] para sistemas Lotka-Volterra sin retraso. También queremos destacar los resultados dados en [1]. Como consecuencia de este esquema iterativo, presentamos condiciones suficientes para la persistencia uniforme y para la extinción del depredador, ambas cuestiones de gran interés biológico. Destacamos que dichas condiciones son independientes de la longitud de los retrasos considerados.

Finalmente se incluyen ejemplos interesantes de sistemas depredador-presa con retrasos discretos que ilustrarán nuestros resultados.

1. R. Carreño, M. Gámez, B. Granados, A. Tineo, "Continuous dependence of the global attractors of family of periodic Kolmogorov systems", *Nonlinear Analysis*, **3**, (2002), 25-36.
2. Y. Kuang, "Delay Differential Equation with applications on population dynamics", *Academic Press Inc.*, (1993).
3. Y. Kuang, B. Tang "Uniform persistence in non-autonomous delay differential Kolmogorov-type popu-

lation model”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **24**,(1994),165-186.

4. J. López-Gómez, R. Ortega, A. Tineo, “An iterative scheme for the N-competing species problem”, *Advances in Differential Equation.*, **1**, (1996), 1-15.
5. A. Tineo, “An iterative scheme for the N-competing species problem”, *Journal Diff. Equ.*, **116**, (1995), 1-15.

### Estudio numérico de una ecuación de sine-Gordon fraccionaria

Teresa Pierantozzi  
 Departamento de Matemática Aplicada  
 Facultad de Informática  
 Universidad Complutense de Madrid  
 28040, Madrid

E-MAIL: [Teresa.Pierantozzi@mat.ucm.es](mailto:Teresa.Pierantozzi@mat.ucm.es)

COLABORADORES: L. Vázquez (Dep. Mat. Aplicada, Facultad de Informática, UCM), E. Alfimov (Lukin’s Research Institute of Physical Problems, Zelenograd, Moscow)

La ecuación de sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \tag{1}$$

resulta básica en la teoría moderna de ondas no lineales y surge en muchas áreas diferentes de la física (teoría de contactos de Josephson, teoría de campos, teoría de retículos, etc. (véase [1]) como una de las descripciones más sencillas de los fenómenos considerados.

Cuando se tienen en cuenta efectos no locales como las interacciones de largo alcance entre partículas, la geometría compleja del modelo, la dispersión compleja del proceso, etc., en lugar de la ecuación clásica (1) resultan más adecuados modelos que correspondan a generalizaciones del tipo

$$u_{tt} - L[u] + \sin u = 0, \tag{2}$$

donde  $L$  es un operador integro-diferencial (véase, por ejemplo, [2]). Ejemplos interesantes de problemas no locales de este tipo se encuentran en la teoría de electrodinámicas de Josephson no locales [3,4] donde una de las ecuaciones fundamentales es

$$u_{tt} - H u_x + \sin u = 0, \tag{3}$$

con  $H$  transformada de Hilbert. La Ec. (3) es tema de estudio en una serie de publicaciones [3-8] en las que se encuentran algunas de sus soluciones exactas y se investiga su estabilidad.

Este trabajo se centra en el caso específico del operador no local

$$L[f](x, t) = {}^R D^\alpha [f](x, t) \tag{4}$$

donde  ${}^R D^\alpha$  es la derivada fraccionaria de Riesz [9,10] que, para  $\alpha = 1$  devuelve  $H \frac{d}{dx}$  mientras que para  $\alpha = 2$  coincide con  $\frac{d^2}{dx^2}$ .

La ecuación (2) con el operador no local (4),

$$u_{tt} - {}^R D^\alpha [u] + \sin u = 0, \tag{5}$$

puede ser considerada, cuando  $1 \leq \alpha \leq 2$ , como una interpolación entre la ecuación no local de sine-Gordon (3), y la

ecuación de sine-Gordon clásica (local) (1). Variando de forma continua el índice  $\alpha$  de la derivada fraccionaria de Riesz en el intervalo real  $[1, 2]$  se puede analizar cuáles de las soluciones permanecen pasando de la descripción local (1) a la no local (3).

En particular se desarrolla un estudio numérico del problema de la existencia de soluciones de tipo *breather* para la ecuación (5), es decir, soluciones localizadas en el espacio

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \tag{6}$$

y periódicas en el tiempo

$$u(t, x) = u(t + T, x). \tag{7}$$

La investigación revela que la ecuación (5) describe, para  $1 \leq \alpha < 2$ , una familia de objetos localizados en el espacio y periódicos en el tiempo, análogos de la bien conocida solución exacta de tipo *breather* de la ecuación de sine-Gordon (1)

$$u_\omega(t, x) = 4 \arctan \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega t}{\omega \cosh \sqrt{1 - \omega^2} x}, \tag{8}$$

donde  $0 < \omega < 1$ . Tales soluciones pueden considerarse como *breathers* para las aplicaciones físicas (por ejemplo, en la teoría de contactos de Josephson), aunque no satisfagan las condiciones (6)-(7), es decir, no sean soluciones de tipo *breather* en el sentido estricto. Estos objetos resultan ser muy robustos, dado que aparecen en la evolución de condiciones iniciales de perfiles muy distintos.

Además de estructuras periódicas en el tiempo descritas por (2), existen unas estructuras cuasiperiódicas que corresponden a las soluciones exactas de (1) con dos o más frecuencias temporales.

El método desarrollado para obtener estos resultados busca la solución de tipo *breather* en forma de serie de Fourier y halla sus coeficientes combinando el método conocido como aproximación de la onda rotatoria [11] con el método de la potencia invertida [12].

1. R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and H.C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic London, 1982.
2. Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Lerman L.M., *Chaos* **8**, 257 (1998).
3. A. Gurevich, *Phys. Rev. B*, **46**, 3187 (1992).
4. R.G. Mints and I.B. Snapiro. *Phys. Rev. B* **49**, 6188 (1994).
5. Yu.M. Aliev and V.P. Silin, *Phys. Lett. A* **177**, 259 (1993).
6. G.L. Alfimov and V.P. Silin, *J. Exp. Theor. Phys.* **79**, 369 (1994).
7. G.L. Alfimov and V.P. Silin. *Phys. Lett. A* **198**, 105 (1995).
8. G.L. Alfimov and V.P. Silin. *J. Exp. Theor. Phys.* **81**, 915 (1995).
9. W.Feller, *Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium* **21**, 73 (1952).
10. S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
11. S. Flach and C.R. Willis, *Physics Reports* **295**, 181 (1998).

12. A. Eydeland and J. Spruck, *Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States*, ed. W.-M. Ni et al, Math.Sci.Res.Inst.Publ. **13**, 273, (1988).

## Sesión MC3: Redes complejas

Martes, 1 de junio (18:10-19:30)  
Iglesia de San Pedro Mártir  
Modera: Susanna C. Manrubia

### Sincronización en redes complejas tipo *scale-free*

Miguel Vázquez-Prada Baillet  
Universidad de Zaragoza  
Departamento de Física Teórica. Área de Física de la Tierra  
C/ Pedro Cerbuna 12  
50009 Zaragoza. Spain

E-MAIL: miguelvb@unizar.es

COLABORADORES: Yamir Moreno y Amalio Fernández Pacheco (Universidad de Zaragoza)

La sincronización de osciladores acoplados es un fenómeno ampliamente extendido en Física, Química y Biología. Un importante ejemplo de ello es el descubrimiento de la sincronización de la actividad neuronal en el sistema nervioso central [1]. Sin entrar en detalles biofísicos, las neuronas se han modelizado como conjuntos de osciladores pulsantes acoplados, con diferentes formas de interacción [2]. La existencia de un tiempo de retardo en la recepción de los pulsos en los modelos introduce importantes modificaciones en la sincronización del conjunto [3]. Estudios recientes han explorado las características de la sincronización en este tipo de modelos con elementos que interactúan en redes totalmente conectadas o aleatorias [4]. En esta comunicación estudiamos la sincronización de osciladores pulsantes que interactúan en redes complejas libres de escala (tipo *scale-free* [5]). Analizamos las diferencias que existen en diversas propiedades de la sincronización en este tipo de redes, en comparación con las otras disposiciones ya estudiadas. Estudiamos la existencia y estabilidad del estado sincronizado y sus características frente a perturbaciones en la red y variación en el valor de los parámetros.

1. C.M. Gray et al., Nature (London) **338**, 334 (1989).
2. Por ejemplo: R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, SIAM, J Appl. Math. **50**, 1965 (1990); Y. Kuramoto and I. Nishikawa, J. Stat. Phys. **49**, 569 (1987).
3. U. Ernst, K. Pawelzik, and T. Geisel, Nature (London) **74**, 1570 (1995).
4. M. Timme, F. Wolf, and T. Geisel, Phys. Rev. Lett. **92**, 074101 (2004); M. Denker et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 074103 (2004), y referencias citadas.
5. S. H. Strogatz, Nature (London) **410**, 268 (2001)

### Nolinealidad y Caos en Redes de Comunicaciones de tipo Small-World

Pedro Pascual Broncano  
Departamento de Ingeniería Informática,  
Escuela Politécnica Superior,  
Universidad Autónoma de Madrid,  
Madrid, CP 28260, Spain

E-MAIL: Carlos.Aguirre@ii.uam.es

COLABORADORES: Carlos Aguirre Maeso (U. Autónoma de Madrid), Luis Vázquez Martínez (U. Complutense de Madrid y Centro de Astrobiología)

En las redes modernas de comunicaciones como, por ejemplo, Internet, la evolución temporal del tiempo de transmisión entre dos máquinas de la red es una serie caótica de un sistema dinámico con coeficientes de Lyapunov positivos. Incluso bajo la limitación impuesta por dicho comportamiento caótico, ciertos parámetros, tales como, el comportamiento del tiempo medio global de respuesta, se pueden predecir y caracterizar mediante modelos matemáticos o mediante el uso de otras técnicas tales como redes neuronales. Los modelos del comportamiento de las redes modernas de comunicaciones deben recoger esta gran complejidad, incluyendo en el modelo aspectos tales como los fuertes efectos no-lineales introducidos por las colisiones o las colas, los retrasos introducidos por los nodos debido al tiempo que transcurre desde que la información es recibida por un nodo hasta que es vuelta a introducir en la red o el efecto producido por la pérdida de información a medida que ésta es transmitida a través de la red.

El comportamiento de un conjunto de elementos viene dado no sólo por el comportamiento de cada uno de los elementos sino además por la topología de interconexión entre los elementos de la red. Un tipo interesante de redes son las conocidas como redes Small-World. Las redes de tipo Small-World presentan una corta distancia media entre nodos, sin embargo los nodos se encuentran altamente agrupados. Internet parece presentar estas características en su topología de conexión entre los nodos de la red. Este tipo de redes aparecen con frecuencia en la vida real, en la World-Wide-Web, como resultado de la evolución natural o como resultado de un proceso de aprendizaje.

Con el fin de introducir todos estos elementos en nuestro modelo consideramos un conjunto de nodos conectados mediante una red de tipo Small-World. Siguiendo trabajos anteriores, introduciendo nuevos términos y mediante un paso al continuo se obtiene la siguiente expresión para el volumen total de nodos a los cuales se ha transmitido un paquete de información en una red en la cual se tienen retrasos en la transmisión, efectos no lineales y fallos de transmisión  $V(t) = \Gamma_d \int_0^t 1 + (\xi^{-d} - \Theta)V - \mu V^2 \zeta^{d-1} d\zeta$  donde  $\xi$  es una estimación de la longitud de escala,  $\Gamma_d$  es una constante que depende del volumen de la esfera en  $d$  dimensiones y  $\Theta$  y  $\mu$  son parámetros que representan la fricción lineal producida por la pérdida de paquetes y la fricción no lineal producida por las colas y las colisiones en la red respectivamente. Finalmente la expresión anterior puede ser reducida a una ecuación diferencial no lineal con retraso de la forma  $\frac{dV}{d\tau^d} = \xi^d + (1 - \xi^d \Theta)V - \mu \xi^d V^2$ .

Si escribimos la anterior ecuación como una ecuación en diferencias y tomando  $d\tau = \delta$ ,  $d = 1$  and  $\delta = 1$  podemos reescribir la ecuación mediante un cambio de variables en la forma  $V_{n+1} = \xi + (2 - \xi\Theta)V_n - \mu\xi V_n^2$ , que es la expresión

de la ecuación logística. Esta ecuación presenta caos para valores de la escala  $\xi$  mayores que un valor crítico, mostrando así diferente comportamiento caótico cuando la red es observada a diferentes escalas.

---

## La red de colaboraciones europea en el contexto del Programa Marco

Juan Antonio Almendral Sánchez  
*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
 28933 Móstoles, Madrid

E-MAIL: [j.a.almendral@escet.urjc.es](mailto:j.a.almendral@escet.urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: J.G. Oliveira (U. de Aveiro), L. López (U. Rey Juan Carlos), J.F.F. Mendes (U. de Aveiro), Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

En esta contribución se analiza exhaustivamente la red de colaboraciones entre empresas e instituciones científicas europeas en el contexto del V programa Marco (FP5). Dicha red está constituida por empresas de carácter industrial y/o comercial y diferentes instituciones dedicadas a la investigación y/o educación, que han colaborado en algún proyecto del FP5.

La red de colaboraciones puede representarse mediante un grafo en el que los vértices representan cualesquiera de los participantes en el FP5, y las aristas representan dos participantes que han formado parte de un mismo proyecto. Representar así las colaboraciones nos permitirá obtener información muy valiosa sobre cómo se relacionan ciencia y tecnología.

El grafo asociado al FP5 no es aleatorio, en el sentido de Erdős-Rényi, sino que presenta un claro carácter *small-world*. De hecho, demostramos que el grafo asociado al FP5 es *scale-free* con un alto índice de agrupación. Este resultado implica que las conexiones entre los participantes no se producen de forma aleatoria, sino que debe existir alguna forma de vinculación preferente. La consecuencia que tal resultado tiene en la red se presenta para su discusión detallada.

Asimismo, demostramos que la presencia de universidades y centros de investigación es importante en la transferencia de conocimiento, y ello a pesar de que estos centros sólo representan una pequeña fracción del total de participantes.

Por último, se estudian de forma individual los subgrafos asociados a los diferentes programas que integran el FP5. Esto es, grafos cuyos vértices son los participantes de cada programa y aristas que representan dos participantes que han colaborado en un proyecto perteneciente a ese programa.

---

## Scale-free brain functional networks

Víctor M. Eguíluz  
*IMEDEA (CSIC-UIB), E07122 Palma de Mallorca, Spain*

E-MAIL: [victor@imedea.uib.es](mailto:victor@imedea.uib.es)  
 WWW: <http://www.imedea.uib.es/~victor>

COLABORADORES: Dante R. Chialvo, Guillermo Cecchi, Marwan Baliki, A. Vania Apkarian

Functional magnetic resonance imaging was used to define networks among correlated human brain sites. Analysis

of the resulting networks shows: the distribution of functional connections and probability of finding a link vs. distance are both scale-free. The characteristic path length is relatively small and comparable to those calculated for equivalent random networks. The clustering coefficient is orders of magnitude larger than those of equivalent random networks and much larger than that of the null model with random rewiring. Additionally, an unexpected assortative feature was apparent, previously only seen in social networks. All these properties, typical of scale-free small world networks, reflect important functional information about brain states.

---

## Sesión MC4: Bifurcaciones I

Martes, 1 de junio (18:10-19:30)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: Emilio Freire

---

### Bifurcaciones globales en la degeneración Punto-T-Hopf

Fernando Fernández Sánchez  
*Universidad de Sevilla*  
*Escuela Superior de Ingenieros,*  
*Camino de los descubrimientos s/n*  
*Sevilla, 41092*

E-MAIL: [fernando@ma2.us.es](mailto:fernando@ma2.us.es)  
 WWW: <http://ma2pc4.us.es/~fernando/>

COLABORADORES: Emilio Freire Macías (U. de Sevilla), Alejandro J. Rodríguez Luis (U. de Sevilla)

El objeto que centra este trabajo, la degeneración Punto-T-Hopf, surge de manera natural en diversos sistemas parametrizados tridimensionales de ecuaciones diferenciales autónomas que modelan diferentes dispositivos reales. Uno de ellos consiste en un oscilador de van der Pol-Duffing modificado cuyo estudio ha motivado numerosos trabajos.

Una característica destacada de la dinámica que exhibe dicho oscilador es la gran riqueza de comportamientos complejos, que van desde bifurcaciones (de codimensión alta) de equilibrios a atractores caóticos, pasando por todo tipo de bifurcaciones de órbitas periódicas y bifurcaciones globales. Precisamente, partiendo de la bifurcación triple cero de equilibrios (la matriz de linealización del sistema corresponde a un autovalor nulo triple con una única caja de Jordan) se han encontrado varias bifurcaciones globales, entre la que se encuentra la bifurcación punto-T.

Esta bifurcación global aparece en la zona del espacio de parámetros en que hay tres equilibrios de tipo silla-foco. Debido a la simetría  $\mathbb{Z}_2$  que tiene el sistema, uno de ellos está situado en el origen y los otros dos son simétricos respecto de éste. Para ciertos valores de los parámetros las variedades unidimensionales de los equilibrios coinciden y las bidimensionales tienen un corte transversal. Abusando del lenguaje, llamaremos punto-T, tanto al punto del espacio de parámetros donde se produce dicha degeneración como al ciclo heteroclino correspondiente. De ese modo, genéricamente, el punto-T es una degeneración de codimensión dos.

La existencia y distribución de bifurcaciones globales de codimensión uno cerca del punto-T ha sido motivo de diversos trabajos previos; sin embargo no abundan los estudios

referidos a las interacciones entre el punto-T y posibles bifurcaciones de los equilibrios involucrados. El punto-T-Hopf, concretamente, consiste en la degeneración que se obtiene cuando uno de los equilibrios del punto-T tiene una bifurcación de Hopf.

Mediante la construcción de un modelo matemático a primer orden (basado en la construcción de un mapa de retorno en las cercanías del ciclo heteroclinio correspondiente) analizamos las posibles bifurcaciones globales que organiza el punto-T-Hopf. Entre otras encontramos, en un espacio triparamétrico, superficies de conexiones homoclinas y heteroclinas de codimensión uno, curvas de puntos-T, curvas cerradas de ciclos heteroclinos entre órbitas periódicas y equilibrios, curvas de bifurcaciones Shil'nikov-Hopf, etc.

En la comunicación se complementan las conclusiones teóricas que se deducen a partir del modelo con algunos resultados numéricos que se obtienen para el oscilador electrónico antes mencionado.

### Influencia de la variedad estable de puntos de silla en la generación de ciclos límite de baja frecuencia en un regulador *boost*

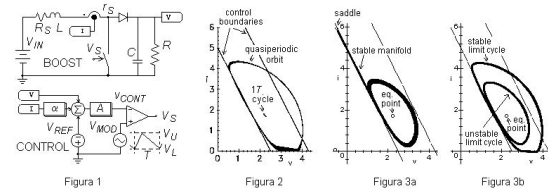
Luis Benadero García-Morato  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Dep. Física Aplicada,  
c/Jordi Girona 1  
Barcelona, 08034

E-MAIL: [luis@fa.upc.es](mailto:luis@fa.upc.es)

COLABORADORES: Vanessa Moreno Font (Universitat Politècnica de Catalunya)

Los convertidores conmutados dc-dc son circuitos con configuraciones básicas lineales (*PWL systems*) de amplio uso para suministrar tensión regulada en aplicaciones de potencia. La regulación se efectúa modulando los intervalos de tiempo en cada configuración (*PWM control*). El circuito de la Fig. 1 corresponde a un convertidor *boost* con un circuito de control cuyas entradas son las variables de estado del sistema (tensión en el condensador  $v$  e intensidad de corriente en la bobina  $i$ ). La conversión tensión-tiempo se realiza por comparación con una tensión triangular, que fija la frecuencia de trabajo  $f = \frac{1}{T}$  en funcionamiento normal, con alternancia regular de los estados (ON, OFF) del interruptor. Entonces, el régimen permanente es un ciclo de periodo  $T$  con rendimiento  $d = \frac{t_{ON}}{T}$ ,  $T = t_{ON} + t_{OFF}$ . Estos sistemas presentan diferentes bifurcaciones: *flip*, Hopf y propias de sistemas PWS (*border collision*). La aplicación de Poincaré con muestras estroboscópicas del vector de estado se utiliza ampliamente para analizar estos sistemas. Los puntos singulares de la aplicación corresponden a ciclos límite y pueden determinarse a partir de las respuestas analíticas conocidas de cada configuración lineal, previa determinación de los instantes de conmutación (numéricamente o por aproximación analítica). La estabilidad local del sistema, y en su caso el tipo de bifurcación, en el entorno de un punto singular es cognoscible a partir de los autovalores de la matriz Jacobiana o de derivadas parciales. Si sus autovalores son complejos de módulo unidad se produce la bifurcación de Neimark-Sacker (Hopf en sistema continuo). En la Fig. 2 se representa una situación próxima a la bifurcación en la que un ciclo  $1T$  aún estable coexiste con una órbita cuasi-periódica con gran rizado de baja frecuencia.

Se presenta aquí un ejemplo de análisis de carácter más global en el entorno de una bifurcación Hopf mediante técnicas de aproximación por promediado de las variables de estado. Los puntos de equilibrio del sistema promediado, que para el regulador *boost* es no lineal suave (*smooth*), corresponden a ciclos límite del sistema original, si están dentro del rango del control. Uno de estos puntos es típicamente un foco y su inestabilización corresponde a una bifurcación Hopf, en cuyo entorno puede haber otros atractores, como la órbita de baja frecuencia mencionada o dinámicas de bloqueo del sistema. En la Fig. 3 se dan los resultados obtenidos por promediado para un sistema equivalente al de la Fig. 2. En la Fig. 3a, que no contempla los límites del sistema y su control, se representa otro punto de equilibrio tipo silla, así como (calculando en tiempo inverso) su variedad estable que tiende a un ciclo límite inestable de baja frecuencia. Este ciclo necesariamente es la frontera entre cuencas de atracción, una será el foco  $1T$  mencionado (funcionamiento standard). En la Fig. 3b, que sí incluye los límites físicos de funcionamiento, se representa además el otro atractor del sistema que en este caso, por no haber otros puntos de equilibrio dentro del rango de control, debe ser un ciclo límite estable. Obsérvese la correspondencia entre ambos atractores entre la Fig. 2 (simulación directa del sistema) y la Fig. 3b (promediado).



### Bifurcaciones *cocoon*

Santiago Ibáñez Mesa  
Departamento de Matemáticas  
Universidad de Oviedo  
Avda. de Calvo Sotelo s/n  
Oviedo, 33007

E-MAIL: [mesa@pinon.ccu.uniovi.es](mailto:mesa@pinon.ccu.uniovi.es)  
WWW: <http://orion.ciencias.uniovi.es/~mesa/personal/santi/santiago.htm>

COLABORADORES: Freddy Dumortier y Hiroshi Kokubu

Con el nombre de bifurcación *cocoon* se hace referencia a todo un conjunto de comportamientos dinámicos observados (véase [4] y [5]) numéricamente en familias de sistemas reversibles [3] tridimensionales. Dichos sistemas reversibles son frecuentes en diferentes aplicaciones. Como ejemplos señalaremos la ecuación de Kuramoto-Shivasinsky y también los modelos de uniones de Josephson; en ambos casos nos estaremos refiriendo a los casos unidimensionales. La primera surge [2] en el contexto del estudio de la formación de patrones en sistemas de reacción-difusión y también en relación con la propagación de frentes de llama en problemas de combustión [6]. El segundo modelo que citamos, las uniones de Josephson, surge en el estudio de materiales superconductores [7]. En ambos casos la búsqueda de ondas viajeras (solitones) conduce a familias de campos autónomos tridimensionales reversibles.



Hemos de hacer notar que nuestro interés en el estudio de sistemas reversibles y, en particular, en el estudio de bifurcaciones *cocoon*, se motiva desde un contexto diferente. Concretamente a partir del estudio de los despliegues genéricos de la singularidad nilpotente de codimensión tres en  $\mathbb{R}^3$  [1]. Después de oportunos reescalados, cualquier despliegue genérico puede escribirse como la perturbación de una familia de campos que es reversible para ciertos valores de los parámetros. Es digno de destacar que la subfamilia reversible obtenida es de hecho la misma a la que se llega en el caso de la ecuación de Kuramoto-Shivashinsky.

Nosotros consideramos las bifurcaciones *cocoon* en el contexto general de los sistemas reversibles en dimensión tres y proponemos, como centro organizador más simple para la secuencia de fenómenos asociada, una configuración que denominamos cadena heteroclínica cúspide-transversal. Concretamente, probamos que en cualquiera de sus despliegues genéricos se presentan bifurcaciones *cocoon* básicas, consistentes en secuencias de tangencias entre variedades invariantes bidimensionales de puntos de equilibrio con longitud divergente de la órbita de tangencia. El resto de fenómenos asociado a la bifurcación *cocoon* se explica a partir de hipótesis adicionales. Al mismo tiempo conjeturamos que las cadenas heteroclínicas cúspide-transversales son configuraciones que emergen genéricamente en el despliegue de ciclos Bykov reversibles (esto es, ciclos heteroclínicos entre puntos de equilibrio de tipo foco-silla). Este tipo de ciclos está presente en la familia que deriva de la ecuación de Kuramoto-Shivashinsky. Nosotros probaremos un resultado parcial en relación con la conjetura y discutiremos heurísticamente su validez. Se observará que las familias que derivan de los modelos antes mencionados (ecuación de Kuramoto-Shivashinsky y uniones de Josephson) muestran bifurcaciones *cocoon* asociadas a cadenas heteroclínicas cúspide-transversal. Este hecho se puede deducir a partir de la existencia de ciclos Bykov en tales familias.

1. Y.-T. Lau, The “cocoon” bifurcations in three-dimensional systems with two fixed points, *Int. J. Bif. Chaos* **2** (1992), 543–558.
2. D. Michelson, Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica D* **19** (1986), 89–111.
3. J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts, Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey, *Physica D* **112** (1998), 1–39.
4. Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Prog. Theor. Phys.* **55** (1976), 356–369.
5. G. I. Shivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames I, Derivation of basic equations, *Acta Astronautica* **4** (1977), 1177–1206.
6. J. B. van den Berg, S. van Gils, and T. Visser, Parameter dependence of homoclinic solutions in a single long Josephson junction, *Nonlinearity* **16** (2003), 707–717.
7. F. Dumortier, S. Ibáñez and H. Kokubu, New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three, *Dynamical Systems* **16** (2001), 63–95.

## Sobre las inestabilidades tridimensionales de flujos bidimensionales con simetría espacio-temporal $Z_2$

Francisco Marqués Truyol  
*Universidad Politécnic de Catalunya*  
 Dep. Física Aplicada,  
 c/ Jordi Girona 1-3, Mod. B5  
 08034 Barcelona

E-MAIL: [marques@fa.upc.es](mailto:marques@fa.upc.es)  
 WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa/fluids/marques/marques.html>

COLABORADORES: Juan Manuel López (Arizona State University), Hugh Blackburn (CSIRO, Australia)

La rotura de simetrías puramente espaciales ha sido extensamente estudiada en dinámica de fluidos. No sucede lo mismo con el análisis de la rotura de simetrías espacio-temporales. La transición de flujos bidimensionales a tridimensionales implica la rotura de la invariancia en la dirección transversal  $z$ : es una simetría  $O(2)$ , que consiste en invariancia por traslaciones y reflexión en  $z$ . Pero además de estudiar esta simetría espacial  $O(2)$ , debemos tener en cuenta las simetrías adicionales que posee el flujo bidimensional. Aquí analizamos las bifurcaciones de flujos bidimensionales periódicos que poseen, además de la simetría espacial  $O(2)$ , una simetría espacio-temporal  $Z_2$ , que consiste en una reflexión en el plano bidimensional seguido de una traslación temporal de medio período. Un ejemplo clásico es la estela de von Karman de un cilindro circular.

Una solución periódica pierde estabilidad cuando al menos un valor propio de la aplicación de Poincaré linealizada  $L_P$  cruza el círculo unidad. La teoría de formas normales proporciona una aplicación de pequeña dimensión que describe la dinámica no lineal en un entorno de la bifurcación, en términos de las amplitudes de los vectores propios críticos. Las bifurcaciones en presencia de un grupo de simetrías espaciales  $G$  se obtienen analizando las representaciones conjuntas de  $L_P$  y  $G$ . El análisis en presencia de simetrías espacio-temporales es reciente, y dista de ser completo. Para una simetría espacio-temporal  $H$  que genera  $Z_2$ , la aplicación de Poincaré es el cuadrado de  $H$ . El análisis de estabilidad y la forma normal pueden obtenerse para  $H$ , y los correspondientes resultados para la aplicación de Poincaré se obtienen fácilmente de  $P = H^2$ . Este método presenta dos ventajas importantes: en primer lugar, la simetría espacio-temporal es incluida de forma natural en el análisis; en segundo lugar, la integración temporal para el análisis de estabilidad se hace sólo sobre medio período, reduciendo a la mitad el costo computacional.

Hemos identificado muchas de las bifurcaciones que un sistema dinámico, con simetrías espacial  $O(2)$  y espacio-temporal  $Z_2$ , puede presentar. El resultado principal que hemos obtenido es que existen sólo tres bifurcaciones de codimensión uno para la transición de flujo bidimensional a tridimensional, independientemente del mecanismo físico involucrado. Dos de estas bifurcaciones son sincronas, una de ellas rompe y la otra preserva la simetría espacio-temporal  $H$ . La tercera es una bifurcación cuasiperiódica, y el estado bifurcado puede manifestarse como una onda viajera modulada, o como una onda estacionaria modulada.

Hemos calculado las soluciones bifurcadas en sistemas autónomos, como las estelas generadas por obstáculos, y en sistemas no autónomos, como el flujo en una cavidad for-

zado periódicamente. Los resultados obtenidos concuerdan con las bifurcaciones observadas experimentalmente en estos flujos.

## Sesión XA1: Ciclos límite

Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)

Aula 1.2

Moderador: Enrique Ponce

### Isócronas, existencia y estabilidad de ciclos límite a través de simetrías de Lie

Toni Guillamon Grabolosa

Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Matemàtica Aplicada I, EPSEB,

Avda. Dr. Marañón, 44-50

Barcelona, 08028

E-MAIL: [antoni.guillamon@upc.es](mailto:antoni.guillamon@upc.es)

WWW: <http://www-ma1.upc.es/~tonig>

COLABORADORES: Emilio Freire (U. Sevilla), Armengol Gasull (U. Autònoma de Barcelona)

Expondremos resultados recientes sobre teoría de ciclos límite motivados por preguntas relacionadas con el estudio de ritmos circadianos planteadas por A.T. Winfree.

En los modelos de relojes biológicos, el objeto matemático de mayor interés es el ciclo límite atractor que acaba gobernando la dinámica asintótica. En concreto, dado un punto cualquiera en un entorno tubular del ciclo límite (es decir, dadas unas condiciones iniciales cualesquiera) tiene interés conocer la fase del ciclo en que nos encontramos. En estos términos, podemos preguntarnos: (1) ¿será siempre posible determinar esta fase?, (2) ¿cómo se determina? Así, si definimos la isócrona de un punto  $y$  del ciclo límite como el conjunto de todos los puntos que están en la misma fase, las preguntas se traducen en (1') ¿cuándo existen las isócronas?, (2') ¿cómo se calculan?

Estos interrogantes fueron ya conectados con la hiperbolicidad del ciclo límite y su variedad estable por J. Guckenheimer (véase [3]), aunque recientemente C. Chicone (véase [1]) ha dado una respuesta más precisa usando el mismo lenguaje. Nuestro enfoque para atacar el problema se fundamenta en el uso de simetrías de Lie. En problemas para estudiar el período de centros en el plano, habíamos enunciado ya algunos resultados (véase [2]) que explotan el conocimiento explícito de una simetría de Lie de un campo vectorial  $X$  (existencia de  $U$  y  $\mu$  tales que  $[X, U] = \mu X$ ). Esta experiencia ha resultado útil para exportar estas mismas técnicas a problemas de control del tiempo de retorno alrededor de un ciclo límite. En este contexto, y partiendo de un campo vectorial  $\dot{x} = U(x)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , con un cierto ciclo límite  $\gamma(t)$ , demostramos que (genéricamente) la órbita de  $X$  con condición inicial en  $\gamma(t_0)$ , donde  $[X, U] = \mu X$  para cierta función  $\mu$ , es la isócrona del ciclo límite en dicho punto. No obstante, el resultado más importante que se obtiene es que la función  $\mu$  controla la estabilidad del ciclo límite, jugando un papel similar al de la divergencia sobre  $\gamma(t)$ .

En términos de simetrías, la relación de la ecuación  $[X, U] = \mu X$  con las preguntas de Winfree ha sido completamente demostrada por M. Sabatini (véase [4]). En la segunda parte de la presentación, pues, pondremos más énfasis en las implicaciones de las simetrías de Lie en la estabilidad de ciclos límite, su hiperbolicidad, su existencia y su número. Veremos que el criterio obtenido es independiente del clásico criterio de la divergencia.

1. C. Chicone, W. Liu *Asymptotic Phase Revisited*, Preprint (2003).
2. E. Freire, A. Gasull, A. Guillamon. *First derivative of the period function with applications*, aparecerá en Journal of Differential Equations (2004).
3. J. Guckenheimer. *Isochrons and phaseless sets*, Journal of Mathematical Biology 1, 259–273 (1975)
4. M. Sabatini. *Isochronous sections via normalizers*, preprint (2003).

### Polynomial vector fields with algebraic limit cycles

Natalia Sadovskaia

Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Matemàtica Aplicada II

c. Pau Gargallo, 5

Barcelona, 08028

E-MAIL: [natalia.sadovskaia@upc.es](mailto:natalia.sadovskaia@upc.es)

COLABORADORES: Rafael Ramírez Inostroza (URV)

By definition a real (complex) planar polynomial differential system or simply a polynomial system is a differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

where the dependent variables  $x$  and  $y$  are real (respectively complex), the independent variable (time  $t$ ) is real and the functions  $P$  and  $Q$  are polynomial in  $x$  and  $y$  with real (complex) coefficients.

An algebraic curve

$$g(x, y) = 0, \quad g \in \mathbb{R}[x, y]$$

is called an invariant algebraic curve of the above system if the following condition holds:

$$P(x, y)\partial_x g(x, y) + Q(x, y)\partial_y g(x, y) = K(x, y)g(x, y)$$

for some real polynomial  $K$  of degree at most  $n - 1$ . Many papers are dedicated to the study of polynomial planar vector fields with algebraic solutions.

It is always helpful to look at this problem from another point of view. In this communication, we take an alternative viewpoint of starting with a given set of algebraic invariant curves and determining the form of the system which has such a set of invariant curves. This point of view was firstly developed by Erugin in the paper “Construction of the all set of ordinary differential equations with a given integral curve” published in 1952. In this article the author stated and solved the problem of constructing a planar vector field for which the given curve is its invariant. He obtained the following result:

**Proposition:** The most general planar vector field for which  $g(x, y) = 0$  is its invariant curve is

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu(x, y)\partial_y g + a(x, y) \\ \dot{y} = -\nu(x, y)\partial_x g + b(x, y) \end{cases}$$

where  $\nu, a, b$  are arbitrary functions:

$$\begin{cases} a(x, y)\partial_x g + b(x, y)\partial_y g = \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y)|_{g(x, y)=0} = 0 \end{cases}$$

These ideas were developed by Galiullin and his followers.

By applying the Erugin-Galiullin ideas we state and study a new inverse problem in the theory of ordinary differential equations. We analyze the problem of constructing a planar vector field with  $S \geq 1$  invariant curves, in particular we study the case when the given curves are algebraic. The aim of this communication is to apply this result to construct the polynomial vector field with algebraic limit cycles.

### Ciclos límite algebraicos en sistemas cúbicos de Liénard con rozamiento lineal

Isaac A. García Rodríguez  
*Universidad de Lleida*  
*Escuela Politécnica Superior,*  
*c/ Jaume II, 69*  
*Lleida, 25001*

E-MAIL: [garcia@eup.udl.es](mailto:garcia@eup.udl.es)  
 WWW: <http://www.udl.es/dept/matematica/ssd/>

COLABORADORES: Javier Chavarriga Soriano (U. Lleida),  
 Jaume Llibre Saló (U. Autònoma de Barcelona)

Este trabajo trata sobre los llamados sistemas polinomiales de Liénard, es decir, ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden del tipo  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  con  $f$  y  $g$  polinomios. Este tipo de sistemas fueron considerados por el físico francés A. Liénard en 1928 en relación con las oscilaciones autosostenidas. Nótese que este tipo de ecuaciones incluye como caso particular a la famosa ecuación de van der Pol que modeliza un circuito con triodo. Sin embargo, desde su introducción, este tipo de ecuaciones diferenciales ha servido para modelizar muchos y muy diferentes fenómenos físicos. Sin pretender ser exhaustivos algunos ejemplos son: los batidos del corazón humano, el análisis de un compresor de flujo axial, el estudio de las estructuras de un fluido viscoso cercano a una pared plana, el sistema de conducción nerviosa de FitzHugh, una gran variedad de sistemas mecánicos, etc...

En este trabajo se consideran los sistemas cúbicos de Liénard con rozamiento lineal, es decir,  $\dot{x} = y, \dot{y} = -f(x)y - g(x)$  con  $f$  y  $g$  polinomios de grados 1 y 3 respectivamente. En concreto se estudia el problema de la coexistencia de ciclos límite y soluciones particulares algebraicas de grado arbitrario. Recordemos que un ciclo límite es una órbita periódica aislada en el plano  $x - y$  de las fases, es decir, no existe ninguna otra órbita periódica del sistema en un entorno suyo. Por otra parte, una solución particular algebraica es una curva en el plano de fases que es invariante por el flujo del sistema y que además es algebraica, es decir, viene dada por  $h(x, y) = 0$  con  $h$  un polinomio en las variables  $x$  e  $y$ .

Dumortier, Li y Rousseau han probado que tales sistemas tienen como mucho un ciclo límite en

dos artículos. Nosotros analizamos el problema abierto propuesto por Żołądek sobre la existencia o no de ciclos límite algebraicos para este tipo de sistemas, véase también *Mathematical Review* 98:34051.

### Sobre el periodo de los ciclos límite que aparecen en bifurcaciones uniparamétricas de sistemas diferenciales en el plano

Víctor Mañosa Fernández  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Matemàtica Aplicada III*  
*c/Colom, 1*  
*Terrassa, 08222*

E-MAIL: [victor.manosa@upc.es](mailto:victor.manosa@upc.es)  
 WWW: <http://www-ma3.upc.es/users/manosa>

COLABORADORES: Armengol Gasull (U. Autònoma de Barcelona), Jordi Villadelprat (U. Rovira i Virgili).

Numerosos modelos procedentes de campos como la biología, la física, la economía vienen descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano. Muchos de estos modelos vienen caracterizados por la presencia de parámetros. La variación de estos parámetros puede dar lugar a bifurcaciones, esto es, a cambios drásticos en el comportamiento, local o global, de las soluciones.

En este trabajo se consideran las bifurcaciones más simples (las bifurcaciones uniparamétricas aisladas de codimensión 1 [2,3]) que pueden dar lugar a la aparición de soluciones periódicas (ciclos límite). Se demuestra que el desarrollo asintótico de la función de periodo asociado al ciclo límite está determinado por el tipo de bifurcación que ha acontecido y recíprocamente.

Creemos que este resultado puede ser de utilidad en el siguiente contexto: en ocasiones en un sistema físico se puede observar la emergencia de soluciones periódicas al variar parámetros físicos del sistema. También se puede evaluar su periodo para distintos valores del parámetro pero desconocemos qué tipo de bifurcación ha acontecido. La identificación del desarrollo asintótico del periodo (mediante algún tipo de regresión) podría dar lugar, utilizando resultados como el que se presenta, a la identificación del tipo de bifurcación que ha tenido lugar.

Este tipo de situaciones aparecen en el campo de la neurociencia computacional [1], por ejemplo cuando se estudia la actividad de neuronas del cerebro con el objetivo de determinar las conductancias sinápticas que reciben ( $\vec{\lambda} \in \mathbf{R}^p$ ). En los experimentos, inyectando diferentes corrientes externas (simbolizadas aquí por  $\mu$ ), se puede obtener el periodo de las oscilaciones del voltaje de la célula. De manera que se obtiene  $T(\mu_i, \vec{\lambda})$ , para  $i = 1, \dots, m$  (generalmente,  $m > p$ ) a partir de esta información se puede, mediante algún tipo de regresión, llegar a estimar  $\vec{\lambda}$ . El conocimiento analítico de  $T(\mu_i, \vec{\lambda})$  es determinante para hacer esta regresión.

En resumen: bajo hipótesis genéricas el término principal del desarrollo asintótico de la función de periodo de un ciclo límite emergiendo de una bifurcación uniparamétrica aislada de codimensión 1 viene dado por: (1) Bifurcación de Andronov-Hopf: Si la parte lineal no es degenerada entonces  $T(\mu) \approx T_0 + T_1\mu$ . Si la parte lineal es degenerada y no hay direcciones características, entonces:  $T(\mu) \approx T/\mu^n$ , donde  $n = (k - 1)/2$ , y  $k$  es el grado de la primera componen-

te homogénea no nula del sistema. (2) Bifurcación de una órbita semi estable:  $T(\mu) \approx T_0 + T_1\sqrt{\mu}$ . (3) Bifurcación de Silla-Nodo:  $T(\mu) \approx T/\sqrt{\mu}$ . (4) Bifurcación de *loop* de silla:  $T(\mu) \approx T \ln \mu$ .

Donde hemos usado la siguiente notación:  $T(\mu) \approx a + f(\mu)$  cuando  $\mu \rightarrow 0^+$  si  $\lim_{\mu \rightarrow 0}(T(\mu) - a)/f(\mu) = 1$ .

- 1 A. Guillamon, comunicación privada.
- 2 R. Roussarie, Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem, *Progr. Math.* **164**, Birkhäuser. Basel, 1998.
- 3 J. Sotomayor, Curvas definidas por equações diferenciais no plano, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 1981.

## Sesión XA2: Métodos numéricos para EDPs

Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)

Aula 2.2

Moderador: Henar Herrero

### Solución analítico-numérica del problema asociado a la estimación del flujo en colectores de escape de motores de combustión interna alternativo

Jose Manuel Arnau Pilar

*Instituto de Matemática Multidisciplinar*

*Universidad Politécnica de Valencia*

*Edificio I3, 2. Apartado 22012*

*Valencia, España*

E-MAIL: [jmaarnau@mot.upv.es](mailto:jmaarnau@mot.upv.es)

COLABORADORES: María Dolores Roselló Ferragud (Instituto de Matemática Multidisciplinar, U. Politécnica de Valencia), Antonio José Torregrosa Hugué (CMT-Motores Térmicos, U. Politécnica de Valencia)

El objetivo de este trabajo es la obtención de soluciones analíticas que aproximen la solución del sistema de las ecuaciones hiperbólicas que rigen el movimiento del gas por un conducto, con condiciones de contorno analíticas. Este estudio se enmarca en un proyecto interdisciplinar entre CMT-Motores Térmicos y el Instituto de Matemática Multidisciplinar.

Las técnicas de modelado predictivo aplicables al comportamiento de los sistemas de escape se basan en la solución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con distintas aproximaciones unidimensionales, dando lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales de tipo hiperbólico. Las dos opciones más generalizadas de resolución de estos sistemas son: abordar la solución directa del sistema completo implicando técnicas numéricas [1] o admitir que las componentes fluctuantes del flujo son relativamente pequeñas, de forma que es posible linealizar el sistema de ecuaciones obteniendo una solución analítica relativamente sencilla, al reducirse a la ecuación de ondas de D'Alembert [2], pero que no capta la no-linealidad del problema.

En este trabajo se presentan dos métodos numéricos que permiten obtener una aproximación analítico-numérica de la solución de problemas cuasi lineales, marco más general en el que se encuadran estas ecuaciones, de la forma  $A(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u)$  con dato frontera  $u(x, 0) = \phi(x)$  y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . También se presentarán los resultados obtenidos al aplicarlos a las ecuaciones de estudio. El primero de los métodos utilizados es un método iterativo basado en el teorema de Cauchy-Kovalevskaya, utilizando el algoritmo de Frobenius, que nos permite encontrar el desarrollo en serie de la solución [3]. Éste se ayuda de aproximaciones por polinomios de Chebyshev, lo que nos permite ampliar el dominio de existencia de la solución. El segundo está basado en los métodos de colocación mediante polinomios de Chebyshev, lo que nos llevará a la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas, gracias a la forma que tienen las ecuaciones de estudio. Este sistema algebraico se resuelve mediante un método de continuación por homotopía [4].

1. F. Payri, A.J. Torregrosa, M.D. Chust, Application of MacCormack Schemes to I.C. Engine Exhaust Predictions, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 195, 5, 757-773, 1996.
2. F. Payri, A.J. Torregrosa, R. Payri, Evaluation Through Pressure and Mass Velocity Distributions of the Linear Acoustical Description of I. C. Engine Exhaust Systems, *Applied Acoustics* 60, 489-504, 2000.
3. E. Ponsoda, J.V. Romero, J.R. Serrano, J.M. Arnau, A New Iterative Method for Flow Calculation in Intake and Exhaust Systems of Internal Combustion Engines, *Mathematical and Computer Modelling*, 38 I-II, 99-112, 2003.
4. J.M. Arnau, Soluciones analítico-numéricas de las ecuaciones que rigen el flujo unidimensional no estacionario: aplicación a los Sistemas de Admisión y Escape de los Motores de Combustión Interna Alternativos, Tesis Doctoral (2004).

### Métodos espectrales para EDPs en dominios irregulares. Aplicaciones a problemas cardiológicos

Alfonso Bueno Orovio

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha*

*E.T.S.I. Industriales, Avda. Camilo José Cela, s/n, 13071 Ciudad Real.*

E-MAIL: [Alfonso.Bueno@uclm.es](mailto:Alfonso.Bueno@uclm.es)

WWW: <http://matematicas.uclm.es/nolineal>

COLABORADORES: Víctor M. Pérez García (U. Castilla-La Mancha), Flavio H. Fenton (Department of Physics, Hofstra University and Beth Israel Medical Center)

Aunque el uso de métodos espectrales para la resolución de EDPs es generalizado, existen varios problemas que limitan su aplicación en ciencia e ingeniería. El primero de ellos es que la discretización de una EDP mediante estos métodos conduce a la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales o no lineales no dispersos, excepto cuando las soluciones se expanden usando funciones trigonométricas o polinomios relacionados, donde el uso de la Transformada

Rápida de Fourier (FFT) evita la solución directa del sistema de ecuaciones. Otro inconveniente de los métodos espectrales es que la geometría del problema (i.e. el dominio físico y computacional) debe ser simple para permitir el uso de la base ortonormal apropiada para expandir el conjunto de soluciones posibles al problema, razón principal por la que estos métodos poseen un uso limitado en ingeniería.

Presentamos un nuevo concepto, basado en el llamado *phase field method*, que permite por primera vez la aproximación con métodos espectrales de la solución de ecuaciones en derivadas parciales en dominios arbitrariamente irregulares, y aunque ha sido desarrollado para incorporar condiciones de frontera Neumann nulas podría ser generalizado fácilmente para incorporar cualquier tipo de condiciones de frontera. En este trabajo formalizamos la idea de los métodos de *phase field* para discretizar EDPs en dominios irregulares y discutimos cómo la nueva formulación es útil para el uso directo de métodos espectrales, haciendo el problema adecuado para su solución mediante FFT. Se presentarán resultados representativos sobre el nuevo método, así como aplicaciones prácticas, como el modelado de la propagación de la excitación eléctrica en geometrías 3D realistas del corazón.

---

### Una técnica eficiente para disminuir notablemente la reducción de orden en tiempo al integrar problemas parabólicos semilineales

Begoña Cano Urdiales  
*Universidad de Valladolid*  
*Facultad de Ciencias,*  
*c/Doctor Mergelina, s/n*  
*Valladolid, 47011*

E-MAIL: [bego@mac.uva.es](mailto:bego@mac.uva.es)  
 WWW: <http://www.mac.cie.uva.es/~bego>

COLABORADORES: Isaías Alonso-Mallo (U. Valladolid)

Es bien conocido el fenómeno de reducción de orden que aparece al discretizar una ecuación en derivadas parciales mediante el método de líneas y utilizando integradores con etapas. Técnicas eficientes para evitar o disminuir dicha reducción de orden en problemas parabólicos lineales han sido desarrolladas en trabajos anteriores. Aquí nos proponemos estudiar los resultados que se obtienen al intentar generalizar dicha técnica a problemas semilineales. Planteamos las dificultades del análisis en el caso no lineal así como las posibilidades de calcular debidamente las fronteras de las etapas para evitar la reducción de orden. Nos centraremos en el caso de métodos Rosenbrock por ser integradores muy adecuados para problemas semilineales. Se mostrarán algunos resultados muy alentadores al respecto, que mejoran otras técnicas de integración temporal sugeridas en la literatura.

---

### Sesión XA3: Electrónica y comunicaciones

Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: José Luis Rodríguez Marrero

---

### Histéresis en la conducta oscilatoria de un circuito electrónico tridimensional

Javier Ros Padilla  
*Universidad de Sevilla*  
*Escuela Universitaria Politécnica,*  
*c/Virgen de África nº 7*  
*Sevilla, 41011*

E-MAIL: [jros@platero.eup.us.es](mailto:jros@platero.eup.us.es)

COLABORADORES: Emilio Freire Macías (U. de Sevilla), Enrique Ponce Núñez (U. de Sevilla)

El modelado de sistemas dinámicos no lineales por medio de sistemas lineales a trozos es especialmente adecuado en algunos casos experimentales, tales como osciladores o sistemas de control (véase [2]).

Se analiza aquí una situación genérica en sistemas continuos tridimensionales lineales a trozos, con tres zonas y simetría respecto del origen, que da lugar al nacimiento de un ciclo límite a partir de un centro. Para el análisis se utiliza la técnica de las ecuaciones de cierre empleada en [1] para el caso plano y descrita ampliamente en [3].

Como aplicación de los resultados se estudia un oscilador electrónico tipo Van der Pol, determinando la existencia de un ciclo límite que bifurca en función de los parámetros del circuito. Se analiza cómo, al mover los parámetros, dicha bifurcación puede ser de tipo subcrítico o supercrítico. Se obtiene la existencia de un parámetro adimensional cuyo signo determina el carácter de la bifurcación. Se prueba la existencia de un valor de transición. Asociado a esta situación se comprueba la aparición de un fenómeno de histéresis.

1. Freire E., Ponce E., Ros J., Limit Cycle Bifurcation from Center in Symmetric Piecewise-Linear Systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 9, No. 5, 895-907 (1999).
2. Carmona, V., Freire E., Ponce E., Torres F., On Simplifying and Classifying Piecewise-Linear Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 49, No. 5, 609-620 (2002).
3. Ros, J., Estudio del Comportamiento Dinámico de Sistemas Autónomos Tridimensionales Lineales a Trozos, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (2003).

---

### Realización, simulación y control del circuito de Chua

Damián Ginestar Peiró  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*Universidad Politécnica de Valencia*  
*Camino de Vera, S/N*  
*Valencia, 46022*

E-MAIL: [dginesta@mat.upv.es](mailto:dginesta@mat.upv.es)  
 WWW: <http://ttt.upv.es/~dginesta>

COLABORADORES: José Luís Hueso Pagoaga (U. Politécnica de Valencia), Jaime Riera Guasp (U. Politécnica de Valencia)

El circuito de Chua es un dispositivo electrónico no lineal sencillo que ha sido estudiado por la variedad de comportamientos complejos que presenta [1], [2], [3].

Está constituido por dos condensadores, una autoinducción, una resistencia lineal y un elemento resistivo no lineal, que se puede implementar utilizando dos amplificadores operacionales [4]. Como estos elementos son de uso corriente, podemos construir fácilmente un sencillo dispositivo experimental con el que, a partir del análisis de su funcionamiento, podemos adentrarnos en el estudio de las características propias de los sistemas caóticos.

En este trabajo comenzamos describiendo una realización del circuito mediante componentes electrónicos comerciales. El análisis experimental de distintas configuraciones del mismo, a partir de las que reproducimos tanto órbitas estables, ciclos límite, atractores de tipo Rössler y el atractor *Double Scroll*, característico de este circuito, se compara con la simulación numérica de estos comportamientos.

Finalmente, se ha abordado el estudio experimental y la simulación del control de circuito de Chua, mediante un circuito difusivo que actúa sobre uno de los condensadores del circuito. Se han hecho distintos ensayos para distintas configuraciones del circuito y para distintos valores del factor de acoplamiento [5].

- [1] T. Matsumoto, *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-31, No 12, 1055-1058, (1984).
- [2] G. Zhong, F. Ayrom, *Periodicity and Chaos in Chua's Circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-32, No 5, 501-503, (1985).
- [3] L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, *The Double Scroll Family*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-33, No 11, 1073-1118, (1986).
- [4] M.P. Kennedy, *Robust OP AMP Realization of Chua's Circuit* Frequenz, Vol 46, No 3-4, 66-80, (1992).
- [5] N.F. Rulkov, H.D.I. Abarbanel, *Tracking Unstable Orbits in Chaos Using Dissipative Feedback Control*. Phys. Rev. E, Vol 50, No1, 314-324, (1994).

## Codificación de canal usando caos

Francisco Javier Escribano Aparicio  
 Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
 Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología,  
 Universidad Rey Juan Carlos  
 c/Tulipán s/n, 28933 Móstoles

E-MAIL: [fjescribano@escet.urjc.es](mailto:fjescribano@escet.urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica>

COLABORADORES: Luis López Fernández, Miguel A. F. Sanjuán

Las señales caóticas poseen unas propiedades que las hacen potencialmente atractivas dentro del ámbito del procesamiento de señal. En tal sentido, se ha propuesto su aplicación en campos tales como la criptografía, la codificación de canal, igualación, etc., con diversa suerte. Si bien las altas expectativas puestas en estas aplicaciones del caos se han visto en muchos casos frustradas, y la explosión inicial de investigaciones ha dado paso a un menor interés, la presencia de la teoría del caos en procesamiento de señal y comunicaciones ha sido constante desde hace una década, y ha mostrado su utilidad para explicar diversos fenómenos (como la convergencia de la decodificación iterativa de los denominados turbocódigos), o para proponer nuevas vías de investigación

(como esquemas de codificación de canal que se aproximan al límite de Shannon). En la presente contribución, partimos de un esquema de codificación de canal que hace uso de los mapas caóticos y mostramos cómo, con una adecuada decodificación, dicho esquema es capaz de aproximarse a la capacidad del canal para diversos valores de la relación señal a ruido que caen dentro de la zona de interés en diversas aplicaciones de comunicaciones. Para ello, proponemos un sistema de codificación y otro de decodificación, evaluamos sus prestaciones para el caso de un canal ruidoso con ruido blanco gaussiano y aditivo, y realizamos una comparativa con otros sistemas, con y sin codificación de canal.

## Convertidores de potencia como sistemas complementarios

Carles Batlle Arnau

Departamento de Matemàtica Aplicada IV, UPC  
 EPSEVG, Av. V. Balaguer s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú

E-MAIL: [carles.batlle@upc.es](mailto:carles.batlle@upc.es)

WWW: <http://anduril.eupvg.upc.es/~carles>

COLABORADORES: Enric Fossas (Universitat Politècnica de Catalunya), I. Merillas (Universitat Politècnica de Catalunya), Alicia Miralles (Universitat Politècnica de Catalunya)

En este trabajo estudiamos algunas características del comportamiento dinámico de los convertidores de potencia conmutados, en el marco de la teoría de sistemas dinámicos complementarios (LCS). Los LCS pueden obtenerse de la siguiente manera. Sea un sistema lineal, del cual seleccionamos algunos pares de entrada/salida, o puertos,  $(u_i, y_i)$ . Para cada uno de dichos pares, imponemos que para cada tiempo  $t$  tanto  $u_i(t)$  and  $y_i(t)$  sean no-negativos, y al menos uno sea cero:

$$u_i(t) \geq 0, \quad y_i(t) \geq 0, \quad u_i(t)y_i(t) = 0, \quad \forall i, \quad \forall t.$$

Estas condiciones se denominan condiciones de complementariedad (CC), y se denotan colectivamente por

$$0 \leq u \perp y \leq 0.$$

Los pares  $(u_i, y_i)$  se denominan variables de complementariedad. Las CC son bien conocidas en programación matemática [1], aunque no normalmente en asociación con ecuaciones diferenciales. En el contexto de circuitos eléctricos, la imposición de complementariedad significa que algunos puertos se cierran con diodos ideales, con  $i_D$  y  $-v_D$  como variables de complementariedad.

Para cada par  $(u_i, y_i)$  pueden considerarse dos situaciones asociadas a las CC: o bien  $u_i = 0$  y  $y_i \geq 0$ , o bien  $y_i = 0$  y  $u_i \geq 0$ . En terminología de ingeniería eléctrica, los diodos pueden estar en conducción o corte. Con  $p$  diodos, hay  $2^p$  posibilidades, y se dice que el sistema puede estar en uno de esos  $2^p$  modos.

En el caso de convertidores de potencia existen, además de los diodos ideales, algunos interruptores (ideales) que se pueden abrir o cerrar según una ley de control. Los interruptores ideales no disipan ni almacenan energía, y por lo tanto el producto de corriente y voltaje es cero,  $i_S v_S = 0$ . Esto recuerda a las CC; sin embargo, en este caso no se verifican, en general, las condiciones de no-negatividad (aunque ciertas realizaciones físicas del interruptor las pueden imponer parcialmente). La teoría general de LCS se puede encontrar

en [2][3][4][7]; la teoría que cubre la extensión a interruptores de cuatro cuadrantes se puede encontrar en [5]. En este trabajo analizamos algunos aspectos de la dinámica de los convertidores más simples para una configuración de interruptores dada; de esta forma tan sólo consideraremos los cambios asociados al estado del diodo y podremos tratar el sistema en el marco LCS.

Puesto que algunas variables de complementariedad tienen relaciones funcionales con variables de estado, la evolución de estas últimas puede llevar a las primeras a anularse, tras lo cual no pueden disminuir más sin violar las CC. Esto puede forzar un salto en alguna de las otras variables de complementariedad de manera que el campo vectorial adquiera el signo correcto. Para un número arbitrario de pares de complementariedad este proceso debe solucionarse, en general, con métodos numéricos, tales como los algoritmos de Lemke o de Murty [1], en conjunción con esquemas implícitos de integración numérica [2]. Sin embargo, para un único par, *i.e.* un único diodo, se pueden obtener resultados analíticos y es posible dar condiciones precisas en el espacio de estados para que se produzca el mencionado salto. En general, el salto en una variable de complementariedad fuerza a su conjugada a permanecer igual a cero durante un intervalo, y una variable de estado (o combinación de las mismas) igual a constante. En la literatura de convertidores de potencia [6], esta situación se conoce como modo de conducción discontinua (DCM). En general, el DCM dura hasta que se produce un cambio en la configuración de interruptores, o hasta que la variable de complementariedad que ha experimentado la discontinuidad retorna a cero debido a la dinámica del resto de variables de estado.

La forma general de un LCS es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + E, \\ y &= Cx + Du + F, \end{aligned}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ . Las  $y, u$  son  $p$  pares de variables de complementariedad

$$0 \leq y \perp u \geq 0,$$

y  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son matrices y vectores constantes de dimensiones adecuadas. Si se permite la presencia de interruptores, la no-negatividad debe ser relajada en diversos grados y se obtiene un sistema complementario de conos (CCS)[5].

El formalismo se puede aplicar a los convertidores dc-dc básicos (*boost, buck, buck-boost* y Čuk) [6]. Se introducen variables de puerto ( $v_D, i_D$ ) y ( $v_S, i_S$ ) para el diodo y para el interruptor y se consideran interruptores de dos cuadrantes ( $i_S \geq 0$  pero  $v_S$  sin restricción). El modelo será así, para una configuración arbitraria de interruptores, un CSS. Una vez se ha seleccionado el estado del interruptor ( $S$  abierto *i.e.*  $i_S = 0$  o  $S$  cerrado *i.e.*  $v_S = 0$ ), las variables del interruptor se pueden eliminar y resulta un LCS con las variables del diodo.

En este trabajo presentamos y demostramos un teorema general que permite calcular las condiciones para que se dé un DCM, y lo aplicamos a los convertidores mencionados. Se llevan a cabo algunas simulaciones y se discuten posibles extensiones.

1. Billups, S.C., and K.G. Murty, Complementarity problems, *J. of Computational and Appl. Math.* **124**, pp. 303-318, 2000.
2. Amlibel, M.K., *Complementarity methods in the analysis of piecewise linear dynamical systems*, PhD thesis, Tilburg University, 2001.

3. Heemels, W.P.M.H., M.K. amlibel, and J.M. Schumacher, On the dynamic analysis of piecewise-linear networks, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I* **49**, pp. 315-327, 2002.
4. Amlibel, M.K., W.P.M.H. Heemels, and J.M. Schumacher, On linear passive complementarity systems, *European Journal of Control* **8**, pp. 220-237, 2002.
5. Amlibel, M.K., W.P.M.H. Heemels, A. van der Schaft, and J.M. Schumacher, Switched networks and complementarity, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I* **50**, pp. 1036-1046, 2003.
6. Erickson, R.W., *Fundamentals of Power Electronics*, Kluwer, 1997.
7. Leenaerts, D.M.W., and W.M.G. van Bokhoven, *Piecewise linear modelling and analysis*, Kluwer, 1998.

## Sesión XA4: Caos en sistemas hamiltonianos

Miércoles, 2 de junio (10:30-11:50)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: Miguel Ángel F. Sanjuan

### Cálculo numérico del *scattering map*

Pablo Roldán Gonzalez  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Departament de Matemàtica Aplicada I, ETSEIB*  
*Av. Diagonal 647 08028 Barcelona*

E-MAIL: [Pablo.Roldan@upc.es](mailto:Pablo.Roldan@upc.es)

COLABORADORES: Amadeu Delshams (U. Politècnica de Catalunya), Rafael de la Llave (U. of Texas at Austin)

En 1964, V.I. Arnol'd presentó un ejemplo de sistema Hamiltoniano casi integrable con algunas trayectorias que exploran grandes zonas del espacio de fases. El conjunto de estas trayectorias es excepcional según el teorema KAM, el cual dice que, para la mayoría de condiciones iniciales, la órbita correspondiente permanece en un toro invariante.

Este fenómeno, generalmente llamado "difusión" en teoría de sistemas dinámicos, ha recibido mucha atención desde entonces, en parte motivada por aplicaciones. Los matemáticos han intentado probar que este fenómeno acontece para una amplia clase de sistemas dinámicos. Recientemente, Delshams, de la Llave y Seara han probado esto para una clase de Hamiltonianos casi integrables *a priori* inestables. Su construcción consta de dos ingredientes principales: variedades normalmente hiperbólicas, y el *scattering map* definido en ellas.

En esta charla se presentará el concepto de *scattering map*, se discutirá un método numérico para calcularlo y se presentarán algunos resultados para ejemplos concretos.

## Análisis multifractal en el estudio de la estructura caótica de sistemas hamiltonianos

Rosa María Benito Zafrilla

*Universidad Politécnica de Madrid*

*E.T.S.I. Agrónomos,*

*Departamento de Física y Mecánica Fundamentales y Aplicadas a la Ingeniería Agroforestal*

*Ciudad Universitaria s/n, Madrid, 28040*

E-MAIL: [rbenito@fis.etsia.upm.es](mailto:rbenito@fis.etsia.upm.es)

COLABORADORES: Juan Carlos Losada González (U. Autónoma de Madrid), Ana Tarquis Alonso (U. Politécnica de Madrid) y Florentino Borondo Rodríguez (U. Autónoma de Madrid).

Existen diferentes técnicas matemáticas para estudiar la complejidad de distintos fenómenos físicos. Muchos de estos fenómenos complejos que ocurren en la naturaleza, como turbulencias, formación de estructuras, etc., se organizan de forma autosimilar o auto-afín ante cambios de escala (invariancia de escala). El estudio de las diferentes dimensiones fractales en función de los cambios de escala (formalismo multifractal), ha resultado ser una herramienta muy útil en el estudio de este tipo de sistemas. En esta comunicación se presenta una profundización en la adaptación del análisis multifractal al estudio de sistemas hamiltonianos caóticos, que nos permite relacionar características topológicas del espacio de fases con la dinámica de dichos sistemas. En particular se presenta el análisis multifractal del mapa de frecuencias de un sistema molecular. El mapa de frecuencias (relación de frecuencias fundamentales de cada uno de los puntos del espacio de fases) permite caracterizar el comportamiento dinámico del sistema en función de distintos parámetros (energía, condiciones iniciales, etc.). Se ha estudiado una pequeña franja del espacio de fases, correspondiente a la frontera orden-caos, en función de la energía total del sistema. En esta región, según el teorema KAM, se produce la destrucción de los toros regulares (caracterizados por sus frecuencias fundamentales), apareciendo una estructura fractal (cantoro) antes de pasar al régimen caótico. El primer resultado importante es que el mapa de frecuencias en esta franja del espacio de fases presenta espectro multifractal, lo que indica la presencia de diferentes estructuras topológicas, como son toros regulares, trayectorias caóticas y diferentes cantoros que imprimen la naturaleza fractal. Se ha comprobado cómo la representación de las amplitudes de los espectros multifractales a distintas energías permite visualizar de una forma muy clara la destrucción de toros predicha por el teorema KAM, ya que las diferentes variaciones de dimensiones fractales implican las diferentes presencias de cantoros. Además se observa una clara invariancia de esta representación ante el cambio de escala de la energía. Se ha realizado hasta tres cambios de escala o *zooms* en la representación de las amplitudes de los espectros multifractales, obteniendo resultados muy similares. Todo ello nos permite poner de manifiesto las diferentes leyes de escala que rigen los procesos de pasar del régimen regular al caótico en nuestro sistema.

## Estudio de la sensibilidad de ODEs y DAEs mediante métodos de Taylor: aplicación en indicadores de caos

Roberto Barrio Gil

*GME, Departamento de Matemática Aplicada*

*Universidad de Zaragoza,*

*Edificio de Matemáticas*

*Zaragoza, 50009*

E-MAIL: [rbarrio@posta.unizar.es](mailto:rbarrio@posta.unizar.es)

WWW: <http://gme.unizar.es>

Recientemente un gran número de investigadores se ha dedicado al estudio de la sensibilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales algebraicas con respecto a las condiciones iniciales del problema o con respecto a algún otro parámetro. La principal motivación de estos estudios viene de los modelos matemáticos utilizados para investigar fenómenos físicos en los que algunos parámetros no se conocen con exactitud. Asimismo, otras disciplinas, como en optimización y en sistemas dinámicos (determinación de exponentes de Lyapunov, ...), precisan de la determinación de sensibilidades con respecto de las condiciones iniciales del problema.

En nuestra comunicación presentamos un esquema numérico de cálculo de sensibilidades basado en el método de Taylor. Para ello, el método de Taylor es utilizado siguiendo un esquema de orden y paso variable y se generalizan los algoritmos de diferenciación automática. Todo esto nos permite calcular numéricamente las series de Taylor que nos dan los valores de la sensibilidad.

Finalmente, introducimos el anterior esquema numérico en el contexto de la detección rápida del caos en sistemas dinámicos, en particular utilizando el método denominado OFLI (*Orthogonal Fast Lyapunov Indicator*, desarrollado recientemente en [1]).

1. E. Lega and C. Froeschlé, *On the relationship between fast lyapunov indicator and periodic orbits for symplectic mappings*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 81, 129-147 (2001).

---

## Caracterización de la inestabilidad local en un Hamiltoniano 3D

Juan Carlos Vallejo Chavarino

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*

*Universidad Rey Juan Carlos*

*Tulipán, s/n,*

*28933 Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [Juan.Carlos.Vallejo@esa.int](mailto:Juan.Carlos.Vallejo@esa.int)

WWW: <http://www.urjc.es>

COLABORADORES: J. Aguirre (URJC), M.A.F. Sanjuán (URJC)

El estudio de la estabilidad orbital y de los diversos dominios ordenados y caóticos en sistemas dinámicos tridimensionales conlleva diversas dificultades debido al número de grados de libertad que presentan sus espacios de fases. Sin embargo, precisamente por esta causa, encontramos en ellos varios comportamientos que aparecen en los sistemas reales y que no están presentes en sistemas de inferior número de dimensiones. Diversas técnicas, tales co-



mo el estudio de las distribuciones de exponentes finitos de Lyapunov, el cálculo de órbitas periódicas y el estudio de la caoticidad local en los diversos dominios encontrados, se han aplicado al estudio del Hamiltoniano  $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2) - \epsilon xz^2 - \eta yz^2$ . Ya que este hamiltoniano preserva muchas propiedades de sistemas galácticos triaxiales más reales, los resultados obtenidos son directamente aplicables a estos sistemas de galaxias.

---

## Sesión XB1: Control y optimización II

Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)

Aula 1.2

Modera: Henar Herrero

---

### Programación dinámica Lipschitz continua: aplicación a la explotación óptima de recursos renovables

José María Maroto Fernández

*Universidad Complutense de Madrid*

*DPTO de Estadística e Investigación Operativa II,*

*Campus de Somosaguas*

*28223 Madrid*

E-MAIL: [jmmaroto@ucmail.ucm.es](mailto:jmmaroto@ucmail.ucm.es)

COLABORADORES: Manuel Morán Cabré (U. Complutense de Madrid)

Existen problemas relevantes en la literatura de crecimiento económico y de explotación óptima de recursos renovables que presentan rendimientos crecientes en la función objetivo y/o en la función de producción (función de crecimiento de la biomasa). En presencia de rendimientos crecientes (no concavidades) en la economía, los supuestos estándar de la programación dinámica clásica fallan. Debido a la incapacidad de la programación dinámica clásica para superar las barreras matemáticas que conlleva la presencia de no concavidades en la economía, proponemos un nuevo marco teórico, alternativo a la programación dinámica clásica, que permite analizar problemas económicos en presencia de rendimientos crecientes. Demostraremos que, si los elementos de un problema estándar de programación dinámica (determinista o estocástica) satisfacen supuestos no restrictivos de Lipschitz continuidad, entonces la función valor es Lipschitz continua. La principal consecuencia de este resultado es que la función valor y la correspondencia de política óptima son numéricamente computables. Proponemos un algoritmo discretizado para la estimación numérica de la función valor y la correspondencia de política óptima, obteniendo la tasa de convergencia del mismo. Por tanto, se amplía el campo de aplicación del principio de optimalidad de Bellman a problemas con presencia de rendimientos crecientes, proporcionando un soporte teórico a todos estos problemas, así como a algunos experimentos numéricos que han aparecido recientemente en la literatura. Como aplicación de estos resultados teóricos, proponemos un nuevo modelo bioeconómico para la explotación óptima del arenque del Mar del Norte. Debido a la presencia de rendimientos crecientes en su función de captura, esta especie ha sufrido una sobreexplotación a lo largo de la historia que la ha llevado en determinados periodos al

borde de la extinción. La existencia de ciclos en la política óptima, en lugar del tradicional estado estacionario óptimo, así como el inminente peligro de extinción que se deriva de la presencia de incertidumbre en el modelo, son las principales conclusiones que obtenemos. Finalmente, analizaremos la explotación óptima del recurso bajo un sistema de cuotas totales de captura permitida (TAC's), obteniendo ciclos, dinámicas caóticas y multiplicidad de estados estacionarios en función de la TAC utilizada.

---

### Estados extremos y dinámica asintótica de sistemas de reacción difusión

Alejandro Vidal López

*Universidad Complutense de Madrid*

*Facultad de Matemáticas,*

*Plaza de las Ciencias, 3*

*Madrid, 28040*

E-MAIL: [alejandrovidal@mat.ucm.es](mailto:alejandrovidal@mat.ucm.es)

COLABORADORES: Aníbal Rodríguez-Bernal (UCM), Jose M. Arrieta (UCM)

Las ecuaciones de reacción difusión juegan un papel muy importante en el estudio de multitud de problemas que aparecen en muy diferentes ámbitos de la ciencia como pueden ser reacciones químicas, dinámica de poblaciones, ...

En el trabajo que presentamos, nos ocupamos de ecuaciones de reacción no lineales  $u_t - \Delta u = f(x, u)$  en un dominio acotado o no, con diferentes condiciones de contorno. Daremos condiciones sobre el término de reacción que nos permitan probar la existencia de dos estados estacionarios extremos en dos sentidos: en primer lugar, cualquier otro estado estacionario se va a encontrar entre estos dos extremos; en segundo lugar, toda la dinámica del problema va a entrar de manera uniforme entre estos dos estados extremos. En particular, vamos a tener delimitado el atractor del sistema en caso de que éste exista. Para probar estos resultados usaremos métodos de monotonía. La propiedad fundamental que pediremos al término de reacción es que podamos controlarlo por dos rectas: una por arriba para la parte positiva; y otra por abajo, para la parte negativa. Esto nos va a permitir comparar el problema no lineal con dos problemas lineales y, a partir de ahí, obtener la existencia de los estados estacionarios extremos.

Como consecuencia de los métodos empleados en la resolución del problema obtendremos, además, ciertas propiedades de estabilidad para los estados estacionarios extremos. En concreto, obtendremos la estabilidad por encima del estado máximo y por debajo del mínimo.

---

### Regularidad de las soluciones extremales de algunos problemas elípticos degenerados

Manel Sanchón Rodellar

*Universidad Politècnica de Catalunya*

*Departament de Matemàtica Aplicada I,*

*Diagonal 647*

*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [Manuel.Sanchon@upc.es](mailto:Manuel.Sanchon@upc.es)

Sea  $\Omega$  un dominio regular y acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p > 1$  y

$f := [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y convexa que satisfice  $f(0) > 0$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)/t^{p-1} = +\infty$ . Consideremos el siguiente problema elíptico degenerado

$$\begin{cases} -\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_{\lambda,p})$$

donde  $\lambda > 0$ .

Este tipo de problemas aparecen en muchos modelos matemáticos: modelos de combustión, glaciología, flujo de fluidos no-Newtonianos, medios porosos,...

En estas hipótesis existe un parámetro  $\lambda^* = \lambda^*(p) \in (0, \infty)$  de manera que para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  existe una solución regular del problema  $(P_{\lambda,p})$ ,  $u_\lambda$ , que es minimal, y no existe solución para  $\lambda > \lambda^*$ .

Este tipo de problemas ha sido estudiado en numerosos artículos desde los años 70. Brezis y Vázquez [1] dejan una serie de problemas abiertos (para el caso  $p = 2$ ). Uno de ellos es estudiar la regularidad de las soluciones de  $(P_{\lambda,p})$  cuando  $\lambda = \lambda^*$ , conocidas como soluciones extremales. En [2] y [3] se hace dicho estudio para el caso  $p > 1$  y  $f(u) = e^u$ . El principal propósito de este trabajo es estudiar dicha regularidad para  $p > 1$  y  $f(u)$  arbitraria.

Entre otros, se obtienen los siguientes resultados. Para  $1 < p < 2$ ,  $u^* := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u_\lambda$  es una solución débil del problema. Si además  $N - p < 2p(1 + \sqrt{2-p})/(p-1)$ , entonces  $u^*$  resulta ser una solución regular. En particular, si  $1 < p < 2$  y  $N \leq 6$ , entonces  $u^*$  es una solución regular.

Para el caso  $p \geq 2$  se obtienen otros resultados sobre la existencia y regularidad de una solución extremal bajo una condición adicional.

1. H. Brezis and J.L. Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997), 443-469.
2. J. García and I. Peral, *On an Endem-Fowler type equation*, Nonlinear Anal. **18** (1992), 1085-1097.
3. J. García, I. Peral and J.P. Puel, *Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 481-498.

---

## Algunos resultados de controlabilidad para un modelo de campo de fases con un único control

Rosario Pérez García  
 Universidad de Sevilla  
 Facultad de Matemáticas,  
 Apto. de Correos 1160  
 Sevilla, 41080

E-MAIL: rosariopg@us.es

COLABORADORES: Manuel González Burgos (U. de Sevilla)

En este trabajo consideramos un modelo no lineal de campo de fases que generaliza el modelo de Gagnalp (véase [1]): suponemos que un material que puede presentarse en dos fases diferentes, por ejemplo sólido y líquido, ocupa una región  $\Omega$  del espacio  $\mathbb{R}^N$ . Sea  $T_M$  la temperatura de fusión (que se supone constante) en el equilibrio, es decir, la temperatura a la que sólido y líquido pueden coexistir en equilibrio separados por una interfase  $\Gamma(t)$ . Se define entonces la función  $T = T(x, t)$  (resp. la función  $u(x, t) = T(x, t) - T_M$ ) como la temperatura (resp. la temperatura reducida) en  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ , donde  $T > 0$  es un instante de tiempo

arbitrario. El modelo no lineal que consideramos aproxima la interfase  $\Gamma(t)$  mediante una nueva función  $\phi$  (parámetro de fase). Esto conduce a considerar un sistema parabólico no lineal acoplado.

Presentamos aquí nuevos resultados de controlabilidad para este modelo no lineal cuando ejercemos un único control distribuido (con soporte en un pequeño abierto  $\omega$ ) en la ecuación de la temperatura  $u$ . Las no linealidades consideradas son de la forma  $f(u, \nabla u)$ , en la ecuación de la temperatura, y de la forma  $h(\phi)$ , en la ecuación del parámetro de fase  $\phi$ , y permitimos que tengan un determinado crecimiento superlineal en el infinito.

Supongamos que  $f(s, p) = g(s, p)s + G(s, p) \cdot p$ . Demostraremos un resultado de controlabilidad exacta a cero para el modelo considerado bajo las hipótesis

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|g(s, p)|}{\log^{3/2}(1 + |s|)} = 0, & \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|G(s, p)|}{\log^{1/2}(1 + |s|)} = 0 \\ \text{y } \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|h(s)|}{|s| \log^{3/2}(1 + |s|)} = 0 \end{aligned}$$

(los dos primeros límites, uniformes en  $p$ ). La prueba de este resultado utiliza desigualdades globales de Carleman para un sistema parabólico acoplado junto con una técnica de construcción de controles regulares introducida en [2]. Los resultados de controlabilidad demostrados generalizan, en particular, los obtenidos en [3].

1. G. Caginalp, *An analysis of a phase field model for a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. **92** (1986), pp. 205-245.
2. O. Bodart, M. González-Burgos, R. Prez-Garca, *Insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **335** (2002), pp. 677-682.
3. F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, I. Kostin, *Controllability to the trajectories of phase field models by one control force*, aceptado en SIAM J. Control Optim.

---

## Sesión XB2: Sistemas forzados

Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)

Aula 2.2

Modera: Mario Floria

---

### Efectos del ruido aditivo en un sistema biestable forzado con una señal bicromática

José Pablo Baltanás Illanes  
 Universidad Rey Juan Carlos  
 Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza,  
 c/Tulipán, s/n  
 28933 Móstoles (Madrid)

E-MAIL: baltanas@escet.urjc.es

COLABORADORES: Jesús Casado Pascual (U. de Sevilla)

Se considera el movimiento en el régimen sobreamortiguado de una partícula en un potencial biestable, sometida a la acción de una fuerza bicromática en presencia de ruido aditivo, dentro del contexto de la resonancia vibracional. Este fenómeno presenta ciertas analogías con el ampliamente estudiado de la resonancia estocástica. Aunque el primero de ellos puede ser observado en principio en un sistema puramente determinista, cierto nivel de ruido está presente en la mayoría de sistemas físicos, lo cual plantea la necesidad de estudiar los efectos del ruido en la resonancia vibracional. Éste es el objetivo de la presente comunicación. En particular, bajo ciertas condiciones, se obtienen expresiones analíticas para los observables que usualmente se emplean para cuantificar el fenómeno de la resonancia vibracional. Estos resultados teóricos se comparan con los obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del sistema. Finalmente, se discuten los límites de validez de la aproximación teórica empleada.

---

### **Rocking: un nuevo mecanismo de excitación de patrones en sistemas autooscilantes**

Manuel Francisco Martínez Quesada  
*Universitat de Valencia*  
*Departament de Òptica, Facultat de Física*  
*c/Dr Moliner, 50*  
*46100, Burjassot (Valencia)*

E-MAIL: [manuel.martinez-quesada@uv.es](mailto:manuel.martinez-quesada@uv.es)

COLABORADORES: Germán J. de Valcárcel Gonzalvo (U. Valencia), Kestutis Staliunas (ICREA, U. Politècnica Catalunya)

Los sistemas extensos autooscilantes exhiben resonancias cuando son forzados a frecuencias múltiplos racionales de la frecuencia natural del sistema. Entre tales forzamientos, uno de los más estudiados consiste en someter al sistema a una modulación de sus parámetros de frecuencia doble al de la oscilación natural (resonancia 2:1). Una propiedad clave en este tipo de situaciones consiste en que la fase de las oscilaciones sólo puede tomar dos valores, separados por  $\pi$ , lo cual es fácilmente entendible mediante argumentos de simetría. Cerca de la bifurcación, es posible describir genéricamente este tipo de forzamiento mediante una ecuación de Ginzburg-Landau compleja (CGL) para la amplitud de las oscilaciones, generalizada por la adición de un término proporcional al complejo-conjugado de dicha amplitud. Tal ecuación exhibe la biestabilidad de fase antes mencionada y predice la existencia, entre otros, de paredes de dominio, estructuras laberínticas, patrones periódicos y estructuras localizadas (solitones espaciales). Experimentos de tal tipo han sido llevados a cabo, por ejemplo, en reactores químicos autooscilantes, demostrando los comportamientos descritos.

En esta comunicación se presenta un nuevo tipo de forzamiento [1], que hemos denominado *rocking* por razones que se explicarán. Consiste en el forzamiento biperiódico de un sistema autooscilante de forma que las dos frecuencias sean próximas a la natural (resonancia 1:1). En tal caso, cerca de la bifurcación, se demuestra que el sistema viene descrito por una ecuación CGL, generalizada ahora por la adición de un término oscilatorio. A partir de ella se demuestra, analítica y numéricamente, que tal tipo de forzamiento, aun siendo de naturaleza distinta al de una resonancia 2:1, es, en muchos

aspectos, equivalente a éste.

Este nuevo mecanismo de excitación de patrones, al margen de su interés desde un punto de vista fundamental, cobra especial importancia en el ámbito de la óptica no lineal, en particular, en el caso de los láseres. Ello se debe a que los láseres son inmunes a forzamientos 2:1 mientras que son altamente sensibles a forzamientos 1:1 (el clásico láser con señal inyectada).

Así, el *rocking* abre la posibilidad de excitar patrones en láseres y, en particular, solitones de cavidad. En la comunicación se presentarán resultados analíticos y numéricos obtenidos a partir de las ecuaciones que rigen un láser con inyección modulada en amplitud (ecuaciones de Maxwell-Bloch), que demuestran los comportamientos predichos. La excitación de solitones de cavidad en láseres abre la posibilidad de su empleo como sistemas de almacenamiento y procesado de la información.

1. G.J. de Valcárcel and K. Staliunas, Phys. Rev. E 67, 026604 (2003)
- 

### **Movimiento caótico en el balanceo de bloques bajo una fuerza armónica: los pilares de edificios históricos bajo la acción de un terremoto**

Florentino Borondo Rodríguez  
*Departamento de Química C-IX, Universidad Autónoma de Madrid, Cantoblanco, 28049-Madrid (Spain).*

E-MAIL: [f.borondo@uam.es](mailto:f.borondo@uam.es)

COLABORADORES: F. Prieto (Universidade do Minho)

El estudio del movimiento de balanceo de objetos rígidos es un campo de interés creciente, especialmente por su conexión con pilares arquitectónicos (columnas, torres, tanques de almacenamiento, etc.) sometidos al movimiento de terreno provocado por terremotos o vibraciones debidas a maquinaria pesada, así como de equipo en plataformas marinas de prospección.

En este trabajo se estudia un modelo plano para un cuerpo rígido situado sobre una base y ejecutando un movimiento de balanceo, de modo que su centro de rotación cambia instantáneamente entre diferentes puntos de contacto, y entonces se produce una pérdida de energía asociada a cada impacto con la base.

Los trabajos clásicos en el campo se remontan a 1881, cuando Milne [1] estudió la caída de túmulos y columnas monumentales en Japón, como indicador de los picos de aceleración de terremotos. En 1963, Housner [2] desarrolló una teoría estandar para este tipo de movimientos, en un esfuerzo por explicar la sorprendente evidencia empírica que tuvo lugar en los terremotos chilenos de 1960, en los cuales algunas torres de agua con estructura de "bola de golf sobre tee" permanecieron indemnes, mientras que otras estructuras vecinas, aparentemente más estables, fueron destruidas.

En este último contexto hay que destacar que, dependiendo del valor de los parámetros del sistema, las oscilaciones del sistema pueden ser caóticas. En este trabajo nosotros utilizamos las técnicas estándar de la dinámica no lineal para estudiar y caracterizar estos procesos.

1. Milne J. Milne, Experiments in observational seismology, Trans. Seis. Soc. Jap. 3 (1881).

- Housner W. G. Housner, The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes, Bull. Seismol. Soc. Amer **53**, 403 (1963).

### Eatabilización de solitones vectoriales para un sistema de $N$ componentes

María I. Rodas Verde

Universidade de Vigo  
Facultade de Ciencias de Ourense, Área de Óptica,  
Campus As Lagoas s/n,  
Ourense, 32004

E-MAIL: mrodas@uvigo.es

WWW: <http://optics.uvigo.es>

COLABORADORES: Humberto Michinel Álvarez (U. Vigo),  
José Ramón Salgueiro Piñeiro (U. Vigo)

Se ha generalizado el concepto de solitón vectorial estabilizado para el caso de un sistema de  $N$ -componentes. Se ha analizado la estabilidad de esta nueva clase de estructuras en el plano y sus aplicaciones potenciales tanto en condensados de Bose-Einstein como en óptica no lineal.

Para ello se ha derivado un conjunto de ecuaciones variacionales que permiten realizar un estudio simplificado de las ecuaciones en derivadas parciales. El resultado final de los cálculos indica que los solitones vectoriales estabilizados interactúan entre sí a través de potenciales centrales, dando lugar a un problema de  $N$ -cuerpos de mecánica clásica. En el plano transversal a la propagación se producen interacciones de diversos tipos que incluyen la deflexión, colisiones y captura en órbitas cerradas. Se ha realizado un estudio comparativo entre los resultados obtenidos mediante el método variacional y los obtenidos numéricamente.

### Sesión XB3: Sistemas integrables en dinámica

Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)

Iglesia de San Pedro Mártir

Moderador: Jaume Llibre

#### Polynomial systems having a given Darbouxian function as a first integral or as an integrating factor

Chara Pantazi

Universitat Autònoma de Barcelona,  
Departament de Matemàtiques, Edifici C,  
08193 Bellaterra (Barcelona)

E-MAIL: [hpant@mat.uab.es](mailto:hpant@mat.uab.es)

COLABORADORES: Jaume Llibre (U. Autònoma de Barcelona)

The first integrals of a 2-dimensional differential system allow to describe the global phase portrait of such systems. So, to characterize when a 2-dimensional differential system has a first integral is one of the main tasks of the qualitative theory of 2-dimensional differential systems.

There is a class of functions called the Darbouxian functions. The Darbouxian theory of integrability allows to determine when a polynomial differential system in  $\mathbb{C}^2$  has a first integral or an integrating factor given by a Darbouxian function.

A Darbouxian function is of the form  $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \exp(g/f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s})$ , where the polynomial  $g$  of  $\mathbb{C}[x, y]$  is coprime with the irreducible polynomials  $f_1, \dots, f_s$  of  $\mathbb{C}[x, y]$ ,  $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $s \in \{1, \dots, p\}$  and  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  for  $i = 1, \dots, p$ .

Here, we consider the inverse problem, i.e. we characterize the polynomial vector fields in  $\mathbb{C}^2$  having a given Darbouxian function either as a first integral or as an integrating factor. We investigate the relation between the degree of the polynomial differential system and the degrees of the invariant algebraic curves  $f_i = 0$  and of the rational function  $g/f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$ . In fact, we pay special attention to the case where the invariant algebraic curves  $f_i = 0$  are generic. Additionally, in this generic case we show that all polynomial vector fields have Darbouxian integrals.

- C. Christopher and J. Llibre, *Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems*, Annals of Differential Equations **16** (2000), 5–19.
- C. J. Christopher, J. Llibre, C. Pantazi and X. Ziang, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Physics A: Gen. Math. **35** (2002), 2457–2476.
- G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. math. 2ème série **2** (1878), 60–96; 123–144; 151–200.
- J. Llibre and C. Pantazi, *Polynomial differential systems having a given Darbouxian first integral*, preprint 2003.

#### Ecuaciones diferenciales lineales e integrabilidad para sistemas en el plano

Maite Grau Montaña

Universitat de Lleida,  
Departament de Matemàtica, E.P.S.,  
Avda. Jaume II, 69  
25001 Lleida

E-MAIL: [mtgrau@matematica.udl.es](mailto:mtgrau@matematica.udl.es)

COLABORADORES: Hector Giacomini (U. Tours), Jaume Giné (U. Lleida)

La finalidad de este trabajo es estudiar la integrabilidad de sistemas dinámicos diferenciales en el plano, de tipo polinomial. Esta clase de sistemas aparece en la modelización de un gran número de fenómenos naturales en varias ramas de la ciencia, tales como la química, la biología, la mecánica, la electrónica, la mecánica de fluidos, etc.

El resultado obtenido permite encontrar una expresión explícita para una integral primera de un cierto tipo de sistema polinomial, véase (1). Esta integral primera se construye a partir de dos soluciones independientes de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Consideramos sistemas diferenciales polinomiales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_2(x) \left( g_0(x, y) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) - g_1(x, y) \frac{\partial g_0}{\partial y}(x, y) \right), \\ \dot{y} &= A_0(x) g_1^2(x, y) + A_1(x) g_1(x, y) g_0(x, y) \\ &\quad + A_2(x) g_0^2(x, y) + \\ &\quad + A_2(x) \left( g_1(x, y) \frac{\partial g_0}{\partial x}(x, y) - g_0(x, y) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$  y  $g_j(x, y)$ ,  $j = 0, 1$ , son polinomios arbitrarios con coeficientes reales, y denotamos por  $\dot{\phantom{x}} = d/dt$  la derivación respecto a la variable independiente. Sea  $g(x, y) = g_0(x, y)/g_1(x, y)$  y supongamos que  $\partial g/\partial y \neq 0$ . Mediante un cambio racional de variable, que involucra la fracción racional  $g(x, y)$ , hacemos corresponder al sistema (1) la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$A_2(x) w''(x) + A_1(x) w'(x) + A_0(x) w(x) = 0, \tag{2}$$

donde  $w'(x) = dw(x)/dx$  y  $w''(x) = dw'(x)/dx$ .

Dado un sistema polinomial en el plano  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$ , sea  $d$  el máximo de los grados de  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$ . Diremos que la función real no constante  $f(x, y)$  es un invariante para el sistema polinomial si existe un polinomio  $k(x, y)$  de grado a lo sumo  $d-1$  tal que  $P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = k f$ . En este caso, el polinomio  $k(x, y)$  se denomina cofactor de  $f(x, y)$ .

Probamos que el sistema (1) posee un invariante relacionado con una solución no nula arbitraria  $w(x)$  de (2). En caso que  $w(x)$  sea un polinomio se obtiene una curva invariante algebraica.

Además, damos una expresión explícita de una integral primera para el sistema (1) que no es, en general, una función Liouvillian. Esta integral primera se construye a partir de dos soluciones independientes de (2).

Finalmente, comprobamos que todos los ejemplos conocidos de familias de sistemas cuadráticos con una curva algebraica invariante de grado arbitrariamente alto pueden ser descritos por esta construcción (módulo transformaciones birracionales). En particular, para uno de los primeros ejemplos de este tipo de familias, el ejemplo dado por Moulin-Ollagnier usando Álgebra Enumerativa, encontramos una manera sencilla de describir la familia y damos la forma explícita de su integral primera que involucra funciones de Bessel.

De forma análoga, describimos familias de sistemas polinomiales planos que provienen, mediante un cambio del mismo tipo, de una ecuación diferencial polinomial lineal de orden 1,  $A_1(x)w'(x) + A_0(x) = 0$ . Damos una expresión explícita de una integral primera del sistema, que es este caso siempre es una función Liouvillian.

Como ejemplo, observamos que una familia completa de centros de sistemas cuadráticos pertenece a esta descripción.

## Nuevas soluciones de las ecuaciones de Jacobi para sistemas Hamiltonianos generalizados

Benito Hernández Bermejo  
*E.S.C.E.T., Edificio Departamental II*  
*Campus de Móstoles, C/Tulipán S/N*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*28933-Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [bhernandez@escet.urjc.es](mailto:bhernandez@escet.urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~matemati/benito/benito.html>

Los sistemas dinámicos de Poisson son una generalización de los sistemas Hamiltonianos clásicos. Tienen la forma  $\dot{x} = J \cdot \nabla H$ , donde  $H$  es el Hamiltoniano y  $J$  es la denominada matriz de estructura, que está caracterizada por dos propiedades: (1) es antisimétrica; y (2) cumple las identidades de Jacobi, que son el siguiente conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas:  $\sum_{i=1}^n (J_{li} \partial_l J_{jk} + J_{lj} \partial_l J_{ki} + J_{lk} \partial_l J_{ij}) = 0$ , donde las  $J_{ij}$  son las entradas de dicha matriz. La gran potencia de los sistemas de Poisson está en que suponen una generalización muy amplia de los sistemas Hamiltonianos clásicos (dado que por ejemplo permiten sistemas de dimensión impar, y aun en el caso de dimensión par engloban una variedad de sistemas mucho mayor) mientras que el carácter Hamiltoniano de la dinámica se preserva (Teorema de Darboux). Los sistemas de Poisson también presentan propiedades muy generales en otros aspectos, ya que por ejemplo todo cambio diferenciable de las coordenadas es una transformación canónica (es decir preserva el formato de sistema de Poisson). Entre los problemas no resueltos relativos a los sistemas de Poisson destaca el de identificar y escribir un sistema dado como estructura de Poisson. La dificultad principal es encontrar una matriz de estructura apropiada, ya que para ello es necesario encontrar una solución adecuada de las ecuaciones de Jacobi. Lo más habitual en la práctica viene siendo proceder mediante *ansatz* sencillos y comprobar si llevan a posibilidades válidas, a falta de un conocimiento adecuado de familias suficientemente amplias de soluciones de dichas ecuaciones. Este trabajo presenta un enfoque alternativo, que considera a las ecuaciones de Jacobi como un problema *per se*. De esta forma se han obtenido familias de soluciones muy generales que engloban *ansatz* anteriores, de manera que sistemas de Poisson ya conocidos, y hasta ahora aparentemente inconexos, resultan ser casos particulares de estructuras mucho más generales. A menudo esto ha permitido, además, desarrollar métodos comunes para la caracterización global de propiedades independientes del Hamiltoniano, tales como la estructura simpléctica y la forma canónica de Darboux.

## Simetrías y reducciones en un problema de Störmer generalizado

Víctor Lanchares Barrasa  
 Universidad de La Rioja  
 Dpto. Matemáticas y Computación,  
 c/ Luis de Ulloa, s/n  
 Logroño, 26004

E-MAIL: vlanca@dmc.unirioja.es

COLABORADORES: M. Iñarrea Las Heras (U. La Rioja), J. Palacián Subiela (U. Pública de Navarra), A.I. Pascual Lería (U. La Rioja), J.P. Salas Ibarra (U. La Rioja), P. Yanguas Sayas (U. Pública de Navarra)

El estudio del movimiento de una partícula cargada alrededor de un planeta con magnetosfera ha sido objeto de atención por parte de físicos y astrónomos desde mitad del siglo pasado. El estudio pionero se remonta al trabajo de Störmer de 1907, donde se considera el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético dipolar (el modelo de Störmer). Este modelo proporciona buenos resultados en lo concerniente a explicar la dinámica de iones o electrones, presentes en los cinturones de radiación de los planetas con magnetosfera. Sin embargo, cuando se consideran partículas de polvo cargadas, la relación entre la carga y la masa de la misma es pequeña y el modelo puramente magnético debe ser mejorado para poder tener en cuenta el campo gravitatorio creado por el planeta, así como el campo eléctrico inducido, debido a la rotación del planeta. Este es el denominado modelo de Störmer generalizado, que denotaremos a partir de ahora por *GS*. A grandes rasgos, en el modelo *GS* la partícula de polvo está sometida a dos fuerzas que compiten entre sí: la gravitatoria y la electromagnética. El resultado de esta competición depende de la relación carga-masa de la partícula. En este sentido, la dinámica de la partícula puede ser predominantemente gravitatoria o electromagnética. En este trabajo nos centraremos en el caso en el que la dinámica es esencialmente gravitatoria, de forma que las órbitas puramente keplerianas se ven perturbadas por el efecto de las fuerzas electromagnéticas. De esta forma, el modelo *GS* queda definido a través de un hamiltoniano que es suma de un término puramente kepleriano más una perturbación en la que se considera el campo magnético dipolar y el campo eléctrico inducido. La idea básica consiste en transformar el sistema original en otro equivalente integrable y, por tanto, fácil de analizar. Esto se lleva a cabo en tres pasos. El primero consiste en realizar una normalización de Delaunay, suponiendo que la perturbación es lo suficientemente pequeña. De esta forma se introduce una nueva integral en el problema que representa básicamente el semieje mayor de las órbitas keplerianas. En segundo lugar, la simetría axial del problema nos permite reducir a uno el número de grados de libertad. Con esto, podemos identificar el nuevo espacio de fases reducido. Por último, se consideran las simetrías discretas del sistema para conseguir una total reducción del sistema en un espacio de fases totalmente reducido. Después de este proceso, el sistema reducido puede analizarse en términos de los parámetros y extraer conclusiones dinámicas en el sistema original.

## Sesión XB4: Caos I

Miércoles, 2 de junio (12:20-13:40)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: Francisco Balibrea

### Clases de universalidad y comportamiento colectivo en osciladores caóticos

Susanna C. Manrubia  
 Centro de Astrobiología, INTA-CSIC  
 Ctra. de Ajalvir km. 4  
 28850 Torrejón de Ardoz, Madrid

E-MAIL: cuevasms@inta.es  
 WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES:

Los sistemas formados por un gran número de osciladores globalmente acoplados presentan distintas clases de comportamientos colectivos. Entre ellos podemos mencionar la sincronización de todas las trayectorias de los osciladores individuales, la formación de grupos sincrónicos (*clustering*), o la aparición del llamado movimiento colectivo. Este último tipo de evolución coherente se da cuando, a pesar de que las trayectorias individuales parecen descorrelacionadas y el sistema se halla en una fase dinámica turbulenta, existe una coherencia “oculta” que se manifiesta por ejemplo en la dinámica del campo medio o del término de acoplamiento entre los osciladores.

No todos los sistemas dinámicos presentan todos los tipos de dinámica colectiva mencionados. El comportamiento del sistema depende de la clase de universalidad a la que pertenece el oscilador individual. Hasta el momento no existe una teoría completa que permita explicar esta relación, si bien un número representativo de sistemas diferentes establece equivalencias claras entre clases de universalidad y comportamiento colectivo [1]. En esta contribución veremos estas relaciones y repasaremos los resultados numéricos y analíticos derivados hasta el momento.

La clase de universalidad representada por la aplicación logística  $f(x) = 1 - ax^2$  se caracteriza por la densa presencia de ventanas periódicas y por ser la aplicación localmente contractiva, es decir,  $|f'(x)| < 1$  para algunos valores de  $x$ . Esta última característica es condición necesaria no suficiente para que se formen grupos sincrónicos (*clusters*). Sólo cuando hay órbitas periódicas presentes se observa la formación de grupos. La presencia de ventanas con dinámica periódica, por otra parte, induce correlaciones entre las trayectorias de los osciladores también en la fase turbulenta, donde no se observa sincronización. Estas correlaciones “ocultas” se traducen en una violación de la ley de los grandes números, dado que las fluctuaciones en el campo medio que acopla los diferentes elementos no decaen como  $N^{-1/2}$  para sistemas grandes formados por  $N$  osciladores. La violación de la ley de los grandes números parece ser equivalente a la presencia de orden “oculto” y a la dependencia temporal de la densidad de estados  $\mu(x; t)$ . Estas conclusiones se corroborarán a partir del comportamiento colectivo observado asimismo en la aplicación triangular (es localmente contractiva pero no tiene ventanas periódicas y no presenta *clustering*, aunque siempre se observa violación de la ley de los grandes números para sistemas suficientemente grandes), en la aplicación logarítmica (no es localmente contractiva ni tiene ventanas

periódicas, no muestra *clustering* y posee varios tipos de orden “oculto”), en un sistema de aplicaciones en diente de sierra no lineales y finalmente en conjuntos de osciladores de Rössler (en la clase de universalidad de la aplicación logística y por tanto dinámicamente equivalentes a ésta).

1. S.C. Manrubia, A.S. Mikhailov, and D.H. Zanette (2004), *Emergence of Dynamical Order. Synchronization phenomena in complex systems*. World Scientific Lecture Notes in Complex Systems, vol. 2.

---

### Control de transitorios caóticos en entornos ruidosos

Jacobo Aguirre Araujo  
*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*c/ Tulipán s/n, 28933 Mostoles, Madrid, España*

E-MAIL: [jaguirre@escet.urjc.es](mailto:jaguirre@escet.urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: Francesco d’Ovidio (Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados), Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

En el presente trabajo nos fijamos en un problema que se enmarca en el contexto del control de caos. Esta disciplina nació a principios de los años 90, y desde entonces ha dado numerosos resultados tanto en el ámbito teórico como experimental. Nuestro objetivo es mostrar que la incertidumbre asociada a la dinámica no lineal a veces puede ser controlada, incluso cuando el ruido del sistema es mayor que el control al que tenemos acceso.

En definitiva, utilizamos un entorno obtenido de la teoría de juegos para mostrar, por primera vez, que es posible controlar transitorios caóticos en entornos ruidosos incluso cuando el control que se aplica a la partícula es inferior al ruido del sistema, hasta una relación ruido/control igual a 2. A esta situación, más que “control”, deberíamos llamarla “influencia”, ya que el recorrido que sigue la partícula depende de cada caso y no puede ser prefijado a voluntad.

Consideramos la aplicación tienda como el prototipo de un sistema caótico con escapes. Sin la acción de un control externo, una partícula que comience en la región  $[-1, 1]$  se mantendrá en su interior durante cierto tiempo, pero antes o después escapará hacia  $-\infty$ . En este trabajo mostramos analítica y computacionalmente que un control pequeño y acotado, elegido cuidadosamente, puede atrapar una órbita en la vecindad del conjunto caótico invariante, es decir, en la región  $[-1, 1]$ , incluso en la presencia de un ruido de mayor amplitud que el control permitido.

Este problema lo enfocamos como un juego matemático entre dos jugadores, llamados el protagonista y el adversario. La finalidad del protagonista es sobrevivir, manteniéndose en el terreno de juego (una región acotada) tras todos y cada uno de los pasos del juego. Lo que hace difícil la supervivencia del protagonista es que el adversario puede llevar a cabo acciones más fuertes que el protagonista. Lo que posibilita su supervivencia es (i) que la dinámica de la aplicación tienda es caótica, y (ii) que el protagonista conoce cada paso del adversario antes de aplicar su respuesta.

Los resultados son extrapolables a todos los mapas unimodales definidos en 1 dimensión, y nuestro trabajo futuro

se centra en generalizar el trabajo a sistemas más complejos, y en el análisis de las aplicaciones a series temporales.

---

### Polinomios caóticos en espacios de dimensión infinita

Félix Martínez Giménez  
*Universidad Politécnica de Valencia*  
*E.T.S.I. Agrónomos, Dep. Matemática Aplicada*  
*Camino Vera s/n*  
*Valencia, 46022*

E-MAIL: [fmarting@mat.upv.es](mailto:fmarting@mat.upv.es)

COLABORADORES: Alfredo Peris (U. Politécnica de Valencia)

Sea  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación continua; consideremos el sistema dinámico discreto  $(f, X)$ . Una de las definiciones universalmente aceptadas de función caótica es la de Devaney: se dice que  $f$  es caótica si presenta las tres propiedades siguientes

1.  $f$  es topológicamente transitiva,
2. el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  es denso en  $X$  y
3.  $f$  tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.

La propiedad de que una función sea transitiva es poco intuitiva, pero en espacios métricos sin puntos aislados se tiene que la existencia de un punto  $x \in X$  con órbita  $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$  densa implica transitividad. Esta existencia de una órbita densa se puede interpretar desde el punto de vista de la teoría de la aproximación como la existencia de un elemento cuyas iteraciones por la función  $f$  se aproximan a cualquier otro punto del espacio tanto como se desee.

La propiedad de que  $f$  posea dependencia sensible a las condiciones iniciales es conocida como efecto mariposa, es decir, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden tener consecuencias a largo plazo impredecibles. En la modelización de aplicaciones mediante sistemas dinámicos discretos cuyas condiciones iniciales estén basadas en datos empíricos, la identificación de este fenómeno es crucial, ya que las condiciones iniciales suelen acumular errores (precisión en las medidas, ...).

Nosotros probamos la existencia de polinomios caóticos en el sentido de Devaney, definidos en espacios de Banach y de Fréchet, de funciones analíticas. En particular, definimos polinomios homogéneos caóticos en el espacio de las funciones holomorfas en el disco  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ . También definimos polinomios no homogéneos caóticos en espacios de Banach de funciones analíticas. Estos resultados están relacionados con la dinámica de ciertos polinomios definidos en el plano complejo, concretamente, con el estudio de su conjunto de Julia.

---

## La mínima cantidad de caos

Alejo Barrio Blaya  
 Universidad de Murcia  
 Facultad de Matemáticas,  
 Campus Universitario de Espinardo  
 Murcia, 30100

E-MAIL: alejobar@um.es

COLABORADORES: Víctor Jiménez López (U. de Murcia),  
 Juan Luis García Guirao (U. Castilla-La Mancha)

La teoría de sistemas dinámicos ha cobrado en los últimos años una especial importancia en múltiples campos de la ciencia. En particular, la llamada teoría del caos determinista (que estudia aquellos sistemas en los que a partir de condiciones iniciales muy parecidas la dinámica evoluciona en el tiempo de manera esencialmente diferente) ha merecido y merece un intenso estudio. A lo largo de los años se han ido introduciendo definiciones ad-hoc de lo que se entiende por comportamiento caótico tanto para sistemas en los que el tiempo avanza de forma continua (flujos de ecuaciones diferenciales) o de forma discreta (iteración de funciones). Sin embargo, aunque la teoría en ambos contextos ha seguido a menudo caminos paralelos, no se dispone de un marco de referencia común que permita estudiar estos problemas de manera unificada. En este trabajo estudiamos la idea de cuándo un sistema dinámicamente complejo es “lo menos caótico posible” desde una perspectiva global, es decir, buscando una descripción razonable de este comportamiento que tenga sentido para todo tipo de sistemas dinámicos, tanto continuos como discretos.

A continuación introducimos de forma rigurosa la notación y definiciones necesarias para nuestro trabajo.

Un sistema dinámico es una terna  $(X, T, \phi)$  donde  $X$  es un espacio métrico,  $T$  es  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}^+$  o  $\mathbb{R}$  y  $\phi$  es una aplicación continua  $\phi : T \times X \rightarrow X$  donde:

- $\phi(0, x) = x$  para todo  $x \in X$
- $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$  para todo  $t, s \in T$  y todo  $x \in X$

Un punto  $x_0 \in X$  se dice que es *periódico* si existe  $0 < t_0 \in T$  tal que  $\phi(t + t_0, x_0) = \phi(t, x_0)$  para cada  $t \in T$ . Un punto  $x \in X$  se dice que es *aproximable por ciclos* si para cada  $\epsilon > 0$  existe un punto periódico  $x_\epsilon \in X$  tal que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \phi(t, x_\epsilon)) < \epsilon$ , donde  $d$  es la distancia en el espacio métrico.

Un sistema dinámico se dice *regular* si todos sus puntos son aproximables por ciclos. El sistema se dirá caótico en el sentido de Li-Yorke si tiene al menos un par de Li-Yorke, es decir, existen  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  tales que:

- i)  $\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \phi(t, y)) > 0$
- ii)  $\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \phi(t, y)) = 0$

Mostramos que un sistema no puede ser regular y caótico Li-Yorke a la vez; sin embargo, hay sistemas que no se engloban en ninguna de estas categorías. Surge una pregunta natural: entre todos los sistemas no regulares y no caóticos Li-Yorke, ¿cuáles son los “menos complejos” desde el punto de vista dinámico?

Si llamamos  $NT$  al conjunto de puntos no aproximables por ciclos del sistema dinámico, proponemos para los sistemas con puntos no aproximables por ciclos y sin pares de Li-Yorke las tres categorías siguientes:

- existen  $x, y, x', y' \in NT$  tales que  $x, y$  verifican *i*) y  $x', y'$  verifican *ii*)
- existen  $x, y \in NT$  verificando *i*) pero no hay pares que verifiquen *ii*)
- existen  $x, y \in NT$  verificando *ii*) pero no hay pares que verifiquen *i*)

Analizamos las relaciones entre estas categorías para concluir que es la última la que implica una menor complejidad dinámica.

## Sesión XC1: Métodos algebraicos

Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)

Aula 1.2

Modera: Jaume Llibre

### Forma normal única bajo $C^\infty$ -equivalencia

Cristóbal García García  
 Universidad de Huelva  
 Facultad de Ciencias Experimentales, Campus Universitario del Carmen  
 Avda. de las Fuerzas Armadas, s/n  
 Huelva, 21071

E-MAIL: cristoba@uhu.es

COLABORADORES: Antonio Algaba Durán (U. Huelva)

La teoría de formas normales es una herramienta básica para el estudio de los problemas sobre ecuaciones diferenciales: bifurcaciones, análisis de estabilidad, problema de centro, etc. La teoría clásica de formas normales es conocida como forma normal de Poincaré. Esta forma normal es aplicada a sistemas con parte lineal no nula y utiliza transformaciones cercanas a la identidad para eliminar términos no esenciales en la dinámica local.

En particular, consideramos un sistema autónomo  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , con un punto de equilibrio en el origen (i.e.,  $F(0) = 0$ ). Las técnicas de formas normales son utilizadas para simplificar el campo  $F$  grado a grado. Esto requiere que el campo se escriba en sus componentes homogéneas a través de su serie de Taylor. Los cambios de variables aplicados son de la forma  $x = y + P_k(y)$ , donde  $P_k$  es un vector homogéneo de grado  $k$  que satisface la ecuación homológica. Nosotros desarrollamos el campo  $F(x)$  en sus componentes casi-homogéneas del tipo fijo  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , obteniendo  $\dot{x} = F(x) = F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots$ , donde  $F_k$  denota la componente casi-homogénea de grado  $k$ , la cual contiene los monomios  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$  en la componente  $j$  de  $F_k$  que satisface la relación

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n = k + p_j.$$

Aplicamos no sólo cambios de variables en las variables de estado ( $C^\infty$ -conjugación) sino también en el tiempo ( $C^\infty$ -equivalencia). Concretamente, aplicamos los cambios de variables  $x = y + P_k(y)$ ,  $\frac{dt}{dT} = 1 - \mu_k(x)$ , donde  $P_k$  y  $\mu_k$  son un campo vectorial y una función escalar respectivamente de grado casi-homogéneo  $k$ , las cuales transforman el sistema en  $\dot{y} = G_r(y) + G_{r+1}(y) + \dots$ , cumpliendo que  $F_r = G_r, \dots, F_{r+k-1} = G_{r+k-1}$  y la ecuación homológica



$G_{r+k} = F_{r+k} - [P_k, F_r] - \mu_k F_r$ . Esta ecuación depende linealmente de  $F_r$ , la componente casi-homogénea de menor grado de  $F(x)$ , y no tiene en general solución única, esto es, podría depender de términos arbitrarios que pertenecen al núcleo del operador homológico. Por tanto, un número arbitrario de constantes podrían aparecer en  $P_k$  y consecuentemente en la forma normal de orden mayor que  $k$ . Estas constantes se pueden utilizar para futuras simplificaciones en la forma normal. Podemos utilizar la componente  $F_r$  para simplificar el campo y posteriormente utilizar la componente  $F_{r+1}$ , ya simplificada, para futuras simplificaciones. A esto se le denomina forma normal de paso dos. Análogamente podemos definir la forma normal de paso  $m$ . Algunos autores llaman a esta forma normal, forma pseudohipernormal en contraposición con la forma normal única (forma hipernormal). La forma pseudohipernormal consigue una forma normal con procedimientos lineales. Demostramos que la forma pseudohipernormal coincide con la forma hipernormal tanto bajo  $C^\infty$ -conjugación como  $C^\infty$ -equivalencia y en consecuencia todo el proceso de máxima simplificación se puede llevar a cabo con procedimientos lineales.

**No existencia de ciclos límite algebraicos en la familia (I) de la clasificación china**

Jordi Sorolla Bardají  
 Universitat de Lleida  
 Av. Jaume II, 69. Campus Capponet.  
 Lleida, 25001

E-MAIL: jsorolla@matematica.udl.es

COLABORADORES: Javier Chavarriga Soriano (U. Lleida), Isaac García Rodríguez (U. Lleida)

Los ciclos límite para un sistema diferencial autónomo en el plano  $\dot{x} = P(x, y)$   $\dot{y} = Q(x, y)$  fueron estudiados en primer lugar por Poincaré [2] en los años 1881-1886. Se trata de trayectorias cerradas del sistema, aisladas del resto de trayectorias cerradas.

En 1900, en el segundo congreso oficial de matemáticas en París, Hilbert [1] propuso una lista de problemas, entre los cuales en el 16º insta a encontrar una cota superior del número de ciclos límite para el conjunto de sistemas reales y polinomiales en función de su grado y su posición relativa. Hasta el momento, el resultado más general, probado por Dulac, consiste en que el número de ciclos límite es finito. Es conocida la no existencia de ciclos límite para sistemas lineales (grado 1), sin embargo, no ha sido posible todavía resolver el 16º problema de Hilbert ni siquiera para sistemas cuadráticos (grado 2).

El estudio de los ciclos límite fue guiado en el siglo XX por los problemas prácticos y por avances en campos como electrónica aplicada, física, química, ingeniería, biología, economía, etc. Tal es el caso del tubo de triodo al vacío, capaz de producir oscilaciones estables auto-excitadas de amplitud constante, lo cual hace posible la propagación de sonido e imagen electrónicamente. Estas oscilaciones se describen mediante la conocida ecuación de van der Pol, equivalente a un sistema plano de grado 2.

Por otra parte, la ecuación de van der Pol da lugar al estudio sistemático de los ciclos límite, primero por parte de la escuela rusa y más tarde la china, que se centra en sistemas polinomiales cuadráticos (grado 2). De ahí sale la clasificación en tres familias de los sistemas cuadráticos que

pueden contener ciclos límite, véase [4].

Ante las dificultades para estudiar el problema de los ciclos límite se aborda el estudio de las curvas invariantes, es decir, aquéllas cuyo gradiente es perpendicular al campo definido por el sistema diferencial sobre la curva misma. Además, se define ciclo límite algebraico como el ciclo límite que aparece en un óvalo de una curva invariante algebraica (o polinomial). Esto lleva al estudio de un conjunto menos complejo de ciclos límite.

Vamos a considerar los sistemas pertenecientes a la familia (I) china, es decir,  $\dot{x} = \delta x - y + \lambda x^2 + mxy + ny^2$ ,  $\dot{y} = x$ . Demostramos que este tipo de sistemas no tienen ciclos límite algebraicos.

Consideramos estos sistemas en el espacio proyectivo complejo por dos motivos esenciales: el comportamiento sobre los complejos es de gran utilidad incluso para el estudio real y además el espacio proyectivo contiene el comportamiento infinito de un sistema diferencial.

Además usamos la teoría de soluciones formales de Seidenberg [3] para conseguir información acerca de los puntos singulares del sistema y posteriormente del grado de las curvas algebraicas.

1. D. Hilbert, *Mathematische Problem (lecture)*, Second International Congress Math. Paris 1900 Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl. 1900, 253-297.
2. H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. de Mathématiques Pures et Appliquées (3) **7** (1881), 375-422; **8** (1882), 251-296; Oeuvres de Henri Poincaré, vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1951, 3-84.
3. A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation  $A dy = B dx$* . Amer. J. Math. 90 (1968) 248-269.
4. Ye Yian-Qian, *Theory of limit cycles*, Translations of Math. Monographs, 66 Amer. Math. Soc., Providence 1986.

**Enfoque cartesiano para sistemas mecánicos con enlaces**

Rafael Ramírez Inostroza  
 Universidad Rovira i Virgili Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
 av. Països Catalans, 26  
 43007 Tarragona

E-MAIL: rramirez@etse.urv.es

COLABORADORES: Natalia Sadovskaia (UPC)

En la historia de la mecánica se tienen dos puntos de vista para resolver el problema de la dinámica: el de Newton y el de Decartes.

En “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”(1687), Newton considera que los movimientos de los cuerpos celestes se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Decartes en “Principia Philosophiae”(1644) propone utilizar ecuaciones de primer orden.

V. V. Kozlov en “Teoria general de vórtices”(en ruso) el año 1998, afirma que es factible describir el comportamiento de los sistemas mecánicos sin salir del espacio de configuración.

El objetivo de la presente comunicación es proponer un enfoque cartesiano para sistemas mecánicos con enlaces lineales respecto a las velocidades. Se deduce un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (enfoque cartesiano). Se establece la relación entre las soluciones de estas ecuaciones y las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que describen el comportamiento de sistemas mecánicos con enlaces lineales respecto a las velocidades (enfoque lagrangiano para sistemas con enlaces).

Los resultados obtenidos se aplican al estudio de una partícula restringida en el espacio, al estudio del trineo de Chaplignin-Caratheodory y al cuerpo sólido en el caso de Suslov (problema de Suslov). Se analiza la existencia de sistemas no holonómicos con ecuaciones de movimientos lagrangianas (sistemas de Kummer). Se da una solución completa al problema inverso en la dinámica sobre la construcción de campos de fuerzas capaces de generar órbitas dadas.

---

### Bifurcation of limit cycles from a 4-dimensional center in control systems

Adriana Buică

*Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca  
and Centre de Recerca Matemàtica  
Apartat 50, Bellaterra, E-08193*

E-MAIL: [fbuica@crm.es](mailto:fbuica@crm.es)

WWW: <http://www.math.ubbcluj.ro/> [abuica](mailto:abuica)

COLABORADORES: Jaume Llibre (Universitat Autònoma de Barcelona)

We study the bifurcation of limit cycles from the periodic orbits of a 4-dimensional center in a class of piecewise linear differential systems, which appears in a natural way in control theory. Our main result shows that three is an upper bound for the number of limit cycles, up to first order expansion of the displacement function with respect to the small parameter. Moreover, this upper bound is reached. For proving this result we use the averaging method in a form where the differentiability of the system is not needed.

---

### Demostración algebraica de la no-integrabilidad del Problema de Hill

Sergi Simon i Estrada

*Universitat de Barcelona  
Facultat de Matemàtiques,  
C/ Gran Via de les Corts Catalanes,  
585 08007 Barcelona*

E-MAIL: [sergi@mat.ub.es](mailto:sergi@mat.ub.es)

COLABORADORES: Juan J. Morales-Ruiz (U. Politècnica de Catalunya, Carles Simó i Torres (U. de Barcelona)

El **Problema Lunar de Hill** aparece en la Mecánica Celeste como caso límite del Problema Restringido de Tres Cuerpos y es a su vez fuente de información relevante sobre otros muchos sistemas dinámicos de índole similar. No depende de parámetros y se encuentra globalmente alejado de cualquier problema simple conocido. Presenta, además, buena parte de los fenómenos numéricos atribuibles a un sistema no-integrable. A continuación presentamos una demostración algebraica de no-integrabilidad. Más allá del propio

resultado, el trabajo sirve como ejemplo de la aplicabilidad de la teoría de Galois diferencial a un problema significativo.

---

## Sesión XC2: Bifurcaciones II

Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)

Aula 2.2

Moderador: Henar Herrero

---

### Bifurcaciones de Hopf para diversos números de onda en el problema de Poiseuille plano bidimensional

Pablo S. Casas

*Universidad Politècnica de Catalunya  
E.T.S. de Ingenieros Industriales de Barcelona  
Diagonal, 647  
08028 Barcelona*

E-MAIL: [pablo@casas.upc.es](mailto:pablo@casas.upc.es)

WWW: <http://www-ma1.upc.es/~casas>

<http://www.maia.ub.es/~angel>

COLABORADORES: Àngel Jorba (U. Barcelona)

La formulación del problema de Poiseuille plano supone un fluido viscoso de densidad constante, conducido mediante un gradiente de presión a través de un canal entre dos placas planas paralelas. Además se imponen condiciones de frontera de no deslizamiento en las paredes del canal y periodicidad espacial en las direcciones no acotadas. Como condición adicional se utilizan dos posibles formulaciones, fijando como constantes bien el flujo de entrada al canal o bien el gradiente medio de presión.

Este problema es un clásico en la teoría de estabilidad hidrodinámica. Ha sido objeto de innumerables trabajos en lo que se refiere a su estabilidad y la transición a la turbulencia: para ésta aún no se ha dado respuesta satisfactoria. En este trabajo analizamos el problema bidimensional, donde la dinámica ya es muy complicada y refleja comportamientos observados en el problema tridimensional. Esencialmente extendemos los resultados sobre bifurcaciones a diferentes valores del número de onda  $\alpha$  ( $2\pi/\alpha$  representa la periodicidad espacial) inferiores a 1. En particular, es conocido que en el caso de gradiente de presión constante, si  $\alpha \gtrsim 0,91$ , la curva de ondas viajeras bifurca subcríticamente de la solución laminar, mientras que para  $\alpha \lesssim 0,91$  la bifurcación de la laminar es supercrítica. Para  $\alpha \approx 0,91$  aparece una nueva bifurcación de Hopf sobre la curva de ondas viajeras, no presente si  $\alpha \gtrsim 0,91$ .

Nuestro objetivo consiste en la descripción de las curvas de soluciones cuasi periódicas (mediante continuación numérica de curvas) que nacen en dichas bifurcaciones de Hopf, y el análisis de su estabilidad. Asimismo, en los casos de soluciones inestables (periódicas o cuasi periódicas) consideramos las conexiones de su variedad inestable (siguiendo su evolución temporal) con otras configuraciones del fluido (periódicas, cuasi periódicas de 2 y 3 frecuencias, y otras). A su vez, estas conexiones nos permiten hallar nuevas soluciones difíciles de localizar mediante continuación de curvas.

---

### Bifurcaciones de órbitas periódicas cerca de un punto-T no transversal

Manuel Merino Morlesín  
 Universidad de Huelva,  
 Facultad de Ciencias Experimentales,  
 Avda. de las Fuerzas Armadas s/n  
 Huelva, 21071

E-MAIL: merino@uhu.es

COLABORADORES: Antonio Algaba Durán (U. de Huelva),  
 Fernando Fernández Sánchez (U. de Sevilla), Alejandro J.  
 Rodríguez Luis (U. de Sevilla)

Una bifurcación importante en sistemas autónomos tridimensionales, que no está completamente estudiada, es la de triple cero (autovalor cero triple con un solo autovector). Esta bifurcación lleva aparejada, entre otros fenómenos, la presencia de unos ciclos heteroclinos de codimensión dos llamados puntos-T.

Estamos interesados en estudiar la consecuencia de un pliegue en una curva de puntos-T en el espacio triparamétrico. Nos hemos planteado este problema tras encontrarlo en circuitos electrónicos pertenecientes a una familia de osciladores van der Pol-Duffing modificados.

En secciones planas paralelas del espacio de parámetros, el paso por el pliegue de la curva de puntos-T se observa de la siguiente forma: dos puntos-T cercanos se van aproximando hasta contactar para, seguidamente, desaparecer. Es evidente, en esta situación, que las estructuras de órbitas homoclinas que organizan cada uno de estos dos puntos-T por separado van a interactuar entre sí, dando lugar a curvas de muy diversos tipos en las secciones planas del espacio de parámetros.

El análisis de este fenómeno nos motivó para plantear un modelo matemático que pudiese reproducir el pliegue de la curva de puntos-T así como el comportamiento homoclinos cerca de él. El modelo diseñado se basa en la construcción de un mapa de retorno, a primer orden, en las cercanías del ciclo heteroclinos correspondiente al punto-T para valores de los parámetros cercanos al pliegue. Hemos comprobado la gran concordancia entre los resultados teóricos obtenidos a partir del modelo y los resultados numéricos obtenidos en dos circuitos electrónicos diferentes.

Este buen funcionamiento del modelo en lo que respecta a los comportamientos homoclinos nos animó a abordar el análisis de las soluciones periódicas trabajando, simultáneamente, con el modelo y el sistema. De nuevo la concordancia ha sido excelente, teniendo en cuenta, además, que las configuraciones son ahora mucho más complejas.

### Bifurcaciones en modelos de calidad ambiental urbana

Jesús García Quesada  
 Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
 Campus de Tafira  
 Edificio de Informática y Matemáticas  
 Las Palmas, 35017

E-MAIL: jgarcia@dis.ulpgc.es

COLABORADORES: José M. Pacheco Castela, Isabel  
 Fernández De la Nuez

A partir de la construcción de un conjunto de modelos de complejidad creciente sobre calidad para el entorno urbano, se propone un modelo en el que se considera la interacción entre tres agentes principales: una medida de la calidad, otra de la población y una medida de la mala calidad, entendida esta última como la presencia de equipamiento en malas condiciones o la ausencia del mismo. El modelo resultante consiste en tres ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, donde aparecen varios parámetros significativos:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 + \beta y} (1 - x) - \gamma xy \\ y' &= \alpha y (1 - y) - \delta y (x - z) \\ z' &= \gamma^* xy - \eta \frac{yz}{\phi + z} \end{aligned}$$

Para este modelo tridimensional se realizó un estudio inicial utilizando como parámetros de bifurcación la tasa de crecimiento de la población y los impuestos necesarios para prevenir que la mala calidad predomine en el entorno urbano, obteniéndose una bifurcación de tipo nodo silla para rangos razonables de valores de los parámetros y realizándose una interpretación de este fenómeno en términos económicos y urbanos. Después de realizar un estudio sobre las bifurcaciones de codimensión uno se abordan las de codimensión dos, resultando en este último caso que si se consideran como parámetros de bifurcación el efecto de los impuestos y la constante de semi saturación de la mala calidad, se obtienen bifurcaciones de tipo Bogdanov-Takens y tipo cúspide. Para el estudio numérico se han utilizado los paquetes AUTO y CONTENT.

### Bifurcaciones no suaves en sistemas *stick-slip*

Iván Merillas Santos  
 Universidad Politécnica de Cataluña  
 Departamento de Matemática Aplicada IV  
 C/Jordi Girona, 1-3. Edificio C-3  
 Barcelona, 08034

E-MAIL: merillas@mat.upc.es  
 WWW: <http://www-ma4.upc.es>

COLABORADORES: Gerard Olivar Tost

Los sistemas dinámicos no suaves (*non-smooth*) son fácilmente observables en diversos campos científicos, como en circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, robótica, geología, economía, biología, etc. Dichos sistemas dinámicos pueden ser divididos en tres tipos de sistemas dependiendo del grado de discontinuidad. Uno de estos tres tipos de sistemas son los denominados sistemas de Filippov (sistemas que poseen un campo vectorial discontinuo).

Un ejemplo de un sistema de Filippov puede ser obtenido al considerar un sistema mecánico determinado por fuerzas elásticas y de fricción seca. En los mencionados sistemas, la no suavidad viene determinada por la fuerza de rozamiento que actúa de dos maneras diferentes: bien como resistencia estática o bien como resistencia dinámica, dependiendo del estado en que nos encontremos. Estos sistemas en donde se repiten fases de movimiento y fases de parada se denominan *stick-slip*. Además, si realizamos otro tipo de clasificación de los sistemas dinámicos no suaves, los sistemas *stick-slip* pueden englobarse dentro de los sistemas con un espacio de

fase con dimensión variable, puesto que el número de grados de libertad va cambiando al evolucionar el sistema.

Hay diversas maneras de abordar el estudio de estos sistemas, y uno de ellas es utilizar como herramienta la complementariedad. De hecho, muchos sistemas mecánicos han sido descritos como un problema complementario. Por lo tanto describimos este tipo de sistemas de esta manera, en donde se obtienen como variables complementarias la velocidad relativa frente a la fuerza de rozamiento.

Por otro lado, si hablamos sobre las bifurcaciones en los sistemas dinámicos no suaves nos encontramos con dos tipos diferentes de bifurcaciones: las continuas y las no suaves. Por una parte, las bifurcaciones continuas han sido descritas y estudiadas en profundidad desde hace años, mientras que las bifurcaciones no suaves son aún objeto de una activa investigación. Por este motivo, dentro de la diversidad de modelos de sistemas *stick-slip* que existen hemos elegido uno de ellos para estudiar las bifurcaciones suaves y no suaves que aparecen al trabajar con este tipo de sistemas.

Para realizar dicho estudio se han simulado varios diagramas de bifurcación 1-dimensional y 2-dimensional. Las bifurcaciones no suaves han sido cuidadosamente calculadas y explicadas. Además, en el estudio realizado, se observan con cierta facilidad las cuencas de atracción para los diferentes parámetros que son de un mayor interés.

Finalmente cabe destacar las aplicaciones que tiene este tipo de sistemas. Por un lado, una de las aplicaciones es su mera utilidad mecánica, mientras que, por otro lado, hay ciertas referencias bibliográficas que prueban la conexión que tiene este modelo con el estudio de movimientos de placas tectónicas y la predicción de seísmos.

### Estudio de la ecuación “inner” en un problema de escisión de separatrices exponencialmente pequeño en $\mathbb{R}^3$

Tere M-Seara  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Dept. Matemàtica Aplicada I,*  
*Diagonal 647,*  
*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [Tere.M-Seara@upc.es](mailto:Tere.M-Seara@upc.es)  
 WWW: <http://www-ma1.upc.es/personal/seara/mseara.htm>

COLABORADORES: Imma Baldomà (U. Barcelona)

En el campo de los sistemas dinámicos, es bien conocido que una de las causas principales de existencia de dinámica “complicada”, también conocida como “caos” es la existencia de variedades invariantes asociadas a puntos críticos hiperbólicos que se intersecan transversalmente, dando lugar a conexiones homoclínicas, cuando ambas variedades están asociadas a un mismo punto, o heteroclínicas cuando son variedades asociadas a puntos distintos.

Cuando el sistema estudiado está cercano a uno integrable, y cuya dinámica es por tanto trivial, este fenómeno se conoce como “escisión” de separatrices, ya que dichas separatrices o variedades invariantes son siempre coincidentes para estos sistemas.

Es abundante la literatura que estudia este tipo de fenómenos y ya existen métodos bien conocidos por la comunidad científica, básicamente variantes del ya clásico método de Poincaré-Melnikov, que permiten obtener fórmulas

asintóticas para la distancia entre estas variedades, o para el ángulo entre ellas en los puntos de intersección, en función del parámetro de perturbación.

Un caso donde la justificación de dicho método no es en absoluto trivial es el caso en que dicha escisión es exponencialmente pequeña respecto del parámetro de perturbación y por tanto casi “invisible” desde el punto de vista práctico. Mas aún, en muchos problemas de perturbación singular, en que el sistema no perturbado es extremadamente degenerado, dicho método de Poincaré-Melnikov no conduce a la solución correcta. Para obtener en estos casos fórmulas asintóticas para esta escisión es necesario recurrir a técnicas de “matching” que nos permitan aproximar las soluciones buscadas en el plano complejo.

Un problema en que se presenta este fenómeno es en el estudio de algunos desplegamientos en  $\mathbb{R}^3$  de la singularidad nilpotente de codimensión tres en el caso conservativo. En el estudio de estos desplegamientos, la forma normal presenta dos puntos críticos cuyas variedades estable e inestable coinciden a lo largo de una órbita heteroclínica unidimensional y una variedad heteroclínica bidimensional.

En este trabajo se inicia el estudio de la escisión de la órbita heteroclínica unidimensional, que resulta ser exponencialmente pequeña en el parámetro de perturbación. Tal como hemos dicho anteriormente, para obtener una expresión asintótica de la distancia entre las variedades perturbadas es necesario aproximar dichas variedades para valores complejos del tiempo.

Este estudio lleva, mediante cambios de variables singulares, a la llamada, en el lenguaje de la perturbación singular, ecuación inner, que es una ecuación no trivial e independiente de parámetros.

En este trabajo se muestra la existencia de dos soluciones de dicha ecuación asintóticas a una misma serie de potencias, y se da una expresión asintótica para su diferencia que muestra que ésta es exponencialmente pequeña.

Es de esperar que esta expresión sea el término principal de la distancia entre las variedades unidimensionales del problema original.

## Sesión XC3: Estructuras localizadas

Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: Mario Floria

### Estabilización de solitones de la ecuación de Schrödinger no lineal

Gaspar D. Montesinos Matilla  
*Universidad de Castilla-La Mancha*  
*Departamento de Matemáticas, E.T.S.I. Industriales,*  
*Avda. Camilo José Cela, s/n*  
*Ciudad Real, 13071*

E-MAIL: [GasparD.Montesinos@uclm.es](mailto:GasparD.Montesinos@uclm.es)  
 WWW: <http://matematicas.uclm.es/nolineal/index.html>

COLABORADORES: Víctor Manuel Pérez García (U. Castilla-La Mancha), Pedro Torres (U. de Granada), Humberto Michinel (U. de Orense)

En este trabajo estudiamos sistemas regidos por la ecuación de Schrödinger no lineal bidimensional con término no lineal cúbico. Mostramos que es posible estabilizar ondas solitarias (solitones) inestables de esta ecuación mediante el control del término no lineal. Usando el llamado método de momentos obtenemos condiciones sobre los parámetros a utilizar para conseguir la estabilización y comparamos nuestros resultados con simulaciones numéricas de la ecuación de Schrödinger. También discutimos qué tipo de estructuras son las que se pueden estabilizar, concluyendo que los llamados solitones de Townes son las soluciones que permanecen estables. Por último, introducimos los llamados solitones vectoriales estabilizados que son una nueva clase de ondas no lineales generadas por combinación directa de varias fracciones de solitones de Townes o como resultado de interacciones entre tales solitones. El fenómeno de la estabilización que describimos es de gran interés en los campos de condensación de Bose-Einstein y Óptica no lineal.

### Inestabilidades temporales y excitabilidad en estructuras localizadas en cavidades ópticas no lineales

Manuel A. Matías  
 IMEDEA (CSIC-UIB)  
 Ctra. Valldemossa, km 7.5  
 Palma de Mallorca, 07122

E-MAIL: [manuel@imedea.uib.es](mailto:manuel@imedea.uib.es)  
 WWW: <http://www.imedea.uib.es/~manuel>

COLABORADORES: D. Gomila (IMDEA (CSIC-UIB)), Pere Colet (IMEDEA (CSIC-UIB))

En este trabajo hemos caracterizado las inestabilidades temporales que presentan las estructuras localizadas que aparecen subcrítica en medios no lineales de tipo Kerr para valores de los parámetros para los que un patrón hexagonal coexiste con la solución homogénea del sistema. Se encuentra que dichas estructuras localizadas presentan una transición a comportamiento oscilatorio, que ocurre mediante una bifurcación de Hopf. Esta solución oscilatoria se destruye mediante una bifurcación de silla-bucle, en la que el ciclo límite es la órbita homoclínica de un punto de silla (creado en una bifurcación de silla-nodo subcrítica al mismo tiempo que la estructura localizada). Pasada esta bifurcación la solución homogénea presenta un comportamiento de tipo excitable, estando definido el umbral por la variedad estable del punto de silla. Aquellas perturbaciones cuyo valor supera este umbral describen una trayectoria próxima a la del ciclo límite. El comportamiento excitable obtenido es diferente del de un medio excitable en sistemas de reacción-difusión. Por último, se ha encontrado que todo este comportamiento se encuentra organizado por una bifurcación de codimensión 2 de tipo Takens-Bogdanov.

### Atractores para una ecuación seno-Gordon con retardo finito

Tomás Caraballo Garrido  
 Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico  
 Universidad de Sevilla  
 Apdo. Correos 1160, Sevilla, 41080

E-MAIL: [caraball@us.es](mailto:caraball@us.es)  
 WWW: <http://www.us.es/gaesdif/caraballo.html>

COLABORADORES: Peter Kloeden (Universität Frankfurt), José Real Anguas (Universidad de Sevilla)

En este trabajo se considera una ecuación de ondas amortiguada en la que aparece un término conteniendo características hereditarias del problema. El objetivo es analizar el comportamiento asintótico del modelo.

En el caso de retardos constantes, la teoría clásica de atractores globales para sistemas dinámicos autónomos (e.g. Hale (1988), Temam (1988)) puede ser adaptada sin mucha dificultad para el tratamiento de este problema. Sin embargo, cuando el término de memoria contiene, por ejemplo, retardos variables, el problema deja de ser autónomo, con lo que resulta necesario un nuevo tratamiento. En el trabajo se demuestra que la teoría de atractores tipo *pullback* es adecuada para demostrar la existencia de atractores para este tipo de problemas no autónomos.

La formulación funcional que utilizamos en el modelo cubre, entre otros, los casos en que el modelo contiene términos con retardos variables y distribuidos.

### Dinámica de los defectos en la ecuación de Ginzburg-Landau compleja en dos dimensiones

María Aguares Carrero  
 Universitat Politècnica de Catalunya  
 E.T.S. Enginyeria Industrial de Barcelona,  
 Av. Diagonal, 647  
 Barcelona, 08028

E-MAIL: [maria.aguares@upc.es](mailto:maria.aguares@upc.es)  
 WWW: <http://www-ma1.upc.es/~aguares>

COLABORADORES: Jonathan S. Chapman (University of Oxford, United Kingdom)

La ecuación de Ginzburg-Landau compleja aparece en varios contextos físicos como la óptica no lineal, la superconductividad o la superfluidad, entre otros. También es importante como ecuación de modulación no lineal en muchos sistemas hidrodinámicos. Esta ecuación viene dada por

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi - (1 + i\alpha) |\Psi|^2 \Psi + (1 + i\beta) \Delta \Psi, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

donde  $\Psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}$  y  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

En un sistema de referencia giratorio que tenga una velocidad angular  $\omega$  constante, existen soluciones estacionarias cuyo patrón espacial tiene la forma de una onda espiral. Escribiendo la función como  $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} u(\mathbf{x}) e^{i\Phi(\mathbf{x})}$ , estas soluciones aparecen cuando imponemos la condición topológica

$$\oint_C \nabla \Phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n \quad (2)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$ , y  $C$  es cualquier curva que encierre el origen. De hecho, con esta condición estamos fijando el grado de la función  $\Psi$ , es decir, imponemos que la función se anule en el origen si  $n \neq 0$ . En estas condiciones se obtiene una solución radial para  $u(\mathbf{x})$ , que es monótona y creciente. La función  $u(r)$  alcanza rápidamente un valor constante  $U$ , y la gráfica de esta función define una longitud característica pequeña,  $\varepsilon$ , tal que, cuando  $r < \varepsilon$  entonces  $u(r) \ll U$ . La región del espacio delimitada por  $r < \varepsilon$  se conoce como núcleo (o *core*) y el resto se conoce como campo lejano (o *far field*). Así, el patrón que viene descrito por  $\Phi(\mathbf{x})$  será de hecho el que tenga la forma de una onda espiral. Es interesante observar que, en un contexto de dinámica de fluidos, la condición (2) significa que estamos imponiendo una vorticidad cuya circulación está cuantizada. Por esta razón, el punto en el que la función  $u$  se anula se conoce como vórtice o defecto.

En este trabajo estudiamos campos  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  que contienen un conjunto de vórtices aislados, separados por distancias que son de orden  $1/\varepsilon$ . Cada vórtice emite ondas espirales que inducen un movimiento relativo. Mediante el método de *matching* de series asintóticas obtenemos las ecuaciones del movimiento, y se observa que el orden de  $\alpha - \beta$  juega un papel crucial en el tipo de interacción entre los vórtices.

La idea del método es como sigue: hallamos sendas series asintóticas uniformemente válidas en las regiones del campo lejano y en el núcleo: solución *outer* y solución *inner*, respectivamente. En las ecuaciones del campo lejano se debe tener en cuenta la presencia de varios vórtices a través de las condiciones de contorno. Entonces, en el proceso de *matching* se obtienen unas condiciones de solubilidad que son las que suministran la información clave sobre el movimiento de los defectos.

---

### Simetrías no clásicas de un modelo de vibraciones de viga.

José Carlos Camacho Moreno  
*Universidad de Cádiz*  
*Escuela Politécnica Superior,*  
*Avda. Ramón Puyol s/n*  
*Algeciras, 11202*

E-MAIL: [josecarlos.camacho@uca.es](mailto:josecarlos.camacho@uca.es)

COLABORADORES: María de los Santos Bruzón Gallego (U. Cádiz)

En este trabajo presentamos un estudio, desde el punto de vista de la teoría de las simetrías no clásicas para ecuaciones en derivadas parciales (EDP's), del modelo de vibraciones de viga, introducido por McKenna y Walter en el estudio del comportamiento de las vibraciones del puente Golden Gate de San Francisco,

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0.$$

Esta ecuación describe la propagación de las ondas de flexión que produce una barra rectangular cuando existen pequeñas vibraciones transversales. El eje  $OX$  se corresponde con el eje longitudinal de la barra en su posición de equilibrio,  $x$  es la coordenada espacial,  $t$  la coordenada temporal,  $u(x, t)$  mide el desplazamiento transversal y el término no lineal  $f(u)$  representa el efecto que debe realizar el cable que sostiene la viga para contrarrestar la fuerza de la gravedad.

El método clásico de Lie para EDP's permite reducir el número de variables independientes del sistema. En particu-

lar este método permite transformar la EDP en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), que son más fáciles de resolver. Las simetrías clásicas de Lie han sido estudiadas por Bruzón y Camacho en un trabajo previo.

Motivados por el hecho de que existen reducciones para EDP's que no son obtenidas por el método clásico de Lie, aplicamos al modelo el método no clásico de Bluman y Cole con el objetivo de obtener nuevas reducciones por simetrías.

La base fundamental del método no clásico es requerir que la EDP junto con la condición de superficie sean invariante bajo un grupo uniparamétrico de transformaciones. Aplicando el criterio de invarianza obtenemos un sistema sobredeterminado de ecuaciones no lineales. De la resolución de este sistema se obtienen los infinitesimales del grupo. A partir del sistema característico obtenemos la transformación, por simetrías no clásicas, que reduce la EDP a EDO's.

El método clásico de Lie aplicado a EDO's reducen el orden de la misma. Estudiamos las simetrías clásicas de todas las EDO's obtenidas y, en los casos en que éstas admiten simetrías distintas de la trivial, reducimos el orden de la misma.

De algunas EDO's obtenemos soluciones exactas que conducen a soluciones particulares de la ecuación en derivadas parciales con propiedades interesantes.

---

## Sesión XC4: Osciladores no lineales y comportamiento asintótico

Miércoles, 2 de junio (16:00-17:40)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: Miguel A. López Guerrero

---

### Calentamiento por microondas usando un modelo de modulaciones de temperatura en un circuito

C. Arturo Vargas Guadarrama  
*IIMAS, Universidad Nacional Autónoma de México.*  
*Ciudad Universitaria,*  
*México, D.F. 04510*  
*MEXICO.*

E-MAIL: [cav@mym.iimas.unam.mx](mailto:cav@mym.iimas.unam.mx)

COLABORADORES: C.G. Reimbert, M.C. Jorge, A.A. Minzoni (IIMAS, UNAM)

En esta charla se presenta un modelo de las modulaciones de temperatura inducidas por el campo eléctrico durante el calentamiento por microondas usando el problema de la variación del voltaje en respuesta a una resonancia en un circuito con un termistor.

Se usan métodos asintóticos para reducir el problema a uno de plano fase para el perfil de temperatura que está acoplado con la ecuación del voltaje. Se muestra cómo aparecen oscilaciones de relajación donde la respuesta del voltaje está modulada por la temperatura.

---

**Variedades invariantes límite en sistemas cercanos a una rotación**

Ernest Fontich Julià  
*Universitat de Barcelona*  
*Facultat de Matemàtiques,*  
*c/Gran Via, 585*  
*08007 Barcelona*

E-MAIL: fontich@mat.ub.es

COLABORADORES: Patrick Bonckaert (Limburgs Universitair Centrum)

En el estudio local de sistemas dinámicos se realizan normalizaciones y escalados que conducen a sistemas más simples cuya dinámica en una región finita del espacio nos representa la dinámica local que pretendemos estudiar.

Este tipo de estudio se realiza en particular en teoría de bifurcaciones. El estudio de la llamada bifurcación *Hopf-zero*, es decir, la bifurcación de un punto fijo con parte lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

lleva a considerar desplegamientos, es decir ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned} x' &= -y + \mu x - axz + A(x, y, z, \lambda, \mu) \\ y' &= x + \mu y - ayz + B(x, y, z, \lambda, \mu) \\ z' &= z^2 + \lambda + b(x^2 + y^2) + C(x, y, z, \lambda, \mu) \end{aligned}$$

cuyo estudio local, después de los oportunos cambios, se reduce a estudiar perturbaciones de orden  $\varepsilon$  del sistema lineal cuya matriz es (1). Esta matriz no es hiperbólica, pero para ciertos valores de los parámetros el sistema tiene variedades invariantes. En este trabajo estudiamos las variedades invariantes límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero, y el tipo de convergencia. Para el sistema límite todo el espacio es una variedad central, pero las variedades del sistema perturbado tienden a variedades de sistemas auxiliares independientes del parámetro.

**Estudio analítico y computacional del oscilador de Helmholtz**

Jesús Seoane Sepúlveda  
*Grupo de Dinámica no lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*28933, Móstoles, Madrid*

E-MAIL: jseoane@escet.urjc.es

WWW: <http://www.urjc.es>

COLABORADORES: Juan A. Almendral (U. Rey Juan Carlos), Miguel A.F. Sanjúan (U. Rey Juan Carlos)

El oscilador de Helmholtz es el oscilador no lineal asimétrico más simple, el cual contiene un término no lineal cuadrático. Este oscilador no lineal tiene una interpretación mecánica muy simple, pues describe el movimiento de una partícula de masa unidad en un potencial cúbico con un forzamiento sinusoidal en presencia de amortiguamiento proporcional a la velocidad. El objetivo de este trabajo es analizar su dinámica no lineal incluyendo una exhaustiva descripción de la formulación del modelo y un profundo y detallado análisis de las soluciones para los casos en los que

no hay forzamiento y en los que no hay amortiguamiento, y la construcción de la aplicación separatriz. Para ello, y partiendo de la ecuación diferencial del oscilador, obtenemos el Hamiltoniano y la Lagrangiana del oscilador que será de mucha utilidad para la computación de la órbita homoclínica y de la aplicación separatriz anteriormente mencionadas. Posteriormente obtenemos la solución general exacta de la ecuación para el caso conservativo, o sea, en la situación en la que no hay amortiguamiento ni forzamiento periódico, obteniendo el período de las órbitas y la ecuación de la separatriz. También se estudia el efecto del forzamiento paramétrico y cuasiperiódico. Se presta especial atención al caso concreto de amortiguamiento lineal del sistema, para el cual obtenemos las condiciones de integrabilidad y sus correspondientes simetrías. Mediante la reducción a variables canónicas obtenemos las soluciones para el caso en que el sistema es integrable. Finalmente también consideramos el efecto de usar un término no lineal de amortiguamiento, mostrando resultados analíticos y computacionales. Para ello hacemos uso del análisis de Melnikov y de un estudio detallado de las cuencas de atracción del sistema.

**Cuenca de atracción del equilibrio de un oscilador no lineal en un sistema mecánico con rozamiento**

Francisco Rodrigo Muñoz  
*Universidad de Sevilla*  
*Escuela Universitaria Politécnica,*  
*c/Virgen de África nº 7*  
*Sevilla, 41011*

E-MAIL: frodrigo@platero.eup.us.es

COLABORADORES: Emilio Freire Macías (U. de Sevilla), Javier Ros Padilla (U. de Sevilla)

Los mecanismos de fricción entre superficies deslizantes son complejos y no muy bien conocidos. Se trata de un proceso fuertemente no lineal respecto a la velocidad relativa entre las superficies que rozan. La viscosidad produce un aumento de la fuerza de fricción cuando aumenta la velocidad relativa; sin embargo, cuando la lubricación es deficiente, a bajas velocidades tenemos el efecto contrario: al aumentar la velocidad, la fricción disminuye, es el llamado efecto Stribeck, responsable de la aparición de oscilaciones automantenidas [1, 2].

En este trabajo nos proponemos establecer la cuenca de atracción del equilibrio de un sistema mecánico de un grado de libertad constituido por una barra apoyada sobre dos rodillos que giran con la misma velocidad uniforme  $v_0$ , pero en sentidos contrarios. Como modelo de fricción consideramos una aproximación lineal a trozos del coeficiente de rozamiento (supuesto igual en los dos rodillos) en función de la velocidad relativa, que pretende recoger de modo cualitativo el efecto Stribeck-viscoso. Así, el modelo consta de un tramo rectilíneo decreciente para bajas velocidades relativas (Stribeck), seguido de otro creciente para velocidades más altas (efecto viscoso).

Dado que las únicas fuerzas que actúan son las de rozamiento, el modelo lineal a trozos propuesto hace que las ecuaciones diferenciales de primer orden que gobiernan el movimiento, obtenidas al tomar la posición  $x$  y la velocidad  $y = \dot{x}$  de la barra como variables de estado, sean lineales a bajas velocidades y cuadráticas a velocidades ms altas.

Con el origen en el punto medio entre los rodillos, el plano de fases presenta tres zonas separadas por las rectas  $y = \pm 1$ . En la zona central el sistema de ecuaciones diferenciales es lineal y en las zonas externas cuadrático.

Cuando la traza de la matriz del sistema en la zona central pasa de positiva a negativa, el punto de equilibrio situado en el origen pasa de inestable a estable, acompañado de la aparición de una órbita periódica inestable. Demostramos la existencia de tal órbita, que es la que marca los límites de la cuenca de atracción del equilibrio, estableciendo que la órbita que parte de un punto de la frontera  $y = 1$  ha de regresar al mismo tras haber rodeado al origen, lo que nos lleva a un sistema de ecuaciones no lineales, llamadas ecuaciones de cierre, cuya solución queda establecida localmente mediante el Teorema de la Función Implícita.

1. J.P. Den Hartog, Mecánica de las vibraciones, C.E.C.S.A. México 1984
2. R.A. Ibrahim, ASME Reprint No AMR147 (1994)
3. E. Freire, E. Ponce, J. Ros, Int. J. of Bif. and Chaos, Vol. 9, (1999)

### Una caracterización de los omega-límites de flujos analíticos en el plano, la esfera y el plano proyectivo

Víctor Jiménez López  
 Universidad de Murcia  
 Departamento de Matemáticas,  
 Campus de Espinardo  
 Murcia, 30100

E-MAIL: [vjimenez@um.es](mailto:vjimenez@um.es)

COLABORADORES: Jaume Llibre (Universitat Autònoma de Barcelona)

Como es bien sabido, la teoría cualitativa de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas (también llamadas flujos) planos tiene importantes aplicaciones en las ciencias experimentales (sistemas depredador-presa, circuitos eléctricos, cinética química...). En este contexto la cuestión fundamental es la de la descripción del comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema. El problema puede abordarse desde varios puntos de vista, y uno de los más naturales es el geométrico: se trataría de describir la "geografía" de los conjuntos de puntos del plano a los que, con el paso del tiempo, las soluciones del sistema se van aproximando (sus llamados *omega*-límites). Empezando con el teorema de Poincaré-Bendixson, publicado hace ya más de un siglo, pueden encontrarse en la literatura muchísimos resultados al respecto pero, sorprendentemente, una cuestión fundamental permanece pendiente: determinar con precisión la geometría de los  $\omega$ -límites de flujos analíticos. Éste es un problema relevante desde una perspectiva experimental, dado que los flujos provenientes de modelos de la Ciencia son casi siempre polinomiales y en particular analíticos. Este trabajo, aún en desarrollo, pretende dar una respuesta satisfactoria a dicha cuestión.

A continuación introducimos de manera rigurosa los conceptos y resultados que presentamos. Sea  $S$  una superficie. Un flujo (continuo) sobre  $S$  es una aplicación continua  $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  que satisface: (i)  $\Phi(0, x) = x$  para todo  $x \in S$ ; (ii)  $\Phi(t+s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$  para todo  $x \in S$  y todo

$t, s \in \mathbb{R}$ . Si  $\Phi(t, x) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que  $x$  es un punto singular de  $\Phi$ . Para cada  $x \in S$ , su  $\omega$ -límite asociado,  $\omega_\Phi(x)$ , se define como

$$\omega_\Phi(x) = \{y \in S : \exists (t_n)_n \rightarrow \infty; (\Phi(t_n, x))_n \rightarrow y\}$$

Diremos que un conjunto  $\Omega \subset S$  es realizable por el flujo  $\Phi$  si existen  $x \in S$  y un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tales que  $\Omega = h(\omega_\Phi(x))$ .

El propósito de este trabajo es dar una caracterización topológica de los conjuntos realizables por flujos analíticos en el plano  $\mathbb{R}^2$ , la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . Asimismo se describen las posibles configuraciones de puntos singulares que estos conjuntos pueden presentar.

## Sesión JA1: Sistemas extensos I

Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)

Aula 1.2

Modera: Ana María Mancho

### Análisis asintótico de ecuaciones degeneradas de reacción-difusión

Monique Madaune-Tort  
 Université de Pau et des Pays de l'Adour  
 Laboratoire de Mathématiques Appliquées, IPRA  
 Avenue de l'Université, BP 1155  
 64013 Pau Cedex, FRANCE

E-MAIL: [monique.madaune-tort@univ-pau.fr](mailto:monique.madaune-tort@univ-pau.fr)

COLABORADORES: Marc Falliero (U. Pau)

En el estudio de un fenómeno físico se obtiene la predicción del desarrollo de dicho fenómeno a través del tiempo por medio de un análisis asintótico. Así se puede determinar si el proceso analizado va a

- estabilizarse, sea cerca de un único estado estacionario o en un conjunto acotado;
- desaparecer o, al contrario, crecer y explotar.

En esta comunicación, se considera un modelo que se encuentra en mecánica de fluidos así como en biología:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \varphi(u) + \operatorname{div}(\nabla P f(u)) + g(x, u) = 0, \quad t \in ]0, +\infty[, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Por ejemplo, en el estudio de un flujo en un medio poroso la ecuación (1) es debida al uso de las leyes de conservación y de la ley de Darcy. Además, la ecuación (1) es parabólica y degenerada puesto que existen valores de  $u \in [0, +\infty[$  tales que  $\varphi'(u) = 0$ .

El comportamiento asintótico con respecto al tiempo de las soluciones positivas de (1) depende de las relaciones entre las funciones  $\varphi$  y  $g$ . Aquí se consideran condiciones sobre esos datos con el fin de obtener soluciones acotadas y definidas para cualquier valor de  $t$ . Por eso suponemos que

$$\exists \alpha \in [0, 1[, \exists (A, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; \quad \forall (x, v) \in \Omega \times ]A, +\infty[ \geq K_0, \quad |g(x, v)| \leq K \varphi(v)^\alpha. \quad (2)$$



En efecto, es bien conocido que sin la condición (2) existe un tiempo finito de explosión incluso en el caso límite  $\alpha = 1$ .

Las soluciones que consideramos tienen que verificar condiciones de contorno homogéneas en la frontera del dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Empezamos por justificar que, para cualquier dato inicial positivo y acotado, la ecuación (1) tiene una solución  $u$  positiva y acotada sobre  $]0, +\infty[ \times \Omega$ . Después, analizamos el comportamiento asintótico de  $u$  cuando  $t$  tiende a infinito y presentamos algunos resultados de convergencia principalmente en el caso de soluciones con simetría radial.

### Observación de la transición Ising-Bloch en una cavidad óptica no lineal

Adolfo Esteban Martín  
*Universidad de Valencia*  
*Departamento de Óptica,*  
*c/ Dr. Moliner, 50*  
*Burjassot, 46100*

E-MAIL: [adolfo.esteban@uv.es](mailto:adolfo.esteban@uv.es)

COLABORADORES: J. García (U. Valencia), E. Roldán (U. Valencia), V. B. Taranenko (U. Valencia), G.J. de Valcárcel (U. Valencia), and C. O. Weiss (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)

Muchos sistemas no lineales presentan soluciones dinámicamente equivalentes con la misma amplitud pero con fases diferenciadas en un factor  $\pi$ . En sistemas espacialmente extensos esta equivalencia permite la oscilación en antifase de dos regiones vecinas (dominios) que aparecen separadas por una interfase denominada pared de dominio. En particular, en sistemas ópticos no lineales en cavidades pueden encontrarse estructuras disipativas espacialmente extensas, que separan zonas de campo homogéneo donde la fase del campo óptico experimenta una variación de  $\pi$  a través de la interfase.

Básicamente existen dos tipos de paredes de dominio: paredes de Ising, donde el campo a través de la interfase es real (intensidad cero en el centro de la pared y cambio abrupto de fase) y paredes de Bloch, donde el campo óptico es complejo (intensidad no nula en el centro de la pared y cambio de fase más suave). En sistemas no potenciales, las paredes de Ising permanecen estáticas mientras que las paredes de Bloch presentan movimiento.

Existen diversos estudios teóricos basados en ecuaciones de parámetro de orden que predicen la existencia de estas paredes y su dinámica, donde cabe destacar la predicción de la transición entre paredes de Ising y de Bloch [1, 2].

En esta comunicación presentamos un sistema experimental de mezcla degenerada de cuatro ondas en un oscilador fotorrefractivo con alto número de Fresnel para la generación y estudio de paredes de dominio tanto formadas espontáneamente como por medio de una técnica de escritura y borrado basada en la inyección en el sistema de una perturbación externa.

El resultado más destacable es la observación por primera vez de la transición Ising-Bloch, obtenida variando el parámetro de desintonía (diferencia entre la frecuencia de la radiación de bombeo y la frecuencia del modo permitido más próximo de la cavidad) y analizando las características de fase, amplitud y velocidad de las paredes.

Se ha empleado una técnica de estabilización de la ca-

vidad óptica con el objetivo de controlar el parámetro de desintonía [3] y estudiar el intervalo de rango espectral libre donde se pueden generar paredes de dominio y su comportamiento dinámico.

Mediante una técnica de filtrado espacial se ha reconstruido tanto la fase como la amplitud del campo óptico a través de las paredes de dominio a partir de la imagen en intensidad de la interferencia entre el patrón espacial y el haz de referencia empleado [4]. Esto nos ha permitido analizar con detalle el tipo de estructuras presentes en nuestro sistema experimental donde hemos encontrado tanto paredes de Ising, predichas por la teoría, como paredes de Bloch, que no eran de esperar a partir de las ecuaciones que describen estos sistemas.

1. P. Coulet, J. Lega, B. Houchmanzadeh and J. Lajzewicz, Breaking chirality in nonequilibrium systems, *Phys. Rev. Lett.* 65, 1352 (1990).
2. G. J. de Valcárcel, I. Pérez-Arjona and E. Roldán, Domain walls and Ising-Bloch transitions in parametric driven systems, *Phys. Rev. Lett.* 89, 164101 (2002).
3. A. Esteban-Martín, J. García, E. Roldán, V. B. Taranenko, G. J. de Valcárcel, and C. O. Weiss, An experimental approach to transverse wave-number selection in cavity nonlinear optics, *Phys. Rev. A* (aceptado).
4. Ye. Larionova, U. Peschel, A. Esteban-Martín, J. García Monreal and C.O. Weiss, Ising and Bloch walls of phase domains in two-dimensional parametric wave mixing, *Phys. Rev. A* 69 (2004).

### Atractores de ecuaciones de reacción-difusión en dominios no acotados

Francisco Morillas Jurado  
*Universidad de Valencia*  
*Departamento de Análisis Matemático,*  
*Avda. Doctor Moliner, 50*  
*46100 Burjassot (Valencia)*

E-MAIL: [franmoju@alumni.uv.es](mailto:franmoju@alumni.uv.es)

COLABORADORES: José Valero Cuadra (U. Miguel Hernández de Elche)

Las ecuaciones de reacción-difusión se han empleado ampliamente para modelizar procesos físicos (e.g. difusión de gases, distribución de la temperatura), biológicos (e.g. modelos de poblaciones), ecológicos, químicos, etc. Una de las cuestiones más importantes en los modelos es determinar cuál es el comportamiento a largo plazo, es decir, cuando el tiempo converge a infinito. Es de particular importancia conocer si las trayectorias del sistema convergen a una cierta región.

En este trabajo se estudia el comportamiento asintótico (y en particular, la existencia de un atractor global) de ecuaciones de reacción-difusión en dominios no acotados. Estos nos permiten eliminar la rigidez de una frontera que en ciertos procesos físicos puede resultar poco adecuada. Por ejemplo, si consideramos la expansión de un gas en la atmósfera en un principio no parece razonable delimitar una zona del espacio acotada.

Más concretamente, la ecuación estudiada es

$$\begin{aligned} u_t &= a\Delta u - f(u, x) + h(x), x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(0) &= u_0, x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

donde  $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  es el laplaciano y se imponen ciertas restricciones sobre  $f$  y  $h$ . Demostramos la existencia de un atractor global, es decir, de un conjunto compacto e invariante del espacio de fases  $L^2(\mathbb{R}^N)$  que atrae uniformemente todas las trayectorias que parten de cualquier conjunto acotado de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

Desde el punto de vista matemático, la principal novedad con respecto a los trabajos existentes hasta el momento (véase [1,4]) reside en que la función no lineal  $f$  que rige la reacción es menos regular, ya que no se precisa que sea diferenciable, ni siquiera localmente lipschitziana, solamente que sea continua. Debido a este debilitamiento de las condiciones que se imponen la ecuación no posee una única solución del problema de Cauchy, por lo que hemos de utilizar la teoría de semiflujos multivaluados en lugar de semigrupos [3]. De esta forma ampliamos los resultados obtenidos en [4], en el que se demuestra la existencia del atractor para ecuaciones de reacción-difusión sin unicidad en regiones acotadas.

Las principales herramientas utilizadas en las demostraciones son la teoría de espacios de Sobolev y la obtención de estimaciones en estos espacios que permiten probar algunas propiedades necesarias de compacidad y acotación de las trayectorias.

1. J.M. Arrieta, J.W. Cholewa, T. Dlotko, A. Rodríguez-Bernal, Asymptotic behavior and attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains, *Nonlinear Anal.*, **56** (2004), 515-554.
2. A.V. Kapustyan, Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation, *Diff. Uravneniya*, **38** (2002), 1378-1381 (Traducido al inglés en *Differential Equations*, **38** (2002), 1467-1471).
3. V.S. Melnik, J. Valero, On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, *Set-Valued Anal.* **6** (1998), 83-111.
4. B. Wang, Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains, *Physica D*, **128** (1999), 41-52.

---

## Antiespirales en sistemas de reacción difusión oscilatorios

Ernesto Miguel Nicola

*Departament E.C.M., Facultat de Física,  
Universitat de Barcelona, Av. Diagonal 647,  
E-08028 Barcelona*

E-MAIL: [nicolae@ecm.ub.es](mailto:nicolae@ecm.ub.es)

WWW: <http://www.ecm.ub.es/>

COLABORADORES: Lutz Brusch (Centre de Bioingénierie Gilbert Durand, Toulouse, Francia), Markus Bär (Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Dresden, Alemania)

En experimentos recientes llevados a cabo en la reacción de Belousov-Zhabotinsky en microemulsiones (V.K. Vanag y I.R. Epstein, *Science* **294**, 835 (2001)), se han visto por primera vez las llamadas *antiespirales*. En estas estructuras rotantes, a diferencia de las espirales que surgen comúnmente en medios oscilatorios, las ondas emitidas por el núcleo de la estructura se dirigen hacia el centro.

En este trabajo se estudia, tanto teórica como numéricamente, la existencia de antiespirales en medios de reacción difusión oscilatorios. Basándonos en un análisis débilmente

no lineal de estos sistemas (*i.e.* usando ecuaciones de amplitud), se deriva analíticamente un criterio que nos permite predecir la existencia de antiespirales o espirales (L. Brusch, E.M. Nicola y M. Baer, a aparecer en *Phys. Rev. Lett.* (2004)). La validez de este criterio general es puesto a prueba con simulaciones numéricas de un par de sistemas típicos de reacción difusión. Estas simulaciones verifican la validez del criterio analítico y revelan la existencia de antiespirales en zonas relativamente pequeñas del espacio de parámetros.

---

## Sesión JA2: Predicción

Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)

Aula 2.2

Modera: Manuel de Castro

---

## Predicción y control medioambiental: un ejemplo a través de un sistema dinámico discreto

Mariló López González

*Universidad Politécnica de Madrid  
E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos,  
c/Ciudad Universitaria, sn  
Madrid, 28040*

E-MAIL: [ma08@caminos.upm.es](mailto:ma08@caminos.upm.es)

COLABORADORES: Javier Rodrigo Hitos (U. Pontificia Comillas), Jose Juan de Sanjosé (U. Politécnica de Cáceres)

En general, la predicción del futuro a partir del conocimiento del pasado es un problema central en la ciencia. En particular, en el marco de la Ingeniería Geodésica y Cartográfica, la posibilidad de predecir el comportamiento de ciertas áreas o estructuras puede ser de gran utilidad y ahorrar numerosos trabajos de campo así como evitar cierto tipo de desastres medioambientales. En este trabajo se propone la utilización de herramientas matemáticas para el avance en esta clase de estudios. Dichas herramientas son el ajuste de modelos matemáticos, los sistemas dinámicos y el estudio de su estabilidad. Como ejemplo de la puesta en práctica de esta teoría predictiva de los sistemas dinámicos, se ha desarrollado un modelo para las varillas o dianas situadas en el glaciar de las Argualas (Pirineos Centrales). Dicho modelo permitirá el estudio asintótico de la deformación del glaciar en función de dos parámetros que en este caso, por su gran relevancia, son la temperatura y el nivel de precipitaciones en la zona. El estudio dinámico de dicho glaciar realizado durante los años 1991-2000 con técnicas de Geodesia clásica ha permitido contar con los datos necesarios (en forma de serie temporal) para la búsqueda del modelo y para su estudio evolutivo. De esta manera, ha sido posible encontrar la ley de evolución del sistema de manera que se obtenga el valor de la posición de cada diana del glaciar en función de su posición anterior y de los valores que tomen dos variables de gran influencia y fácilmente conocidas (temperatura y precipitación) para este tipo de movimientos.

## Redes neuronales y sistemas dinámicos complejos

M. Victoria Caballero Pintado  
*Universidad de Murcia*  
*Facultad de Economía y Empresa*  
*Campus de Espinardo*  
*Murcia, 30100*

E-MAIL: mvictori@um.es

COLABORADORES: Lourdes Molera Peris

En el estudio de series temporales los métodos lineales son los adecuados para interpretar una estructura regular siempre que la serie proceda de un sistema dinámico lineal. Sin embargo, cuando el sistema del que procede tiene un comportamiento irregular o complejo, se necesitan métodos de análisis no lineales.

Los modelos matemáticos de redes neuronales [3] son una herramienta de gran utilidad en la estimación de funciones no lineales generadoras de datos suficientemente próximos a los que se quiere estudiar. Por ello, las redes neuronales se utilizan en campos tan diversos como Economía, Física, Biología... en el intento de predecir el siguiente valor de una serie dada.

En este trabajo se estudian series temporales obtenidas de sistemas dinámicos deterministas no lineales (Lozi, Hénon), series temporales i.i.d. y series temporales deterministas contaminadas con ruido. Se utiliza el test BDS para confirmar que la serie presenta una estructura subyacente estocástica o determinista frente a un comportamiento i.i.d. Además, se calcula, para cada serie de datos, su dimensión de correlación, su mayor exponente de Lyapunov, etc., cantidades que permiten confirmar la importancia de la componente determinista de la serie frente a la componente aleatoria [2].

En segundo lugar se emplean distintos modelos de redes neuronales (MLP y recurrentes, [1]) para predecir el valor futuro de las series consideradas.

Por último se intentará aplicar estos procedimientos a una serie de datos económicos [4].

1. Dorffner, G. (1996). Neural Network for time series processing, *Neural Network World* 6 (4) 447-468.
2. Kantz, H. and Schreiber, T. (1999). *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge Nonlinear Science Series 7, Cambridge.
3. Norgaard, M., Ravn, O., Poulsen, N.K. and Hansen, L.K. (2003, 3a edición). *Neural Network for modelling and control of dynamic systems*, Springer, London.
4. Olmeda, I. and Pérez J. (1995). Non-linear dynamics and chaos in the Spanish Stock Market, *Investigaciones Económicas* 19 (2) 217-248.

## Predicción de la precipitación mediante autómatas celulares

Óscar García Delgado  
*Universidad de Salamanca*  
*E.T.S.I. Industriales*  
*Av. Fernández Ballesteros 2*  
*37700 Béjar (Salamanca)*

E-MAIL: ogd@usal.es

COLABORADORES: Ascensión Hernández Encinas (Universidad de Salamanca), Ángel Martín del Rey (Universidad de Salamanca) Concepción Rodríguez Puebla (Universidad de Salamanca)

En este trabajo se presenta un nuevo modelo para la predicción de una de las variables climáticas más importantes: la precipitación. Dicho modelo está basado en la teoría de autómatas celulares probabilísticos finitos, los cuales no son más que un tipo particular de sistema dinámico discreto. Se muestra que el grado de acierto de este modelo es bastante elevado, lo cual le convierte en una alternativa a los procedimientos existentes en la actualidad y basados la mayor parte de ellos en técnicas matemáticas de carácter continuo.

---

## Sesión JA3: Dinámica de fluidos computacional

Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: J. Durany

---

## Producto de elementos finitos y método espectral para modelos de Navier-Stokes hidrostáticos

Francisco Guillén González  
*Universidad de Sevilla*  
*Depto. EDAN,*  
*Apto. 1160, 41080 Sevilla*

E-MAIL: guillen@us.es  
 WWW: <http://www.personal.us.es/guillen>

COLABORADORES: Leonardo Baffico (U. Chile), Rafael Rodríguez Galván (U. Cádiz)

El modelo de Navier-Stokes hidrostático NSH (también llamado de Ecuaciones Primitivas) se deduce de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles al imponer la hipótesis de presión hidrostática (proporcional según la profundidad). Resulta un modelo ampliamente utilizado en dominios delgados, como es el caso de fluidos geofísicos (atmósfera y océanos).

Al modelar la circulación general en océanos, partimos de un dominio  $2D$  de la superficie y una función profundidad que generan el dominio  $3D$ . Si imponemos hipótesis de techo rígido y aproximación del  $\beta$ -plano, el modelo NSH se puede reformular como un sistema diferencial/integral para una nueva incógnita  $2D$  de tipo presión (definida en la superficie) y el campo  $3D$  de velocidad horizontal, pasando a ser la velocidad vertical una variable pronóstico, calculada

---

en función de la velocidad horizontal gracias a la ecuación de incompresibilidad, quedando una nueva restricción de tipo divergencia pero de una integral vertical.

En esta comunicación tratamos la aproximación numérica de NSH, usando elementos finitos  $2D$  estables en la superficie del dominio producto con una apropiada base de polinomios de Legendre en la variable vertical, habiendo previamente renormalizado la parte vertical del dominio a  $[-1, 1]$  mediante un cambio de variables, que introduce la dependencia de la función fondo como coeficientes en el nuevo sistema de EDP.

Veremos distintas posibilidades de obtener discretizaciones estables y convergentes del modelo, basadas en considerar un par de elementos finitos estables en la superficie.

La aproximación numérica de NSH ha sido tratada bastante intensamente en la última década. En todos los trabajos anteriores que conocemos, se usan elementos finitos  $3D$  definidos en mallas prismáticas. El método que se presenta tiene la ventaja principal de tener solamente una malla superficial y no tener malla en la vertical, con lo que se simplifica bastante el tratamiento de los términos integrales en vertical, además de disminuir el número de grados de libertad necesarios para conseguir estabilidad de la presión.

---

### Semiflujos estocásticos generalizados y su comportamiento asintótico. Atractores para las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes

Pedro Marín Rubio  
 Universidad de Huelva  
 Facultad de Ciencias Experimentales,  
 Avda. Fuerzas Armadas, s/n  
 Huelva, 21071

E-MAIL: [pedro.marin@dmfmat.uhu.es](mailto:pedro.marin@dmfmat.uhu.es)  
 WWW: <http://www.uhu.es/pedro.marin>

COLABORADORES: James C. Robinson (Mathematics Institute, U. Warwick, Coventry, Reino Unido)

Como es bien sabido, uno de los principales paradigmas en la Mecánica de Fluidos son las ecuaciones de Navier-Stokes. Como otros sistemas dinámicos, su estudio en determinadas situaciones resulta difícil de abordar debido a comportamientos caóticos (en este contexto: la turbulencia). La teoría de atractores intenta, incluso en estos casos, arrojar luz sobre la dinámica del sistema, y, al igual que con respecto a la existencia y unicidad, el caso determinista y bidimensional ha sido tratado con éxito por diversos autores. Sin embargo, el caso tridimensional no resulta tan simple, ya que la existencia global en tiempo de soluciones regulares, así como la unicidad de soluciones débiles (éstas sí existen globalmente en tiempo), son, salvo casos concretos, cuestiones abiertas; la misma dificultad cabe reseñar por tanto de un análisis asintótico del problema.

En un artículo de 1997, Ball definió lo que se entiende por un semiflujo generalizado, para considerar conjuntos de soluciones relativas a ecuaciones diferenciales sin unicidad (tanto real como por desconocimiento). Concretamente aplicó esta teoría a las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales, y probó la existencia de un atractor global bajo la hipótesis de que las soluciones débiles eran continuas de  $(0, \infty)$  en el espacio de fases natural para el problema:  $L^2$ , en contraposición con estudios previos de otros autores.

En este trabajo adaptamos su teoría para tratar ecuacio-

nes estocásticas en las que puede haber el mismo problema con respecto a la unicidad, y lo aplicamos concretamente a las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales con ruido blanco aditivo, combinadas adecuadamente con el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y propiedades de ergodicidad; introducimos la noción análoga de semiflujo estocástico generalizado, y probamos un resultado similar al de Ball relativo a la existencia de atractor. Cabe destacar que las condiciones de invariancia, medibilidad y atracción son ahora totalmente distintas, ya que el problema es no autónomo, por lo que la noción apropiada es la de atractores en sentido *pullback*, y la aplicación multivaluada que aparece en el problema no ha de satisfacer las condiciones estándar para obtener tanto la medibilidad como la invariancia. Esta dificultad queda resuelta mediante el Teorema de Recurrencia de Poincaré y otros resultados para compactos aleatorios debidos a Crauel.

1. Marín-Rubio, P.; Robinson, J.: Attractors for the three-dimensional stochastic Navier-Stokes equations, *Stochastics & Dynamics* **3** pp. 279–297, 2003.

---

### Inestabilidad de *streak breakdown* y transición a la turbulencia en el problema de Hagen-Poiseuille

Álvaro Meseguer Serrano  
 Universidad Politécnica de Cataluña  
 Departamento de Física Aplicada,  
 c/Jordi Girona 1-3,  
 Barcelona, 08034

E-MAIL: [alvar@fa.upc.es](mailto:alvar@fa.upc.es)  
 WWW: <http://dfa.upc.es/websfa/fluids/alvar/meseguer.html>

COLABORADORES:

La transición a la turbulencia en el problema de Hagen-Poiseuille (flujo viscoso en una tubería de sección circular) sigue siendo uno de los problemas clásicos todavía no resueltos de la dinámica de fluidos. La evidencia numérica sugiere que el flujo de Hagen-Poiseuille es linealmente estable para cualquier valor del número de Reynolds  $Re = Ua/\nu$ , siendo  $U$  la velocidad máxima del fluido,  $a$  el radio de la tubería y  $\nu$  la viscosidad cinemática. Experimentalmente, el flujo transita a régimen turbulento en el laboratorio para  $Re \sim 2000$ .

Recientemente se han propuesto diferentes escenarios de transición subcrítica en otros problemas, tales como el flujo de Couette-Poiseuille plano, donde la cizalla también es el mecanismo de inestabilidad. En particular, se ha demostrado que pequeñas perturbaciones con vorticidad paralela a la dirección de advección del flujo básico pueden modular transitoriamente dicho perfil. La modulación da lugar a un flujo secundario que contiene puntos silla y que es potencialmente inestable frente a perturbaciones infinitesimales tridimensionales. Este mecanismo, denominado *streak breakdown*, puede ser uno de los responsables de la transición a la turbulencia en el flujo de Hagen-Poiseuille.

En el presente trabajo se analiza numéricamente la evolución transitoria de perturbaciones independientes de la dirección axial en el problema de Hagen-Poiseuille, así como su estabilidad frente a perturbaciones tridimensionales. Se concluye que la amplitud crítica necesaria para inestabilizar el flujo básico disminuye con el número de Reynolds como

$A_c \sim \text{Re}^{-3/2}$ . Los resultados numéricos obtenidos concuerdan con los datos experimentales.

## Sesión JA4: Caos II

Jueves, 3 de junio (10:30-11:50)  
Teatrillo de San Pedro Mártir  
Modera: S. Ibáñez

### Caos en la música española del siglo XVI

Ruth Mateos de Cabo  
Universidad San Pablo-CEU  
C/ Julian Romea, 23  
Madrid, 28003

E-MAIL: [matcab@ceu.es](mailto:matcab@ceu.es)

COLABORADORES: Eva Mateos de Cabo (I.E.S. Barrio de Bilbao), Ricardo Gimeno Nogués (Universidad Pontificia Comillas), Miguel Angel Pelacho Aja (Universidad San Pablo-CEU)

Estudios recientes han observado rasgos de autosemejanza y formas fractales en algunas piezas musicales de Bach y Pergolesi, como es el caso de varias fugas de Bach, en las que los mismos motivos se repiten con variaciones de la velocidad de cada una de las voces respecto de la voz principal. En la música barroca el tema se invierte en el tiempo, a la vez que los tonos agudos y los graves interfieren entre sí creando un tipo de complejidad que puede estar relacionada con las formas fractales.

En el trabajo que se ha llevado a cabo se presenta un estudio de la música española del siglo XVI del compositor Antonio de Cabezón, llamado por algunos el *Bach español*. En particular, se pretende averiguar si la estructura musical contiene elementos a partir de los cuales se pueda afirmar que la música de este compositor sigue patrones fractales.

Para ello se utiliza una grabación en CD de una pieza de Antonio de Cabezón (“Diferencias sobre el canto del caballero”). Como tal, al ser una grabación digital, resulta posible transformarla en una serie temporal. Y es esta serie la que se ha procedido a analizar en busca de comportamiento no lineal y eventualmente caótico. Tras reconstruir el atractor con la búsqueda del mínimo de información mutua y de la dimensión de inmersión óptima, se ha procedido a comprobar si la serie temporal reconstruida cumple con las propiedades de dinámica caótica, obteniendo el exponente de Lyapunov y la dimensión de correlación. Además, se ha intentado a través de redes neuronales y el método del *kernel* reconstruir la melodía original, técnica que podría ser utilizada para la generación de nuevas variaciones a partir de secuencias de números con determinadas propiedades.

### La distribución de ceros de la función de Husimi como indicador de caos cuántico

Francisco Javier Arranz Saiz  
Universidad Politécnica de Madrid,  
E.T.S.I. Agrónomos,  
Departamento de Física y Mecánica,  
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid.

E-MAIL: [fjarranz@fis.etsia.upm.es](mailto:fjarranz@fis.etsia.upm.es)

COLABORADORES: Luis Seidel (U. Politécnica de Madrid), Carlos González Giralda (CIEMAT), Rosa María Benito (U. Politécnica de Madrid) y Florentino Borondo (U. Autónoma de Madrid)

La estructura nodal de la función de onda en la representación habitual de posiciones se ha mostrado, como observaron Stratt y colaboradores [1] y admitiendo las puntualizaciones de De León y colaboradores [2], un criterio útil en la clasificación de los estados cuánticos de sistemas clásicamente caóticos, en lo que respecta a su carácter irregular (caótico) inducido por la no linealidad clásica subyacente (indicador de caos cuántico). Conforme a este criterio la función de onda de un estado regular sería aproximadamente factorizable en funciones dependientes de cada grado de libertad, es decir, se pueden asignar números cuánticos mediante el recuento de los nodos correspondientes a cada grado de libertad.

Más recientemente Leboeuf y colaboradores [3] mostraron la relevancia de la distribución de ceros de la función de Husimi como indicador de caos cuántico. Así los estados regulares poseen una distribución de ceros lineal (monodimensional), mientras que los estados caóticos poseen una distribución difusa por todo el espacio accesible.

Como es bien sabido, la función de Husimi se puede definir como la densidad de probabilidad en la representación de estados coherentes. En este sentido, la distribución de sus ceros se puede considerar como la estructura nodal de la función de onda en dicha representación de estados coherentes. Lo interesante de esta representación es que define un espacio de fases cuántico a través de unas variables de posición y momento que son realmente los valores medios de los operadores de posición y momento.

Posteriormente nosotros abordamos el estudio de los ceros de la función de Husimi en sistemas moleculares, en particular en la molécula LiCN, obteniendo la relación existente entre los criterios de la estructura nodal y de la distribución de ceros. Por otra parte encontramos cómo la transición entre orden y caos queda determinada por una frontera de cicatrices cuánticas (*scars* en inglés) cuya distribución de ceros es lineal, excepto para una serie de ceros que se sitúan sobre la órbita periódica complementaria a la que induce la cicatriz cuántica [4].

En esta comunicación presentaremos los resultados de las distribuciones de ceros de la función de Husimi sobre una superficie de sección cuántica para los sistemas moleculares HCN y HO<sub>2</sub>, junto con los resultados previos para la molécula LiCN, los cuales ponen de manifiesto la gran utilidad de este indicador de caos cuántico en la identificación de los estados cicatriz de la frontera orden-caos, así como de los estados regulares y caóticos. Las notables diferencias entre los tres sistemas nos permitirán aventurar la generalidad o particularidad de las características halladas.

1. R. M. Stratt, N. C. Handy, W. H. Miller, *J. Chem. Phys.* **71**, 3311 (1979).

2. N. de León, M. J. Davis, E. J. Heller, *J. Chem. Phys.* **80**, 794 (1984).
3. P. Lebœuf, A. Voros, *J. Phys. A* **23**, 1765 (1990); P. Lebœuf, *J. Phys. A* **24**, 4575 (1991); M. B. Cibils, Y. Cuhe, P. Lebœuf, W. F. Wreszinski. *Phys. Rev. A* **46**, 4560 (1992).
4. F. J. Arranz, F. Borondo y R. M. Benito, *Phys. Rev. E* **54**, 2458-2464 (1996), *Phys. Rev. Lett.* **80**, 944-947 (1998), *J. Mol. Struct. (Theochem)* **426**, 87-93 (1998).

## Sub-órbitas sindéticas densas

Alfred Peris Manguillot  
*Universitat Politècnica de València*  
*E.T.S. Arquitectura,*  
*Departament de Matemàtica Aplicada*  
*València, 46022*

E-MAIL: [aperis@mat.upv.es](mailto:aperis@mat.upv.es)  
 WWW: <http://ttt.upv.es/~aperis/>

COLABORADORES: Luis Saldivia (Michigan State University)

Un sistema dinámico discreto  $(X, T)$  consiste en un espacio topológico  $X$  y una aplicación continua  $T: X \rightarrow X$ . Dado un elemento  $x \in X$ , su órbita mediante  $T$  es  $Orb(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ . Si  $x \in X$  y  $\{n_k\}_k$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, llamaremos sub-órbita asociada a  $Orb(\{T^{n_k}\}_k, x) = \{x, T^{n_1}x, T^{n_2}x, \dots\}$ . Nosotros nos centraremos en el estudio de sub-órbitas sindéticas, que son las que aparecen cuando se cumple que  $\sup_k \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$  (o sea,  $\{n_k\}_k$  es una sucesión sindética). Nuestro objetivo es relacionar la existencia de órbitas densas en  $X$  con la existencia de ciertas sub-órbitas sindéticas densas en  $X$ .

La densidad de órbitas es un fenómeno intrínseco en la mayor parte de las nociones conocidas de caos para sistemas dinámicos, en el sentido topológico. Generalmente éste es el ingrediente del caos que requiere un mayor esfuerzo para ser calculado de forma rigurosa.

Concretamente, el sistema dinámico  $(X, T)$  es topológicamente transitivo si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos  $U, V \subset X$  existe un número natural  $n$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .  $(X, T)$  cumple la propiedad de ser débilmente *mixing* si, dados  $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$  abiertos no vacíos, existe un natural  $n$  tal que  $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$  y  $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$  simultáneamente, lo cual es en general más fuerte que ser transitivo. Nosotros probamos que  $(X, T)$  es débilmente *mixing* si y sólo si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos  $U, V \subset X$  y para cada sucesión sindética  $\{n_k\}_k$  existe un número natural  $n \in \{n_k\}_k$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . En el caso particular de que  $X$  sea un espacio de Baire separable sin puntos aislados, la transitividad de  $(X, T)$  equivale a que existan  $x \in X$  cuya órbita respecto  $T$  sea densa en  $X$ . Como consecuencia obtenemos que, bajo dichas hipótesis en  $X$ , el sistema dinámico  $(X, T)$  es débilmente *mixing* si y sólo si para cada sucesión sindética  $\{n_k\}_k$  existe una sub-órbita asociada a dicha sucesión que es densa en  $X$ . Por otra parte obtenemos que toda sub-órbita sindética de una órbita densa en un espacio  $X$  sin puntos aislados es necesariamente densa en alguna parte, es decir, su clausura contiene un abierto no vacío. En contraposición también observamos que toda órbita densa admite una sub-órbita

sindética que no es densa en todo  $X$ . Estos resultados tienen consecuencias en la dinámica lineal de operadores definidos en espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita. En este contexto, la existencia de órbitas densas implica la dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales, fenómeno también conocido como efecto mariposa.

## Crisis interiores continuas en el modelo neuronal de Hindmarsh-Rose

Jesús Manuel González Miranda  
*Departamento de Física Fundamental*  
*Universidad de Barcelona,*  
*Avenida Diagonal, 647*  
*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [jgm@ffn.ub.es](mailto:jgm@ffn.ub.es)  
 WWW: <http://hermes.ffn.ub.es/~jgm/>

Los sistemas no-lineales presentan distintas dinámicas, caóticas o no, en función de los parámetros que describen al sistema o a las acciones externas a que éste se ve sometido. Cuando los parámetros experimentan cambios pequeños, la dinámica se suele modificar sólo ligeramente. Esto, sin embargo no es siempre así, pues existen puntos críticos que se caracterizan porque pequeños cambios en su entorno pueden dar lugar a cambios abruptos en la dinámica. Ejemplos son las rutas hacia el caos por las que un sistema puede transitar desde una dinámica no caótica a otra caótica. Éstas han recibido una atención considerable desde el principio del estudio de la teoría del caos. Por otro lado, las transiciones caos-caos, en las que la naturaleza caótica de la dinámica cambia abruptamente entre atractores caóticos cualitativamente distintos, ha recibido menos atención, a pesar de que son igualmente importantes. Ejemplos de estas transiciones son las crisis interiores [1] consistentes en cambios discontinuos del tamaño de un atractor que ocurren cuando una órbita periódica inestable choca con un atractor caótico. En esta contribución se presenta evidencia numérica y razonamiento teórico que prueban la existencia de transiciones caos-caos en las que el cambio de tamaño del atractor es súbito, pero continuo [2]. Estas ocurren en sistemas que pertenecen a una clase importante en biología y química: sistemas que presentan dinámicas de brotes y espigas. En la dinámica de espigas, la evolución temporal de al menos una variable relevante del sistema se caracteriza por una sucesión de picos muy agudos, llamados espigas, a intervalos de tiempo más o menos regulares. En la dinámica de brotes la dinámica se caracteriza por la alternancia de periodos de reposo con periodos de dinámica de espigas, llamados brote, y que también pueden tener un carácter más o menos regular. Las neuronas son ejemplos de estos sistemas para los que el ritmo de aparición de las espigas es de gran importancia debido a que se cree que codifica la información transmitida por la neurona. En este caso, la transición entre esos dos regímenes es un tema de importancia capital, pues está relacionada con cambios relevantes para la codificación de información. Aquí se presenta un estudio de la transición entre estos dos tipos de dinámica en un modelo de neurona bien establecido: el modelo de Hindmarsh-Rose [3]. La transición entre estos dos regímenes proporciona un ejemplo de crisis interior continua, que se estudia y caracteriza mediante simulaciones por ordenador. Además, un análisis matemático, basado en el uso de aplicaciones unidimensionales, muestra que el me-

canismo de esta transición es un cambio de dinámica entre dos formas universales de comportamiento caótico: la de la aplicación logística y la de la aplicación en tienda.

1. C. Grebogi, E. Ott, y J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1507.
2. J. M. González-Miranda. *Chaos* 13 (2003) 845.
3. J. L. Hindmarsh y R. M. Rose, *Proc. R. Soc. London B* 221 (1984) 87.

## Sesión JB1: Poblaciones estructuradas

Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)

Aula 1.2

Modera: Joan Saldaña

### Medidas entrópicas de divergencia composicional. Estudio teórico y aplicación a la segmentación de secuencias simbólicas de ADN

José Martínez Aroza  
*Universidad de Granada*  
*Facultad de Ciencias,*  
*Avda. Fuentenueva s/n*  
*Granada, 18071*

E-MAIL: [jmaroza@ugr.es](mailto:jmaroza@ugr.es)

La divergencia de Jensen-Shannon ha sido ampliamente usada por los autores como una función discriminante apropiada para decidir posiciones de corte en un proceso iterativo de segmentación de secuencias simbólicas no estacionarias y para su caracterización mediante la complejidad composicional derivada de esa misma función. Los algoritmos basados en ella se aplican a las cadenas de ADN. En este trabajo de continuación se profundiza la base teórica que apoya el uso de esta función, introduciendo sus variantes extensivas, la discrepancia binaria (D) y la discrepancia global (GD) de una secuencia segmentada. Ambas expresiones no lineales tienen las siguientes propiedades destacadas que la hacen útil para segmentar secuencias simbólicas mediante un procedimiento heurístico iterativo, y para obtener una medida de complejidad composicional de la secuencia así segmentada.

- A lo largo de la secuencia, la discrepancia máxima entre las dos partes en que queda dividida en cada posición no puede darse en un punto interior de una región composicionalmente homogénea. Este teorema justifica el procedimiento que recorre, en cada iteración, la secuencia completa, y la corta en la posición de máxima discrepancia
- La GD de una secuencia segmentada es independiente del camino seguido en el proceso de segmentación, o sea en la ordenación temporal de los cortes sucesivos, el cual puede incluir también supresiones de cortes. Es una propiedad fundamental de la función GD, sustentada por un amplio análisis teórico.
- La función D es autoconfiable, en el sentido de que representa una medida de la verosimilitud de que las subsecuencias que relaciona no hayan sido generadas

en un proceso aleatorio. Por ello, la sucesión de cortes determinada por el criterio de máxima discrepancia coincide con el criterio de máxima fiabilidad estadística del resultado.

Basado en estas propiedades, se ha desarrollado un algoritmo heurístico de segmentación, versión mejorada de otros ya publicados por incluir la posibilidad de supresión de un corte anterior si su discrepancia actualizada decae bajo un cierto grado de significación. Se presenta la discrepancia global de una secuencia segmentada con los criterios citados como una medida de la complejidad composicional de la secuencia al nivel de fiabilidad determinado por el más bajo utilizado en el proceso. Como ejemplo, se han segmentado algunas secuencias de ADN y se han obtenido sus propiedades composicionales.

### Memoria in vivo en cuasiespecies de retrovirus

Carlos Briones Llorente  
*Centro de Astrobiología, INTA-CSIC*  
*Ctra. de Ajalvir km. 4*  
*28850 Torrejón de Ardoz, Madrid*

E-MAIL: [brioneslc@inta.es](mailto:brioneslc@inta.es)

WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: Esteban Domingo (CAB y Centro de Biología Molecular "Severo Ochoa") y Carmen Molina-París (University of Warwick y University of Leeds)

Los virus con genoma de RNA se caracterizan por replicarse como distribuciones complejas de genomas relacionados pero no idénticos, denominadas cuasiespecies víricas. El conjunto de partículas virales diferentes que constituye una cuasiespecie está relacionado mutacionalmente y se organiza como un espectro o cola de mutantes en torno a la secuencia más representada o secuencia maestra. Empleando el virus de la fiebre aftosa en experimentos in vitro se ha descrito que las cuasiespecies poseen una memoria molecular de su historia evolutiva anterior, mantenida en forma de componentes minoritarios dentro de su espectro de mutantes [1]. Los genomas memoria son el resultado de la selección de un grupo de virus minoritarios por su resistencia a una presión selectiva (por ejemplo, la aplicación de un fármaco antiviral), de forma que pasan a ser mayoritarios dentro de la cuasiespecie y su fitness medio aumenta. Cuando tal presión selectiva se retira, los genomas resistentes son desplazados por genomas sensibles con mayor fitness y retornan a un nivel que vuelve a ser globalmente minoritario, pero mayor que el nivel de partida (típicamente, en torno a  $10^{-2}$  frente al  $10^{-4}$  inicial). La existencia de tal registro histórico de los genomas que fueron seleccionados en el pasado puede permitir a la cuasiespecie responder con mayor eficacia a presiones selectivas análogas a las previamente aplicadas a la misma población. Los retrovirus son una familia de virus RNA caracterizados por poseer un ciclo infeccioso con dos fases: i) retrotranscripción del RNA genómico viral en DNA por medio de una transcriptasa reversa del propio virus, en el citoplasma de la célula infectada; ii) integración del DNA retrotranscrito dentro del genoma de la célula hospedadora, permitiendo que el DNA proviral presente en el núcleo de la célula infectada se replique y exprese empleando la maquinaria celular. Para investigar la existencia de memoria en cuasiespecies de retrovirus in vivo se ha realizado un análisis filogenético

de series de secuencias obtenidas de infecciones por el virus de la inmunodeficiencia humana tipo 1 (VIH-1) y se ha desarrollado un modelo matemático basado en la teoría de cuasiespecies. El modelo, que incorpora tres componentes en la cuasiespecie ligados mutacionalmente (con una tasa de mutación constante) y considera una población total constante (sin degradación de genomas), ha sido resuelto de forma analítica y numérica [2]. Se ha determinado que, además de la memoria replicativa asociada a la dinámica de las cuasiespecies víricas, los retrovirus poseen otro tipo de memoria debido a su ciclo integrativo y a la presencia de reservorios virales en compartimentos anatómicos o celulares. La combinación de ambas clases de memoria permite la selección de mutantes (por ejemplo, resistentes a fármacos o a la presión del sistema inmune) a partir de genomas minoritarios presentes en la cuasiespecie, y la reemergencia de genomas mantenidos en reservorios durante largos períodos de la infección. Se discutirá la relevancia de la memoria in vivo de cuasiespecies de retrovirus, y su relación con los fenómenos de memoria descritos en otros sistemas complejos.

1. Ruiz-Jarabo *et al.* (2000). *J. Virol.* **74**, 3543; Domingo *et al.* (2000). *Virology* **270**, 251; Ruiz-Jarabo *et al.* (2002). *J. Mol. Biol.* **315**, 285; Ruiz-Jarabo *et al.* (2003). *J. Mol. Biol.* **333**, 553.
2. Briones *et al.* (2003). *J. Mol. Biol.* **331**, 213.

## Estudio de la estabilidad en un modelo no lineal de dinámica de poblaciones estructuradas

Jordi Ripoll i Missé  
Dpt. d'Informàtica i Matemàtica Aplicada,  
Universitat de Girona,  
Campus Montilivi,  
E-17071 Girona.

E-MAIL: [jripoll@ima.udg.es](mailto:jripoll@ima.udg.es)  
WWW: <http://ima.udg.es/~jripoll>

COLABORADORES: Àngel Calsina i Ballesta (Universitat de Girona)

En los modelos clásicos de Sharpe-Lotka-McKendrick (versión lineal) y Gurtin-MacCamy (versión no lineal) para la dinámica de poblaciones estructuradas por la edad, no se tiene en cuenta explícitamente la reproducción sexual. Siguiendo estos trabajos hemos estudiado algunos modelos de dinámica de poblaciones con reproducción sexual. Este tipo de modelos son necesariamente no lineales ya que, incluso sin considerar la competencia por los recursos, el número de nacimientos por unidad de tiempo es un término cuadrático en primer orden.

Uno de los modelos estudiados es el llamado hermafroditismo secuencial, que ha sido observado en un 10% de las especies de peces. Este fenómeno consiste en que los individuos empiezan siendo de un sexo, pero en un momento de su vida, cambian al otro sexo al llegar a un cierto tamaño (digamos, a una cierta edad). Como hipótesis del problema suponemos que esta edad crítica (cambio de hembra a macho) es una variable aleatoria no negativa con función de distribución de probabilidad fijada  $s(x)$ . El sistema para las densidades de hembras y machos respecto a la edad  $a$  viene descrito por dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden más dos condiciones de frontera en  $a = 0$ . El sistema tiene un subespacio invariante exponencialmente atractor.

Sobre este subespacio el sistema se reduce a la siguiente ecuación para la densidad de individuos  $u(a, t)$  respecto a la edad  $a$ , en el instante de tiempo  $t$ , con una sola condición de frontera:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial a} u + \mu(a, P) u = 0,$$

$$u(0, t) = \frac{\int_0^\infty \beta(x, P) (1 - s(x)) u(x, t) dx}{1 + h \int_0^\infty \gamma(x, P) s(x) u(x, t) dx},$$

donde  $P = \int_0^\infty u(x, t) dx$  es la población total. En este caso,  $s(x)$  resulta ser la proporción de individuos machos de edad  $x$ . Nótese que tanto la ecuación como la condición de frontera (número de nacimientos por unidad de tiempo) contienen términos integrales, dando lugar a las llamadas ecuaciones integro-diferenciales. El número de nacimientos se ha modelizado vía una función de Holling de tipo II, para incorporar un cierto grado de saturación en el sentido de no hacer proporcional el número de nacimientos al de machos cuando éste es muy grande.

Usando la población total  $P$  como una función de Lyapunov, hemos obtenido algunos resultados del comportamiento asintótico global: el origen es asintóticamente estable (manifestando el efecto *Allee*), las trayectorias son acotadas y existe una bola en  $L^1$  positivamente invariante (debido a la competencia por los recursos).

Se obtienen condiciones naturales para la existencia de soluciones estacionarias no triviales. Para el caso particular en que no consideramos competencia, *i.e.* las funciones  $\mu$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  no dependen de  $P$ , existe como máximo un equilibrio no trivial que se obtiene explícitamente.

Usando el principio de la estabilidad lineal para este tipo de ecuaciones integro-diferenciales, hemos demostrado que cuando hay una única solución estacionaria del caso sin competencia, ésta es siempre inestable. Más concretamente, hemos probado que existe un único valor propio real y que es estrictamente positivo.

Una dirección de trabajo que también se está analizando es el estudio de la distribución de la edad del cambio de género  $s(x)$  desde el punto de vista de la evolución biológica. En este sentido se investiga el valor evolutivamente estable (esto es, inmune a invasiones por parte de poblaciones mutantes) de  $s(x)$ .

## Sesión JB2: Variedades invariantes

Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)  
Aula 2.2  
Modera: Amadeu Delshams

### Cálculo de toros invariantes en un *cluster* de PCs

Estrella Olmedo  
Universitat de Barcelona  
Facultat de Matemàtiques,  
Gran Via de les Corts Catalanes, 585  
Barcelona, 08007

E-MAIL: [estrella@maia.ub.es](mailto:estrella@maia.ub.es)

COLABORADORES: Àngel Jorba (U. Barcelona)



Consideramos el sistema dinámico  $\{\bar{x} = f(x, \theta), \bar{\theta} = \theta + \omega\}$ , donde  $\theta \in \mathbb{T}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\omega \in \mathbb{R}^d$  con las componentes de  $\omega$  racionalmente independientes. Este tipo de modelos aparece al considerar varias perturbaciones periódicas –con periodos incommensurables– de sistemas autónomos. Por ello, son muy comunes en diversos campos de las ciencias (véase, por ejemplo, [2]). Nuestro objetivo es el cálculo de soluciones cuasi-periódicas, con frecuencia  $\omega$ , de estos sistemas. Estas soluciones, que pueden representarse como funciones  $x : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $x(\theta + \omega) = f(x(\theta), \theta)$ , son las más simples que pueden aparecer en este contexto, y por ello su cálculo es el primer paso en el estudio numérico de la dinámica.

Esta comunicación se centra en el cálculo de soluciones cuasi-periódicas reducibles de dimensión moderada ( $d$  entre 1 y 4), en un ordenador paralelo mediante un esquema iterativo con convergencia cuadrática [3]. Nuestro método parte de una aproximación a la solución y de una aproximación a la transformación de Floquet para calcular una nueva aproximación a la solución a partir de la reducibilidad de la aproximación anterior y luego mejorar la aproximación a la transformación de Floquet. Este tipo de esquema iterativo es muy estándar en teoría KAM (véase [1]) y bajo ciertas hipótesis converge a la solución deseada. La novedad que presenta el método es su alto grado de paralelismo.

En la charla se comentarán algunos aspectos de la implementación paralela, con especial énfasis en la estimación del error cometido. Mostraremos cómo puede usarse dicha estimación para calcular una aproximación a la solución cuasi-periódica con una precisión prefijada. Concluiremos la exposición mostrando los resultados del método en aplicaciones concretas.

1. H.W. Broer, G.B. Huitema and M.B. Sevryuk. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1645 (1996), Springer Verlag.
2. E. Castellà, À. Jorba, “On the Vertical Families of two-dimensional Tori near the triangular points of the bicircular problems.” *Cel. Mech. Dyn. Astr.*, **76**, (2000), 35-54.
3. À. Jorba, E. Olmedo. Cálculo de soluciones cuasi-periódicas reducibles en un computador paralelo. *Actas del XVIII CEDYA / VIII CMA*, Universitat de Tarragona (2003).

---

### Análisis de un tres-toro con una frecuencia muy pequeña en el flujo de Taylor-Couette de altura pequeña

Juan Manuel López

*Department of Mathematics and Statistics  
Arizona State University  
Tempe, Arizona 85287-1804, USA*

E-MAIL: [lopez@math.asu.edu](mailto:lopez@math.asu.edu)

WWW: <http://math.la.asu.edu/~lopez>

COLABORADORES: Francisco Marqués (U. Politècnica de Catalunya)

El flujo de Taylor-Couette entre dos cilindros concéntricos en rotación es un problema clásico que ha sido útil en el desarrollo de la dinámica no lineal, rutas al caos, y teoría de

sistemas dinámicos con simetría. El estudio de la influencia de las tapaderas y la simetría de reflexión a media altura del cilindro muestra la importancia de la simetría de reflexión  $Z_2$  en el flujo de Taylor-Couette, y en otros problemas.

Los efectos de la simetría  $Z_2$  aumentan cuando se reduce la altura del aparato. La mayor parte de los estudios teóricos y numéricos en aparatos cortos consideran sólo el problema axisimétrico y roturas estacionarias de la simetría  $Z_2$ . Sin embargo, los experimentos muestran una dinámica espacio-temporal muy rica y compleja, incluyendo bifurcaciones globales asociadas con la simetría  $Z_2$  del sistema. Dos estudios recientes en flujo de Taylor-Couette con altura pequeña han identificado dos mecanismos de inestabilidad que rompen  $Z_2$ : uno vía una bifurcación de pitchfork estacionaria, y otro a través de una bifurcación de Hopf. En ambos casos el análisis se restringió al caso axisimétrico.

Aquí investigamos numéricamente la dinámica cuando la altura del cilindro es igual a la mitad del diámetro exterior ( $\Gamma = 0,5$ ), usando un código espectral tridimensional para Navier-Stokes. El estado básico presenta un chorro hacia afuera a media altura; para  $\Gamma$  mucho mayores se obtienen vórtices de Taylor con múltiples chorros. Usando teoría de bifurcaciones con simetría vemos que este estado básico puede presentar cuatro bifurcaciones que rompan la simetría. Tres de ellas se presentan en este problema. Una es la pitchfork axisimétrica, ya estudiada anteriormente. Las otras dos son bifurcaciones de Hopf, una axisimétrica y la otra que produce una onda de rotación con número de ondas acimutal  $m = 1$ ; ambas son investigadas en detalle por primera vez. Las dos curvas de bifurcación de Hopf se cortan en una bifurcación doble Hopf de codimensión dos. En este punto bifurca también un modo mixto inestable que estabiliza o inestabiliza las soluciones periódicas que salen de cada una de las bifurcaciones de Hopf en bifurcaciones de Neimark-Sacker. Dos modos mixtos adicionales, no asociados directamente con la doble Hopf, bifurcan de las soluciones periódicas, a números de Reynolds  $Re$  más elevados. Las dos ondas de rotación moduladas (una estable y la otra inestable) están conectadas heteroclínicamente, y al aumentar  $Re$  colisionan y desaparecen en una bifurcación silla-nodo de toros bidimensionales. Después de la colisión, aparece un tres-toro invariante estable, formado a partir de la anterior conexión heteroclínica. Dos de sus frecuencias corresponden a las ondas de rotación moduladas, y la tercera es una frecuencia muy pequeña, que tiende a cero en la bifurcación silla-nodo de período infinito (SNIPER). Este estado con una frecuencia muy pequeña había sido observado en experimentos, y aquí lo hemos calculado por primera vez, y presentamos la secuencia de bifurcaciones que lo originan.

---

## Técnicas numéricas para el cálculo de variedades estables e inestables de trayectorias hiperbólicas en flujos oceánicos

Ana María Mancho Sánchez  
 Departamento de Matemáticas  
 Instituto de Matemáticas y Física Fundamental  
 Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
 Serrano 121  
 Madrid, 28006

E-MAIL: A.M.Mancho@imaff.cfmac.csic.es  
 WWW: <http://www.imaff.cfmac.csic.es/mat/amancho/>

COLABORADORES: Des Small (U. of Bristol), Steve Wiggins (U. of Bristol)

Los procesos de mezcla y transporte en fluidos se describen por medio de trayectorias de partículas,  $x(t)$ , que siguen al campo de velocidades,  $v(x, t)$ . En particular nos centramos en partículas confinadas en un plano, cuya evolución viene dada por sistemas dinámicos de la forma  $dx/dt = v(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . En muchas aplicaciones, como aquéllas que tratan datos de velocidades provenientes de medidas o de simulaciones numéricas, el campo de velocidades se conoce tan sólo en un conjunto discreto de puntos en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . El tiempo finito, la naturaleza discreta de los datos y su aperiódicidad requiere el desarrollo de nuevas técnicas para el cálculo de las trayectorias hiperbólicas y sus variedades estables e inestables, que componen la plantilla geométrica para la descripción del transporte Lagrangiano. En este trabajo discutimos algunos métodos numéricos que hemos desarrollado con este propósito y mostramos los resultados obtenidos al aplicarlos a modelos de flujos oceánicos.

---

## La ecuación *inner* para sistemas hamiltonianos con un grado y medio de libertad rápidamente forzados

Inmaculada Baldomá Barraca  
 Universidad de Barcelona  
 Facultad de Matemáticas  
 Gran Via de les Corts Catalanes, 585  
 Barcelona, 08007

E-MAIL: [barraca@mat.ub.es](mailto:barraca@mat.ub.es)

En un sistema hamiltoniano o conservativo integrable conocemos explícitamente todas sus soluciones. Muchos de los fenómenos físicos están modelizados por sistemas hamiltonianos que son pequeñas perturbaciones de sistemas integrables. Su estudio, por tanto, se enmarca dentro de la teoría perturbativa. A los sistemas hamiltonianos “cerca” de integrables les llamamos casi-integrables. Estos sistemas presentan, genéricamente, caos determinista, en otras palabras, dependencia sensible respecto de condiciones iniciales. Una manera geométrica de medir cuán caótico es un sistema casi-integrable es mediante el tamaño de la escisión de separatrices.

El fenómeno conocido como rotura o escisión de separatrices ha sido ampliamente estudiado por muchos autores. Consideremos, por ejemplo, un sistema hamiltoniano (conservativo) con un grado de libertad con una conexión homoclínica asociada a un punto fijo hiperbólico. Si perturbamos el sistema periódicamente, genéricamente, la conexión se rompe pero continúan existiendo variedades estable

e inestable no coincidentes asociadas a una órbita periódica hiperbólica que nace del punto fijo del sistema no perturbado. El problema es medir la distancia (o el ángulo) entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado. La escisión de separatrices es un fenómeno dinámico fuertemente relacionado con la aparición de caos.

En el caso regular, disponemos de una herramienta analítica para medir el tamaño de la escisión de separatrices: la función de Melnikov. Sin embargo, si la perturbación no es regular en el parámetro perturbativo,  $\varepsilon$ , por ejemplo si depende  $2\pi$ -periódicamente de  $t/\varepsilon$ , entonces la función de Melnikov no es una buena estimación *a priori* del tamaño de la rotura de separatrices que, en el caso hamiltoniano, es exponencialmente pequeño en  $\varepsilon$ .

A pesar de ello, muchos autores han probado que, bajo ciertas condiciones, el tamaño de la rotura de separatrices viene dado a través de la función de Melnikov incluso en el caso no regular [1, 2].

La distancia entre las variedades del sistema perturbado viene regida, en cierto sentido, por su comportamiento alrededor de las singularidades de la órbita homoclínica del sistema no perturbado. Por tanto, un estudio más exhaustivo del comportamiento de las variedades invariantes del sistema perturbado alrededor de las singularidades de la órbita homoclínica nos podría permitir considerar perturbaciones mayores que las admitidas hasta el momento (ver [3]).

Consideramos sistemas hamiltonianos de un grado y medio de libertad rápidamente forzados de la forma  $H_{\mu,\varepsilon}(q, p, t/\varepsilon) = p^2/2 + V(q) + \mu\varepsilon^m h_1(q, p, t/\varepsilon, \mu, \varepsilon)$  tales que  $H_{0,\varepsilon}$  posee una conexión homoclínica asociada al origen, el cual suponemos que es un punto fijo. Mediante adecuados cambios de variable, derivamos un hamiltoniano independiente de  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{H}_\mu$ , que aproxima el comportamiento de  $H_{\mu,\varepsilon}$  cerca de las singularidades de la órbita homoclínica de  $H_{0,\varepsilon}$ , las cuales suponemos que se encuentran únicamente en puntos de la forma  $\pm ia$ ,  $a > 0$ . Las variedades invariantes de  $H_{\mu,\varepsilon}$  tienen asociadas dos soluciones  $\phi^\pm$  de la ecuación de Hamilton-Jacobi  $\partial_\tau \phi + \mathcal{H}_\mu(z, \partial_z \phi, \tau) = 0$  (ecuación *inner*) tales que  $\lim_{\text{Re } z \rightarrow \pm\infty} \phi^\pm = 0$ . Demostramos la existencia de  $\phi^\pm$  y calculamos una expresión asintótica de  $\partial_z \phi^- - \partial_z \phi^+$  que está fuertemente relacionada con la función de Melnikov. Este trabajo es una generalización de algunos de los resultados de [4].

1. A. Delshams and T.M. Seara, *Splitting of separatrices in Hamiltonian systems with one and a half degrees of freedom*, Math. Phys. Electron. J. **3** (1997), 4–40.
  2. I. Baldomá, E. Fontich, *Exponentially small splitting of invariant manifolds of parabolic points*, Memoirs of AMS, **167**, (2004), 83 pp.
  3. C. Olivé and T.M. Seara, *Matching complejo y resurgencia en el problema de la escisión de separatrices*. Actas CEDYA99 (1999), 419–426.
  4. C. Olivé, D. Sauzin and T.M. Seara, *Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **53** (4) (2003), 1185–1235.
-

---

## Sesión JB3: Métodos numéricos

Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)

Iglesia de San Pedro Mártir

Modera: Ángel Calsina

---

### Técnica de iteración para sistemas no lineales

María Tomás Rodríguez

Sheffield University

ACSE department,

Mappin Street

Sheffield, S1 3JD, United Kingdom.

E-MAIL: [cop00mt@yahoo.es](mailto:cop00mt@yahoo.es)

WWW: <http://www.shef.ac.uk/acse/research/students/m.tomas-rodriguez/>

COLABORADORES: S.P. Banks (Sheffield University)

En este artículo se presenta una recién introducida técnica de iteración, utilizada para aproximar la solución de sistemas no lineales de la forma  $\dot{x} = A(x)x$ .

Esta técnica está basada en la sustitución del sistema no lineal por una secuencia de sistemas lineales variantes en el tiempo de la forma  $\dot{x}^{(i)} = A[x^{(i-1)}(t)]x^{(i)}(t)$ . Una vez que dicha secuencia ha sido generada, se ha demostrado que la correspondiente secuencia de soluciones  $x^{(i)}(t)$  converge hacia la solución del sistema no lineal  $x(t)$ . Esta técnica puede ser aplicada a cualquier sistema no lineal de la forma  $\dot{x} = A(x)x$  que satisfaga la condición de Lipschitz  $\|A(x) - A(y)\| \leq M\|x - y\|$ .

En esta comunicación se presentan además varios ejemplos prácticos de la citada técnica que ya han sido aplicados en ámbitos como el control de sistemas repetitivos, identificación de parámetros en procesos no lineales presentes en la dinámica de plasmas, control de vibraciones o el diseño de observadores no lineales.

---

### Integradores simplécticos explícitos para sistemas binarios

M<sup>a</sup> Begoña Melendo Pardos

Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

c/ María de Luna, 3

E-50018 Zaragoza

E-MAIL: [bmelendo@posta.unizar.es](mailto:bmelendo@posta.unizar.es)

COLABORADORES: Sławomir Breiter, Iwona Wytrzyśczak (Astronomical Observatory of A. Mickiewicz University)

La posibilidad de utilizar ordenadores cada vez más rápidos y con mayores capacidades ha convertido las integraciones sobre largas escalas de tiempo en una herramienta fundamental para el estudio de la evolución a largo plazo de los sistemas dinámicos. Estos experimentos numéricos han resultado especialmente cruciales en el caso de sistemas que pueden presentar un comportamiento caótico. Como consecuencia, la búsqueda de integradores que conservan la estructura de las ecuaciones que modelan dicha dinámica ha centrado buena parte de la investigación más reciente en diferentes áreas. En el caso particular de sistemas hamiltonianos próximos a integrables, como los que se presentan

en Mecánica Celeste, y habitualmente descritos como sistemas hamiltonianos perturbados, el diseño de algoritmos que conserven la estructura simpléctica subyacente se basa en la habilidad de dividir dicho hamiltoniano en trozos integrables y fácilmente computables. Esto ha permitido no sólo realizar simulaciones numéricas a más largo plazo sino incorporar en los modelos efectos más sutiles y que debían ser despreciados en las simplificaciones realizadas con anterioridad. Aplicamos estas ideas para analizar la dinámica de un sistema binario en el que se plantea la necesidad de aproximar de forma eficiente el potencial de un cuerpo irregular. Diversos trabajos recientes han propuesto sustituir el modelo estándar habitualmente asimilado al primario de un elipsoide homogéneo, por un segmento material alineado con el eje mayor del cuerpo e incluso por dos segmentos perpendiculares. Con este modelo para el potencial, relativamente sencillo, se aborda la dinámica tanto orbital como rotacional del sistema. Se obtienen integradores simplécticos explícitos para dicho problema hasta de orden seis y se analiza mediante el indicador recientemente introducido MEGNO (*mean exponential growth factor of nearby orbits*) la estructura del espacio de fases.

---

### La clasificación local de campos de vectores inducida por el método de Newton

Ricardo Riaza Rodríguez

Depto. Matemática Aplicada TT. I.

ETSI Telecomunicación

Universidad Politécnica de Madrid

Ciudad Universitaria s/n, Madrid 28040

E-MAIL: [rrr@mat.upm.es](mailto:rrr@mat.upm.es)

WWW: <http://www.mat.upm.es/~rrr>

El problema de la localización de los ceros de una función vectorial no lineal  $f$  aparece en numerosos ámbitos de la ciencia y la ingeniería. Desde una perspectiva numérica, la técnica estándar para la resolución aproximada del problema es el método de Newton. En esta comunicación se analizan diversas interrelaciones de este método con la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, la teoría cualitativa de sistemas dinámicos y la teoría de singularidades.

La iteración de Newton puede interpretarse como el resultado de integrar, mediante el método de Euler, la ecuación diferencial cuasi lineal  $-J(x)x' = f(x)$ , donde  $J$  es la matriz jacobiana de  $f$ . Este punto de vista traslada el problema de la convergencia de la iteración al ámbito de la dinámica continua, ligándolo a un problema de estabilidad del proceso de discretización [1, 2].

En este contexto, la presente comunicación aborda la clasificación de los diagramas de fases de  $-J(x)x' = f(x)$  en torno a los ceros o puntos de equilibrio de  $f$ . Los puntos de equilibrio regulares, en los que  $J$  es una matriz invertible, son  $C^\infty$ -equivalentes al nodo estándar  $y' = -y$ . El comportamiento en puntos de equilibrio singulares es mucho más sutil, y en la clasificación resultante se combinan conceptos procedentes de la teoría de ecuaciones cuasi lineales [3] (puntos de *impasse*, pseudoequilibrio) con resultados de la teoría de singularidades y de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos continuos.

1. R. Riaza, Attraction domains of degenerate equilibria in quasilinear ODEs, *SIAM J. Mathematical Analysis*,

2004 (in press).

2. R. Riaza and P. J. Zufiria, Stability of singular equilibria in quasilinear implicit differential equations, *J. Differential Equations* **171** (2001) 24-53.
3. J. Sotomayor and M. Zhitomirskii, Impasse singularities of differential systems of the form  $A(x)x' = F(x)$ , *J. Differential Equations* **169** (2001) 567-587.

### Termohidrodinámica de un par eje-cojinete con fluidos cavitacionales

José Durany Castrillo  
*Universidad de Vigo,*  
*Dpto. Matemática Aplicada II,*  
*Campus Marcosende,*  
*Vigo, 36271*

E-MAIL: [durany@dma.uvigo.es](mailto:durany@dma.uvigo.es)  
 WWW: <http://www.dma.uvigo.es>

COLABORADORES: José Pereira Pérez (U. Vigo), Fernando Varas Mérida (U. Vigo)

En el análisis de dispositivos mecánicos de tipo eje-cojinete es frecuente suponer condiciones isotermas en los fluidos lubricantes que intervienen. Sin embargo, la temperatura de estos fluidos puede variar notablemente como consecuencia de la disipación energética por efectos viscosos y del intercambio térmico con el exterior del dispositivo. Este hecho puede influir de manera importante en la predicción de varias características de funcionamiento del par como, por ejemplo, en la potencia consumida.

En este trabajo se propone y se resuelve numéricamente un modelo acoplado para la presión y la temperatura en el fluido lubricante, incluyendo el intercambio térmico con el ambiente a través del eje y el cojinete. Este análisis termohidrodinámico del estado estacionario de todo el par se plantea con un algoritmo de punto fijo que desacopla el problema global en tres etapas hasta alcanzar el estado de equilibrio:

- (I) Resolución numérica vía elementos finitos de la ecuación generalizada de Reynolds con un modelo de cavitación de Elrod-Adams para la presión del fluido lubricante. La solución de este problema de frontera libre se realiza con un algoritmo de dualidad aplicado a un operador maximal monótono (ver Calvo-Durany-Vázquez [1]).
- (II) Solución de la ecuación de la energía en el fluido lubricante utilizando un esquema de volúmenes finitos de tipo cell-vertex de orden dos (véase Morton-Stynes-Süli [2] y Durany-García-Pereira-Varas [3]). Ello permite obtener mejores aproximaciones de la solución que la proporcionada por los esquemas habituales de descentrado sin necesidad de refinar las mallas y, en consecuencia, se reduce significativamente el coste computacional del problema hidrodinámico.
- (III) Solución de la ecuación de conducción térmica en el cojinete con un método de elementos de contorno P1 y solución de un modelo térmico simplificado en el eje (que se considera isoterma debido a las altas velocidades de rotación). El tratamiento con elementos de contorno junto con la simetría del problema hacen que el coste computacional de esta etapa sea muy reducido.

Finalmente, se presentan resultados numéricos en dispositivos reales que ponen de manifiesto la efectividad de la combinación de estos métodos de resolución, así como la influencia en el proceso de los aspectos térmicos del problema.

1. N. Calvo, J. Durany, C. Vázquez, Comparación de algoritmos numéricos en problemas de lubricación hidrodinámica con cavitación en dimensión uno, *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* **13, 2**, (1997), 185-209.
2. K.W. Morton, M. Stynes, E. Süli, Analysis of a cell-vertex finite volume method for convection-diffusion problems, *Math. Comput.* **66(220)**, (1997), 1389-1406.
3. J. Durany, G. García, J. Pereira, F. Varas Resolución de un modelo acoplado termohidrodinámico en lubricación, *Actas XVIII CEDYA / VIII CMA*, CD-Rom, Univ. Rovira y Virgili. Tarragona (2003).

### Sesión JB4: Ruido en sistemas extensos

Jueves, 3 de junio (12:20-13:40)  
 Teatrillo de San Pedro Mártir  
 Modera: José M. Sancho

### Fluctuaciones cuánticas en solitones brillantes de cavidad

Isabel Pérez Arjona  
*Universitat de Valencia*  
*Departament d'Optica*  
*c/Dr. Moliner, 50*  
*46100, Burjassot (Valencia)*

E-MAIL: [iparjona@uv.es](mailto:iparjona@uv.es)

COLABORADORES: Germán J. de Valcárcel, Eugenio Roldán (Univ. Valencia)

Como es sabido, las cavidades ópticas no lineales extensas presentan una gran variedad de patrones en la distribución transversal del campo a la salida de dicho resonador. Entre estos patrones son de particular interés las estructuras localizadas y, entre éstas, los solitones brillantes de cavidad. Asimismo, en el campo de la óptica cuántica, la generación de luz no-clásica, con reducción de ruido por debajo del límite clásico, se ha estudiado a lo largo de los últimos años en su dominio espacial, poniendo de manifiesto la relación existente entre la formación de patrones no lineales y la generación de luz comprimida [1].

Lo novedoso de este trabajo es que por primera vez se estudia la distribución de las fluctuaciones cuánticas del campo no en un patrón extenso, sino en el caso de una estructura localizada. Se han llevado a cabo estudios en solitones de propagación [2], pero hasta ahora no se había estudiado el ruido cuántico en solitones de cavidad. En particular, se desarrolla un método de estudio para las fluctuaciones cuánticas en el solitón brillante que sostiene un oscilador óptico paramétrico degenerado. La metodología consiste en

la deducción de una ecuación de Langevin válida para describir el sistema y una descomposición modal del problema que nos permita calcular la evolución de cada uno de ellos y la posterior reconstrucción del campo y sus fluctuaciones. A partir del hamiltoniano del problema original se deducen y se linealizan las ecuaciones de Langevin, que nos permiten tratar los campos cuánticos como magnitudes clásicas. La mayor aportación del método que desarrollamos es que permite deducir el espectro de fluctuaciones de los campos de forma analítica mediante una descomposición modal, y por tanto no es necesaria la integración de las ecuaciones de Langevin. En concreto, se descomponen los campos en los modos propios correspondientes a la contribución clásica de la ecuación de Langevin. Este método es, a su vez, aplicable a cualquier otro sistema.

1. L.A. Lugiato, M. Brambrilla and A. Gatti, *Advances in Atomic Molecular and Optical Physics*, Academic Press, New York (1998).
2. N. Treps and C. Fabre, *Phys. Rev. A*, 62, 033816 (2000).

---

### Análisis fraccional de reacciones limitadas por subdifusión

Santos Bravo Yuste

*Dpto. de Física, Universidad de Extremadura  
Avda. Elvas s/n, 06071 Badajoz*

E-MAIL: [santos@unex.es](mailto:santos@unex.es)

WWW: <http://www.unex.es/fisteor/santos/sby>

Multitud de sistemas (polímeros, medios porosos, cristales líquidos, células biológicas, semiconductores, sistemas coloidales,...), generalmente conocidos como medios desordenados, exhiben propiedades dinámicas “no normales”. En particular, la difusión en estos medios es anómala y el crecimiento con el tiempo  $t$  del desplazamiento cuadrático medio  $\langle r^2 \rangle$  de la partícula difusiva es no lineal. El comportamiento es subdifusivo si  $\langle r^2 \rangle \sim t^\gamma$  y el exponente de difusión anómala  $\gamma$  está comprendido entre cero y uno. En 1975 Scher y Montroll introdujeron el modelo CTRW (*Continuous Time Random Walk*) en el que las partículas difusivas saltan con una distribución de tiempos de salto con cola larga (de modo que el tiempo medio de salto es infinito, lo que conlleva un transporte subdifusivo) para explicar las propiedades de la fotoconductividad de semiconductores amorfos. Hasta hace poco, este procedimiento era prácticamente el único viable para abordar la cinética (anómala) de las reacciones en las que el mecanismo de mezcla dominante es la subdifusión de los reactivos (reacciones limitadas por *subdifusión*), aunque sus predicciones no han ido mucho más allá de leyes de escala cualitativas. En los últimos años se ha ido confirmando la validez y conveniencia de una aproximación alternativa a la descripción CTRW en la que las propiedades difusivas de los sistemas se describen a través de ecuaciones integro-diferenciales, conocidas como ecuaciones de Fokker-Planck fraccionales. En estas ecuaciones las condiciones de contorno y la presencia de fuerzas externas se incorporan de un modo mucho más simple que en la aproximación CTRW.

Mi intención es mostrar que, a partir de la descripción de la difusión anómala mediante ecuaciones difusivas fraccionales, se puede estudiar la influencia que ciertos medios

ejercen en la cinética de las reacciones que se producen en su seno debido al carácter anómalo que imprimen a la difusión de los reactivos que se mueven en su interior. Esto no es trivial, no sólo porque el análisis matemático sea más complicado que en las ecuaciones difusivas corrientes, sino porque incluso no está claro cuál es la forma de los términos de reacción que hay que incorporar en las ecuaciones. Éste es un problema que se abordará en esta comunicación. Además, prestaré una atención especial al análisis del comportamiento de frentes de reacción, el cual es un problema no lineal fraccional clave en la formación de patrones como las bandas de Liesegang. Otros problemas que se discutirán son aquéllos de tipo  $A+T \rightarrow T$  en los que la partícula  $A$  es atrapada por las trampas  $T$  que se disponen al azar sobre el sustrato. Se considerarán los casos en los que una de las especies es estática (*trapping problem*, *target problem*) y el caso en el que los dos reactivos son subdifusivos. Se finalizará comentando algunos problemas teóricos, numéricos y de simulación que están abiertos.

---

### Resonancia coherente espacial

Oliver Carrillo Parramón

*Universitat de Barcelona*

*Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria,  
Avda. Diagonal, 647  
Barcelona, 08028*

E-MAIL: [oliver@ecm.ub.es](mailto:oliver@ecm.ub.es)

COLABORADORES: Miguel Ángel Santos (Universitat Rovira i Virgili), Jordi García-Ojalvo (Universitat Politècnica de Catalunya) y José María Sancho (Universitat de Barcelona)

La habilidad del ruido para inducir coherencia temporal en sistemas no lineales es un fenómeno muy estudiado en la literatura. En la resonancia estocástica, por ejemplo, las fluctuaciones aleatorias incrementan la respuesta de un sistema ante una señal periódica externa de amplitud débil, como puede observarse en sistemas físicos, químicos y biológicos [1-3].

Incluso sistemas en los cuales no actúa ninguna señal externa pueden presentar un incremento de coherencia temporal debido al ruido [4,5]. Este tipo de resonancia estocástica, cuyo origen no está relacionado con la existencia de una señal externa, se basa en que el ruido extrae una escala de tiempo intrínseca de la dinámica que gobierna el sistema. Este efecto se ha llamado resonancia coherente [6] y se ha predicho teóricamente en una gran variedad de modelos, observándolo experimentalmente en campos tan diversos como física de plasmas, dinámicas láser, electrónica y neurociencias [7].

Paralelamente a estos avances en los campos de resonancia estocástica y coherente, estos últimos años han sido testigos de un interés creciente en la dinámica de sistemas espacialmente extendidos. El acoplamiento espacial en tales sistemas permite la existencia de fenómenos de auto-organización, como la formación de estructuras, que no existían en el caso puramente temporal. Se ha dedicado mucho trabajo a analizar el incremento del orden espacio-temporal debido al ruido [8,9].

De todos modos, hasta ahora no hemos encontrado análogos de la resonancia coherente (o estocástica) para sistemas con grados de libertad espaciales. Por eso, nos preguntamos si el ruido es capaz de extraer y optimizar una escala espacial intrínseca de un medio homogéneo determinista. En

esta charla, demostraremos que este nuevo fenómeno, al que llamaremos resonancia coherente espacial, existe cerca de inestabilidades espaciales, emulando los mecanismos de la resonancia coherente temporal.

Este nuevo fenómeno tiene que ver con la capacidad que tiene el ruido espacialmente extendido por debajo del umbral de una transición a una fase heterogénea para extraer la escala espacial característica de ésta. Lo esencial de este fenómeno es que para un valor óptimo del ruido, esa escala intrínseca se hace más visible y se distingue más fuertemente del fondo de ruido. Este hecho se trata teóricamente en el modelo de Swift-Hohenberg, que describe la transición de una fase conductiva a otra convectiva en un fluido sujeto a un gradiente de temperatura, y numéricamente en un modelo que describe una reacción química que presenta una estructura de Turing [10].

1. Wiesenfeld K. y Moss F., *Nature* **373** (1995) 33.
2. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P. y Marchesoni F., *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 223.
3. Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A.B., Vadivasova T. y Schimansky-Geier L., *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems* (Springer-Verlag, Berlin) 2002.
4. Hu G., Ditzinger T., Ning C.Z. y Haken H., *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 807.
5. Rappel W.J. y Strogatz S.H., *Phys. Rev. E* **50** (1994) 3249.
6. Pikovsky A. y Kurths J., *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 775.
7. Lindner B., García-Ojalvo J., Neiman A. y Schimansky-Geier L., *Phys. Rep.* **392** (2004) 321.
8. García-Ojalvo J. y Sancho J.M., *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York) 1999.
9. Alonso S., Sendiña-Nadal I., Pérez-Muñuzuri V., Sancho J.M. y Sagués F., *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 078302.
10. Carrillo O., Santos M.A., García-Ojalvo J. y Sancho J.M., *Europhys. Lett.* **65** (2004) 452.

---

### Atractores aleatorios de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardos

María José Garrido Atienza  
*Universidad de Sevilla*  
*Facultad de Matemáticas,*  
*Apartado de correos 1160*  
*Sevilla, 41080*

E-MAIL: [mgarrido@us.es](mailto:mgarrido@us.es)  
 WWW: <http://www.us.es/gaesdif/garrido>

COLABORADORES: Tomás Caraballo Garrido (U. Sevilla), Björn Schmalfluss (U. Merseburg)

El objetivo principal de este trabajo es analizar la estabilidad de soluciones estacionarias no constantes para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas que contengan algún tipo de características hereditarias.

Hemos de mencionar que el comportamiento asintótico de ecuaciones de evolución estocásticas viene siendo estudiado ampliamente por gran número de autores durante las

últimas décadas. En particular, debido a la gran importancia que tienen en diferentes aplicaciones, se está analizando en profundidad la estabilidad de las ecuaciones estocásticas retardadas, si bien es cierto que generalmente, incluso en el caso no retardado, este análisis se realiza para soluciones estacionarias que son constantes, y más particularmente para la solución trivial.

Recientemente Caraballo, Kloeden y Schmalfluss han analizado la estabilidad exponencial de las soluciones estacionarias no triviales correspondientes a ecuaciones en derivadas parciales estocásticas semilineales, pero sin contemplar características hereditarias en el modelo.

Nuestro objetivo se centra en demostrar la existencia de puntos fijos aleatorios para dichos sistemas, gracias a una transformación que nos permitirá pasar de nuestra ecuación de evolución estocástica de partida a una ecuación aleatoria, es decir, que puede ser considerada como una ecuación diferencial ordinaria determinista y no autónoma. Finalmente, serán estos puntos fijos aleatorios los que nos proporcionarán soluciones estacionarias no triviales exponencialmente estables para las ecuaciones funcionales de evolución estocásticas consideradas inicialmente.

---

## Sesión JC1: Órbitas periódicas II

Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)

Aula 1.2

Modera: Víctor Jiménez

---

### Acerca de las órbitas infinitesimales en torno a los puntos lagrangianos de libración en el problema plano elíptico restringido de tres cuerpos

Luis Floría Gimeno

*Grupo de Mecánica Espacial. Universidad de Zaragoza*  
*Facultad de Ciencias (Matemáticas)*  
*Ciudad Universitaria s/n*  
*50 009 Zaragoza*

E-MAIL: [lfloria@unizar.es](mailto:lfloria@unizar.es)

Dos masas puntuales, los “primarios”, describen una en torno a otra un movimiento kepleriano *elíptico*, y ejercen su influencia sobre un tercer cuerpo de masa despreciable que -por su parte- no influye sobre ellas. Se trata de estudiar el movimiento de esta tercera partícula (infinitesimal) bajo la atracción gravitatoria de las otras dos masas finitas.

Existen cinco soluciones de equilibrio relativo, o puntos de libración, en las que las fuerzas gravitatoria y centrífuga se compensan entre sí: tres son colineales, y dos triangulares situadas en el plano del movimiento orbital de los primarios en los vértices de los triángulos equiláteros que tienen a los primarios en los otros dos vértices. Tres cuerpos emplazados en los vértices de un triángulo equilátero pueden recibir velocidades iniciales tales que con posterioridad mantengan permanentemente la misma configuración: las soluciones equiláteras de Lagrange del problema de los tres cuerpos.

Un ejemplo es el problema del movimiento de los asteroides Troyanos alrededor del punto triangular  $L_4$  de Lagrange. Los asteroides experimentan únicamente el efecto de las

fuerzas gravitatorias debidas al Sol y a Júpiter, y la órbita de Júpiter en torno al Sol es una elipse fija.

El problema bidimensional elíptico restringido de tres cuerpos es un caso de sistema dinámico no autónomo y no integrable con dos grados de libertad. Con cambios de variables adecuados, las ecuaciones de la órbita del tercer cuerpo pueden convertirse en fórmulas parecidas a las que rigen el problema circular restringido, lo que permite extraer conclusiones útiles a partir de analogías inspiradas por esta reducción a una situación que ha sido (y sigue siendo) estudiada con gran detalle.

Para este problema es imposible obtener en forma finita soluciones generales, exactas y completas, pero pueden construirse expresiones analíticas y fórmulas que proporcionen soluciones particulares aproximadas del sistema. Nuestro objetivo principal consiste en un tratamiento analítico de los movimientos orbitales de pequeña amplitud de una partícula de masa despreciable en torno a los puntos de libración en el problema plano restringido elíptico de tres cuerpos: consideraremos pequeños movimientos cerca de los puntos de equilibrio (más concretamente, desplazamientos infinitesimales respecto de los centros de libración), y obtendremos –por medio de series de Lie– expresiones para los movimientos de pequeña amplitud de la masa infinitesimal alrededor de los puntos de equilibrio.

Para el tratamiento de este problema, lo formulamos y abordamos en el marco conceptual de la mecánica hamiltoniana. La integración (aproximada) se plantea por medio de una técnica canónica de perturbaciones basada en series de Lie. La excentricidad de la órbita elíptica de los primarios será el parámetro de perturbación.

Las “raíces intelectuales” de este trabajo pueden encontrarse en dos artículos de D. Şelaru & C. Cucu–Dumitrescu (“An Analytic Asymptotical Solution in the Three–Body Problem”, *Romanian Astronomical Journal* **4**, No. 1, 1994, pp. 59–67; “Infinitesimal Orbits Around Lagrange Points in the Elliptic, Restricted Three–Body Problem”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **61**, No. 4, 1995, pp. 333–346.) Nosotros reexaminaremos su tratamiento analítico y corregiremos algunos errores en ciertas transformaciones.

La ventaja de nuestra opción frente al método de von Zeipel utilizado por estos autores reside en que nosotros evitamos el engorroso trabajo de cálculo que exige la determinación de la función generatriz de von Zeipel y la ulterior formación de derivadas parciales para expresar las ecuaciones implícitas de la transformación y el proceso de eliminación que conduce a las relaciones explícitas entre los conjuntos canónicos de viejas y nuevas variables.

---

### Conjuntos analíticos y ciclos de largo periodo en ecuaciones de tipo péndulo

Juan Campos Rodríguez  
*Universidad de Granada*  
*Facultad de Ciencias*  
*Avenida Severo Ochoa s/n*  
*Granada , 13071*

E-MAIL: [jcampos@ugr.es](mailto:jcampos@ugr.es)  
 WWW: <http://www.ugr.es/~ecuadif>

Sea  $X$  un subconjunto del espacio euclídeo y  $p$  un punto suyo, entonces la componente arcoconexa que contiene a ese punto se reduce a aquellos puntos que se pueden conectar

con él. Si lo que se busca es un camino analítico, entonces es posible que puntos que se conectan con  $p$  analíticamente no puedan ser luego conectados entre ellos.

En esta charla se muestra la estructura local que tiene un conjunto definido por un número finito de ecuaciones analíticas (conjunto analítico): existe una base de entornos formada por conjuntos que pueden separarse en un número finito de ramas conexas por arcos analíticos.

Esta propiedad se usa para demostrar que el conjunto de niveles críticos de una función analítica es numerable, pues a consecuencia de la regla de la cadena un arco de puntos críticos está siempre al mismo nivel.

Con esta teoría hacemos un seguimiento de los niveles críticos de un problema variacional asociado a una ecuación diferencial de tipo péndulo autónoma y demostramos la existencia de ciclos con periodo minimal arbitrariamente grande.

---

### Trayectorias homoclínicas de billares dentro de elipsoides perturbados

Rafael Ramírez Ros  
*Departamento de Matemática Aplicada I*  
*Universidad Politécnica de Cataluña*  
*c/Diagonal, 647*  
*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [rafael@vilma.upc.es](mailto:rafael@vilma.upc.es)  
 WWW: <http://www-ma1.upc.es/rafael/>

COLABORADORES: Sergey Bolotin (U. Wisconsin), Amadeu Delshams Valdés (U. Politécnica de Cataluña)

Esudiamos la dinámica del billar dentro de una pequeña perturbación de un elipsoide que tiene un eje mayor que todos los demás.

En la dinámica no perturbada, se sabe que el diámetro del elipsoide da lugar a una trayectoria hiperbólica de periodo dos cuyas variedades invariantes estable e inestable coinciden. Así pues, existe un conjunto invariante bidimensional  $W$  formado por órbitas homoclínicas de la dinámica no perturbada. El conjunto  $W$  está estratificado y posee una estructura relativamente complicada.

Cuando se perturba el elipsoide, el conjunto  $W$  suele desaparecer y sólo persisten algunas órbitas homoclínicas aisladas. En esta charla, presentamos una cota inferior del número de órbitas homoclínicas primarias que persisten cerca de órbitas homoclínicas no perturbadas situadas en ciertos estratos de  $W$ .

Esta cota inferior se obtiene a partir de una cota inferior más general válida para perturbaciones exactas de aplicaciones “twist” con una variedad de órbitas homoclínicas.

---

## Multifractal Properties of R90 Cellular Automaton with Memory

Juan Roberto Sánchez  
 Universidad Nacional de Mar del Plata  
 Facultad de Ingeniería  
 J.B. Justo 4302  
 Mar del Plata, 7600

E-MAIL: [jsanchez@jrsnet.com.ar](mailto:jsanchez@jrsnet.com.ar)  
 WWW: <http://www.jrsnet.com.ar>

COLABORADORES: Ramón Alonso-Sanz (ETSI Agrónomos (Estadística))

Standard Cellular Automata (CA) are ahistoric (memoryless), i.e., the new state of a cell depends on the neighborhood configuration only at the preceding time step. This article considers an extension to the standard framework of CA by implementing memory capabilities. Thus in CA with memory, while the update rules of the CA remain unaltered, historic memory of all past iterations is retained by featuring each cell by a summary of all its past states. A study is made of the effect of historic memory on the multifractal dynamical characteristics of one dimensional cellular automata operating under one of the most studied rules, rule 90, which is well known to display a rich complex behavior.

obtienen diferentes regímenes dinámicos, desde oscilaciones periódicas de las poblaciones, pasando por cuasi periodicidad, hasta un régimen caótico. El colapso final de las especies se interpreta como un tipo de extinción que no estaría causada por la falta de recursos sino por catástrofes internas de organización de las poblaciones.

Este trabajo se ve complementado por el estudio de las cuencas de atracción de los diferentes atractores que presenta el sistema. El uso de las curvas críticas (aquellos puntos del plano que presentan dos preimágenes coincidentes) nos permite determinar las diferentes zonas de preimágenes del espacio de fases y su influencia en la fractalización de dichas cuencas de atracción.

1. R.M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261**, 459-467 (1976).
2. R. López-Ruiz and D. Fournier-Prunaret, *Complex Patterns on the Plane: Different Types of Basin Fractalization in a Two-Dimensional Mapping*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **13**, 287-310 (2003).
3. R. López-Ruiz and D. Fournier-Prunaret, *Complex behaviour in a discrete logistic model for the symbiotic interaction of two species*, to appear in the inaugural issue of the journal MBE (Mathematical Biosciences and Engineering) (2004).

---

## Sesión JC2: Estrategias evolutivas

Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)  
 Aula 2.2  
 Modera: Jordi Bascompte

---

### Un modelo de tipo logístico para la interacción simbiótica de dos especies

Ricardo López-Ruiz  
 Universidad de Zaragoza  
 Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas,  
 Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos,  
 Facultad de Ciencias-Edificio B,  
 Plaza San Francisco, s/n  
 50009 Zaragoza

E-MAIL: [rilopez@unizar.es](mailto:rilopez@unizar.es)

COLABORADORES: Danièle Fournier-Prunaret (I.N.S.A. de Toulouse (Francia))

Se propone un modelo discreto cúbico de tipo logístico para la interacción simbiótica de dos especies. El acoplamiento entre ellas depende del tamaño de la otra especie y de una constante  $\lambda$  que llamamos el beneficio mutuo:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda(3y_n + 1)x_n(1 - x_n) \\ y_{n+1} &= \lambda(3x_n + 1)y_n(1 - y_n)\end{aligned}$$

Si las especies están aisladas, recuperamos el modelo logístico para cada una de ellas. Para valores de crecimiento donde una especie aislada se extinguiría, la coexistencia con la otra especie le permite sobrevivir, apoyando la idea de simbiosis entre las dos especies. Para valores crecientes de  $\lambda$  se

---

### Caracterización de las estrategias evolutivamente estables en modelos matriciales de metapoblaciones y de poblaciones estructuradas

Joan Saldaña Meca  
 Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada,  
 Universitat de Girona  
 Av./ Lluís Santaló s/n  
 17071 Girona

E-MAIL: [jsaldana@ima.udg.es](mailto:jsaldana@ima.udg.es)  
 WWW: <http://ima.udg.es/~jsaldana/>

La determinación de estrategias de dispersión evolutivamente estables en modelos de metapoblaciones, así como tasas de crecimiento evolutivamente estables en modelos matriciales de poblaciones estructuradas por el tamaño o el rango social, ha sido objeto de estudio durante los últimos 25 o 30 años. Como ejemplo de estrategias evolutivamente estables cabe destacar las dispersiones que determinan las denominadas *ideal free distributions* en teoría de metapoblaciones.

En esta charla presentaremos algunas propiedades evolutivas relacionadas con la denominada dinámica adaptativa asociada a las estrategias encontradas en estos modelos. En concreto, para modelos matriciales  $2 \times 3$  y  $3 \times 3$ , se analizará la estabilidad por convergencia de dichas estrategias y, además, su potencial de invasión como estrategia mutante frente a residentes que adopten una estrategia distinta. Dicho análisis se basa en el estudio del gradiente de *fitness* en el espacio de estrategias, el espacio de estados de la dinámica adaptativa. Como es habitual en los modelos matriciales, la medida de *fitness* utilizada será tanto  $R_0$ , el número neto reproductivo, como el valor propio dominante  $\lambda^*$  de la matriz de proyección del modelo. En este último caso, se pueden utilizar resultados bien conocidos del análisis de sensibilidad de  $\lambda^*$  con respecto a variaciones de los coeficientes de la matriz de proyección.



La principal novedad de los resultados que presentamos es, por un lado, la determinación de la dinámica adaptativa asociada a las estrategias consideradas (tasas de migración o dispersión en metapoblaciones, y tasa de crecimiento en poblaciones estructuradas). Por otro, la explicación de la razón de la neutralidad que caracteriza dichas estrategias, tanto en los modelos de metapoblaciones como en los de poblaciones estructuradas.

### Desarrollo de modelos numéricos para el estudio de la acumulación de mutaciones en virus RNA

Ester Lázaro Lázaro

Centro de Astrobiología, INTA-CSIC

Ctra. de Ajalvir km. 4

28850 Torrejón de Ardoz, Madrid

E-MAIL: lazarolm@inta.es

WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: Susanna C. Manrubia y Juan Pérez Mercader (CAB), Ana Grande-Pérez, Cristina Escarmís y Esteban Domingo (CAB y Centro de Biología Molecular "Severo Ochoa")

Los virus RNA replican su material genético utilizando tasas de error muy elevadas. Este hecho, unido al corto tiempo de generación y al elevado número de individuos que componen las poblaciones virales tiene como consecuencia que estas poblaciones sean extremadamente heterogéneas y con un elevado grado de complejidad. La acumulación de mutaciones en el genoma viral se puede incrementar mediante:

- (1) la realización de pases seriados del virus que impliquen cuellos de botella poblacionales como los que tienen lugar en los pases placa a placa;
- (2) el uso de mutágenos que aumenten la tasa de error durante la replicación.

En general, como la mayoría de las mutaciones son deletéreas, su aumento suele ir asociado con un descenso en la eficacia replicativa que podría conducir a la extinción de la población viral. Este hecho ha sido descrito en el caso de varios virus utilizando diversos agentes mutagénicos. Sin embargo, en experimentos realizados con varios clones del virus de la fiebre aftosa que han sido sometidos a 130 pases placa a placa se ha comprobado que las mutaciones acumuladas durante este proceso no conducen a la extinción del virus. Hay una etapa inicial en la que el virus pierde eficacia biológica, pero después de un número variable de pases se llega a un estado estacionario en el que hay grandes fluctuaciones alrededor de un valor medio constante [1]. Para intentar entender las diferencias entre la acumulación de mutaciones que tiene lugar a través de ambos procesos, se han realizado simulaciones numéricas utilizando parámetros basados en resultados experimentales. El modelo para los pases placa a placa ha reproducido la cinética bifásica del proceso experimental y ha permitido determinar la probable existencia de estados estacionarios de eficacia biológica que dependen del tamaño poblacional [2]. El modelo para el tratamiento con mutágenos predice la existencia de un umbral de error, por encima del cual la población viral se extingue con una alta probabilidad. Los parámetros que en ambos procesos conducen a la persistencia o extinción de la población serán discutidos en la presentación.

1. E. Lázaro, C. Escarmís, J. Pérez-Mercader, S.C. Man-

rubia, and E. Domingo (2003), *Resistance of virus to extinction upon bottleneck passages: study of a decaying and fluctuating pattern of fitness loss*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 100, 10830-10835.

2. E. Lázaro, C. Escarmís, E. Domingo, and S.C. Manrubia (2002), *Modeling viral genome fitness evolution associated with serial bottlenecks events: evidence of stationary states of fitness*, J Virol. 76, 8675-8681.

### Efecto de las heterogeneidades espaciales en la dinámica de poblaciones. Regiones de permanencia

Santiago Cano Casanova

Universidad Pontificia Comillas de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

c/Alberto Aguilera, 25

Madrid, 28015

E-MAIL: [scano@dmccomillas.upco.es](mailto:scano@dmccomillas.upco.es)

COLABORADORES: Julián López-Gómez (U. Complutense de Madrid), Marcela Molina-Meyer (U. Carlos III de Madrid)

Los resultados que serán presentados están enmarcados dentro del campo de la biología matemática en el contexto de dinámica competitiva de poblaciones, donde dos especies que conviven en un hábitat heterogéneo compiten por los recursos naturales de éste. Se considerará un modelo de competición de tipo Lotka-Volterra con coeficientes variables dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{L}_1 u = \lambda u - a(x)u^2 - \beta b(x)uv \\ (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{dv}{dt} + \mathcal{L}_2 v = \mu v - d(x)v^2 - \gamma c(x)uv \\ (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \mathcal{B}_1(b_1)u = 0, \quad \mathcal{B}_2(b_2)v = 0 \\ (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u_0(\cdot) := u(\cdot, 0) \geq 0, \quad v_0(\cdot) := v(\cdot, 0) \geq 0 \end{cases}$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq 1$  de clase  $\mathcal{C}^2$ ,  $\lambda, \mu, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  con  $\beta > 0, \gamma > 0$ ;  $\mathcal{L}_k, k = 1, 2$  es el operador diferencial fuertemente elíptico en  $\Omega$ , definido por

$$\mathcal{L}_k := - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0^k,$$

con  $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha_i^k \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha_0^k \in L_\infty(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq j \leq N$ . Los potenciales  $a(x), d(x)$  son funciones medibles, acotadas y alejadas de cero y  $b(x), c(x) \in \mathcal{A}(\Omega)$ , donde  $\mathcal{A}(\Omega)$  es una clase muy general de potenciales medibles, no negativos y acotados, denominada clase de potenciales admisibles en  $\Omega$ . En cuanto a las condiciones de frontera, el operador  $\mathcal{B}_k(b_k), k = 1, 2$  representa al operador de frontera

$$\mathcal{B}_k(b_k) := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^k \\ \partial_{\nu_k} u + b_k u & \text{en } \Gamma_1^k \end{cases}$$

donde  $\Gamma_0^k$  y  $\Gamma_1^k$  son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de  $\partial\Omega$ , verificando  $\Gamma_0^k \cup \Gamma_1^k = \partial\Omega$ ,  $b_k \in \mathcal{C}(\Gamma_1^k)$  pudiendo cambiar de signo en  $\Gamma_1^k$ , y  $\nu_k \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1^k; \mathbf{R}^N)$  es un campo vectorial exterior y no tangente a  $\Gamma_1^k$ . Finalmente, el

dato inicial  $(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times L_p(\Omega)$ ,  $p > \frac{N}{2}$ . En la práctica  $\Omega$  representa el hábitat donde coexisten las dos especies,  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  miden las densidades de las respectivas especies en  $x \in \Omega$  después de un tiempo  $t > 0$ , los operadores  $\mathcal{L}_1 - \alpha_0^1$  y  $\mathcal{L}_2 - \alpha_0^2$  miden las tasas de dispersión y los efectos de transporte de  $u$  y  $v$  sobre  $\Omega$ ,  $\lambda - \alpha_0^1(x)$  y  $\mu - \alpha_0^2(x)$  son las tasas de crecimiento o reproducción de las respectivas especies y  $a(x)$ ,  $d(x)$  miden el efecto de saturación. Los potenciales  $b(x)$  y  $c(x)$  son los modelos estructurales de competición entre  $u$  y  $v$ , siendo aquellas regiones donde son positivos las regiones donde la competición tiene lugar, y las regiones donde se anulan los refugios de las especies. Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  miden las intensidades de las agresiones mutuas y  $u_0$ ,  $v_0$  son las densidades de población iniciales. Finalmente, las condiciones de frontera consideradas son suficientemente generales como para tratar con hábitats rodeados de áreas hostiles, confortables o una combinación de ambas. Los resultados que presentaremos son una extensión de los originalmente obtenidos en [1] (cf. [2]). Los coeficientes variables representan diversos niveles de agresión, tasas de natalidad, mortalidad, etc... en función de las heterogeneidades del terreno. Como consecuencia de los resultados obtenidos, podremos conocer la subregiones del hábitat  $\Omega$  donde hay más posibilidad de reproducción o extinción de una determinada especie como consecuencia de las peculiaridades geográficas de dicha subregión. Concretamente, demostraremos que en la presencia de refugios, dos especies que compiten deben coexistir si sus respectivas tasas de reproducción y los recursos naturales de sus respectivos refugios son suficientemente grandes, independientemente del nivel de agresión entre ellas. Las dos especies tenderán a segregarse en sus respectivos refugios cuando la competición se intensifique. Este mecanismo de segregación será el que permita coexistir a las especies, independientemente del nivel de las agresiones, si y solamente si, cada uno de los refugios puede mantener a la correspondiente especie en ausencia de competidores. Finalmente, mostraremos un ejemplo numérico unidimensional desarrollado en [3].

1. J. López-Gómez, Permanence under strong competition, World Scientific Series in Applied Analysis, 4, 1995, 473-488.
2. S. Cano-Casanova y J. López-Gómez, Permanence under strong aggressions is possible, Ann. I. H. Poincaré, Analyse Non Lineaire, 20, 2003, 999-1041.
3. S. Cano-Casanova, J. López-Gómez y M. Molina-Meyer, Permanence through spatial segregation in heterogeneous competition, MMAR 2003, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics.

---

## Sesión JC3: Sistemas extensos II

Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)  
 Iglesia de San Pedro Mártir  
 Modera: Jordi García Ojalvo

---

## Fórmulas de superposición no lineales: su aplicación a la obtención de soluciones exactas para ecuaciones integrables en derivadas parciales

Pilar Ruiz Gordoa

Universidad Rey Juan Carlos

Área de Matemática Aplicada

Dpto. de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza

C/ Tulipán s/n. 28933 Móstoles, Madrid

E-MAIL: [prg@sonia.fis.usal.es](mailto:prg@sonia.fis.usal.es)

Uno de los aspectos más interesantes del estudio de ecuaciones en derivadas parciales (PDEs) es la obtención de soluciones exactas. Las PDEs integrables son especiales no sólo por poseer mayor variedad de soluciones exactas sino también porque presentan una rica estructura que las diferencia de las demás, como por ejemplo el hecho de que lleven asociadas un par de Lax y transformaciones de Darboux y de Bäcklund.

El conocimiento del par de Lax y de la transformación de Darboux para una PDE completamente integrable proporciona un procedimiento iterativo para la derivación de soluciones exactas cada vez más complicadas, que pasa por resolver en cada paso de la iteración el par de Lax, es decir, una ecuación diferencial. Este proceso se simplifica considerablemente con la llamada transformación de Bäcklund, un conjunto de ecuaciones que relaciona dos soluciones de la misma ecuación. Con esta transformación, y haciendo uso del teorema de permutabilidad, es posible obtener las llamadas fórmulas de superposición no lineales, que generalizan en cierto sentido a ecuaciones no lineales el conocido principio de superposición para ecuaciones lineales.

La ventaja de las fórmulas de superposición no lineal, que incluyen cuatro soluciones de la misma ecuación, es que son de un orden diferencial más bajo que el del par de Lax, llegando en ocasiones, como es el caso de la ecuación de Korteweg-de Vries, a reducirse a una ecuación algebraica. El método es aplicado a la derivación de fórmulas de superposición y su posterior uso en la derivación de soluciones para PDEs en  $1 + 1$  y  $2 + 1$  dimensiones.

---

## Influencia de la geometría en el comportamiento tipo diodo en medios activos

Irene Sendiña Nadal

Grupo de Dinámica no lineal Universidad Rey Juan Carlos  
 c/ Tulipán s/n. Móstoles 28933

E-MAIL: [isendina@escet.urjc.es](mailto:isendina@escet.urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica>

COLABORADORES: M. Gómez-Gesteira (U. de Vigo), M. de Castro (U. de Vigo)

La propagación de ondas en medios activos puede considerarse un proceso isotrópico (por medio activo entendemos un sistema de elementos autónomos distribuidos de forma continua en el espacio con propiedades dinámicas no lineales y que interacciona con su entorno según procesos difusivos). Sin embargo, bajo ciertas condiciones externas se puede bloquear la propagación de la onda en una dirección y generar un frente de ondas discontinuo que usualmente se denomina espiral, re-entrada o vórtice. Dependiendo del campo de investigación, el bloqueo de una onda en una dirección puede

dar lugar a un efecto pernicioso o constituir la base de un fenómeno deseado. Así, desde el punto de vista cardiológico, la formación de frentes de onda discontinuos está relacionada con varias patologías que han sido muy estudiadas por medio de diferentes medios activos (químicos, biológicos...) Por otro lado, otros autores han propuesto el uso de este tipo de ondas unidireccionales observadas en medios químicos en computación y redes neuronales.

El objetivo de este estudio [2] es describir cómo las propiedades geométricas del medio pueden controlar la evolución temporal de un frente de ondas en un medio excitable que va desde el bloqueo total a la propagación bidireccional, pasando por la propagación unidireccional. En un trabajo previo [3] presentamos un análisis detallado de este comportamiento unidireccional en función tanto de la excitabilidad del sistema como del tamaño. En este nuevo trabajo, usamos un modelo cinemático apropiado para describir la propagación de ondas en un medio excitable, que es capaz de recoger la mayoría de las características observadas en la propagación unidireccional debida a una distribución espacial asimétrica de la excitabilidad. Con este modelo, somos capaces de seguir la evolución descompuesta en varios modos independientes de propagación, cada uno descrito por los parámetros empíricos de excitabilidad y geométricos propios de la región por donde se mueve la onda.

1. K. Agladze et al., J. Phys. Chem. 100, 13895 (1996)
2. M. Gómez-Gesteira, M. deCastro, y I. Sendiña-Nadal, enviado.
3. I. Sendiña-Nadal, M. deCastro, F. Sagués, y M. Gómez-Gesteira, Phys. Rev. E 66, 016215 (2002)

---

### Transición Ising-Bloch en un resonador Kerr anisótropo

Víctor J. Sánchez-Morcillo  
*Universitat Politècnica de València*  
*Escola Politècnica Superior de Gandia*  
*Crta. Natzaret-Oliva, s/n*  
*Grau de Gandia, 46730*

E-MAIL: [victorsm@fis.upv.es](mailto:victorsm@fis.upv.es)  
 WWW: <http://www.fisgan.upv.es/disao>

COLABORADORES: V. Espinosa Roselló (U. Politècnica de València), I. Pérez-Arjona, F. Silva Vázquez, G.J. de Valcárcel Gonzalvo y Eugenio Roldán Serrano (U. de València)

Entre las estructuras de origen no lineal que aparecen en los sistemas ópticos extensos [1], las paredes de dominio son de especial interés por su potencial aplicación en el campo del procesado óptico. Estos patrones, que aparecen en la distribución perpendicular al eje del resonador óptico, están formados por dos regiones de igual intensidad pero fases opuestas y separadas por una frontera o pared. Existen dos tipos de paredes en función de cómo conectan los diferentes dominios de fase: en las paredes de tipo Ising la amplitud compleja del campo luminoso llega a extinguirse completamente, como si de un solitón oscuro se tratase, y la fase sufre un salto abrupto de  $\pi$  de un lado a otro. En las paredes de Bloch la intensidad de la luz no se anula completamente en ningún punto y el cambio de fase de un lado a otro se produce con una rotación continua al cruzar la frontera. Como la rotación de la fase alrededor de la pared puede

ocurrir en dos sentidos se entiende que las paredes de Bloch exhiben quiralidad. Es esta una característica fundamental de las paredes de Bloch que, al contrario que las paredes de Ising que se encuentran fijas en el patrón, se mueven sobre el mismo con una velocidad cuyo sentido depende del signo de la quiralidad [2]. Hemos realizado un estudio teórico sobre la aparición de estas estructuras, la transición entre ambos tipos de paredes y su dinámica, en una cavidad Kerr. Se trata de un resonador óptico de espejos planos, que contiene un medio Kerr no lineal de  $\chi^{(3)}$  isotrópica. Este medio es excitado con un campo coherente de amplitud real  $E$ , con polarización lineal definida. Este campo se propaga a lo largo del eje del resonador, que es anisótropo, *i.e.* introduce pérdidas diferentes sobre cada componente perpendicular de la polarización del campo. El modelo describe la aparición de la componente transversal  $A_1$  para un cierto valor del campo real de bombeo  $E$ , a través del acoplamiento no lineal entre las componentes  $A_0$  y  $A_1$  (paralela y ortogonal al campo inyectado, respectivamente). Esta aparición se realiza a través de una bifurcación subcrítica cuando la anisotropía de la cavidad supera un valor mínimo, llevando a la coexistencia de dos soluciones de emisión, el estado linealmente polarizado de la componente  $A_0$  (estable) y la luz elípticamente polarizada, suma de ambas componentes ortogonales [3, 4]. La inestabilidad del estado elíptico permite obtener zonas oscuras en la distribución transversal del campo, zonas que se corresponden con paredes de dominio. Hemos comprobado la presencia de estas paredes, y determinado las fronteras de transición entre el comportamiento estático Ising y la dinámica de las paredes de Bloch en el plano de parámetros dado por la amplitud del campo de bombeo y la desintonía de la cavidad. El sistema descrito presenta además una rica dinámica espacio-temporal del campo (incluyendo patrones extendidos oscilantes) que interacciona con la dinámica de las paredes de Bloch.

1. K. Staliunas y V.J. Sánchez-Morcillo, *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 183, Springer (2003).
2. P. Coullet, J. Lega, B. Houchmanzadeh y J. Lajzerowicz, Phys. Rev. Lett. **65**, 1352 (1990).
3. V.J. Sánchez-Morcillo, G.J. de Valcárcel y E. Roldán, Opt. Comm. **173**, 381 (2000).
4. V.J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G.J. de Valcárcel y E. Roldán, Opt. Lett. **25**, 957 (2000).

---

### Analyticity and singularity formation in the generalized KdV equation

Henrik Kalisch  
*Lund University*  
*Centre for Mathematical Sciences*  
*221 00 Lund, Sweden*

E-MAIL: [kalisch@maths.lth.se](mailto:kalisch@maths.lth.se)  
 WWW: <http://www.maths.lth.se/matematiklu/personal/kalisch/index.html>

COLABORADORES: Jerry L. Bona (U. of Illinois, Chicago), Zoran Grujić (U. Virginia, Charlottesville)

We consider the initial-value problem for the generalized Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$u_t + u_{xxx} + u^p u_x = 0$$

in classes of analytic functions. Since the weak smoothing effect of this equation was discovered, considerable progress has been made in understanding low-regularity solutions. In particular, Bourgain [1], Kenig *et al.* [2], and others have developed a method with which the dispersive smoothing can be exploited to prove local well-posedness in spaces where classical derivatives do not exist.

On the other hand, global-in-time well-posedness remains essentially unsolved. It has been shown by Martel and Merle [3] that when  $p = 4$ , global well-posedness is prohibited by the existence of solutions that develop singularities in finite time. It is thought that for  $p > 4$ , the equation will also exhibit these so-called blow-up solutions; however, a proof remains elusive.

Our approach to this problems has been motivated by the observation that the domain of analyticity of a solution contains precise information about the  $L^\infty$ -behavior. Accordingly, we show that under suitable assumptions loss of boundedness implies loss of analyticity.

It is also shown that locally in time, the domain of analyticity is invariant, while the radius of analyticity decays algebraically for large time if the solutions do not blow up.

1. J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, GAFA **3** (1993), 107-156, 209-262.
2. C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Am. Math. Soc. **9** (1996), 573-603.
3. Y. Martel and F. Merle, *Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the  $L_2$ -critical generalized KdV equation*, J. American Math. Soc. **15** (2002), 617-664.

---

## Sesión JC4: Series temporales II

Jueves, 3 de junio (18:10-19:30)  
Teatrillo de San Pedro Mártir  
Modera: Jordi Caballé

---

### Análisis de los registros electroencefalográficos de pacientes sometidos a terapia electroconvulsiva, mediante dinámica simbólica

María Isabel Parra Arévalo  
Universidad de Extremadura  
Departamento de Matemáticas,  
Avenida de Elvas, sn  
Badajoz, 06071

E-MAIL: mipa@unex.es

COLABORADORES: Francisco Cuadros (U. Extremadura), María Soledad Salcedo y Pablo Calderón (Complejo Hospitalario de Badajoz)

La terapia electroconvulsiva (TEC) es un tratamiento biológico consistente en inducir una convulsión tónico-clónica generalizada, de forma controlada, mediante la administración de una dosis de estímulo eléctrico superior al umbral

convulsivo. Sin duda, el tema crea gran inquietud desde la primera aplicación en humanos, generándose controversias sobre el método y los mecanismos de acción involucrados. Actualmente, sigue siendo un foco de interés en la investigación científica, debido a que aún quedan espacios oscuros en relación a su acción terapéutica y a la causa de los efectos adversos.

En este estudio, analizamos las series temporales obtenidas durante 124 sesiones de TEC. En realidad, nos centramos en el electroencefalograma (EEG), debido a que estos registros no se ven afectados por la anestesia y el relajante muscular que se administra al paciente, y, por tanto, la mayoría de las decisiones médicas se basan en él. Nos hemos planteado tres cuestiones, de gran relevancia clínica: ¿ha ocurrido convulsión?, ¿cuál fue su duración? y ¿cómo de adecuada resultó desde un punto de vista terapéutico?

Cada convulsión inducida eléctricamente mediante TEC se acompaña de cambios limitados pero intensos en los registros electroencefalográficos (EEG). Por ello, se trata de series limitadas, con altos niveles de ruido y comportamiento no estacionario, que exhiben unos cambios muy marcados tanto en la estructura de la frecuencia como en la amplitud. Por ello, pensamos en la dinámica simbólica como herramienta de trabajo. El resultado es una reducción severa de la información disponible, pero manteniendo las propiedades invariantes y robustas de la serie. Hemos comprobado que la codificación, basada en la dimensión fractal, definida como:

$$S_j = 1 + \frac{\log L}{\log(2(M-1))}, \quad (1)$$

donde  $L$  es la longitud de la curva y  $M$  el número de puntos de la ventana, nos permite caracterizar dichos cambios.

En todos los casos analizados encontramos un patrón en la tendencia de las curvas de evolución de los símbolos que se repite cualitativamente. Hemos estimado el final de la convulsión automáticamente, aprovechando una característica común a todos los periodos post-ictal analizados: el valor de  $S_j$  es aproximadamente constante. Los resultados obtenidos están en mejor acuerdo con los facilitados *a posteriori* por un especialista clínico que los proporcionados automáticamente por el aparato que suministra los estímulos. Además, resultados preliminares indican que dicho valor puede ayudar a predecir la calidad de la convulsión, ya que está directamente relacionado con la mejoría global en el estado del paciente evaluada por el terapeuta.

---

### Análisis de la coordinación cardiovascular y cardiorrespiratoria con técnicas no lineales multivariantes

Julián J. González González  
Lab. de Biofísica. Dpto. de Fisiología  
Universidad de La Laguna  
La Laguna, 38071, S/C de Tenerife

E-MAIL: jugonzal@ull.es

WWW: <http://webpages.ull.es/users/jugonzal>

COLABORADORES: Dulce De La Cruz (Dpto. de Fisiología, Univ. La Laguna), Luis De Vera (Dpto. de Fisiología, Univ. La Laguna), Ernesto Pereda (Dpto. de Física Básica, Univ. La Laguna)

Analizamos la coordinación cardiorrespiratoria (CCR) mediante las señales de variabilidad latido a latido del in-

tervalo cardiaco (IC) y la de respiración (RP); y la cardiovascular (CCV) mediante la IC y la señal de presión sistólica (PS) en rata. Utilizamos dos índices de la teoría de sistemas no lineales. El primero,  $N(X|Y)$ , derivado del concepto de sincronización generalizada. El segundo,  $d_{xy}$ , mide la sincronización entre las fases de las señales. Ambos son asimétricos y sensibles a correlaciones no lineales. Series de 1024 intervalos cardiacos sucesivos y los correspondientes valores de RP y PS fueron analizados en situación basal, y tras la administración de fármacos que afectan a la CCV y la CCR. Dado que el índice  $d_{xy}$  está indicado para el estudio de interdependencias entre señales con una gran periodicidad, el análisis se realizó sobre versiones filtradas de las señales, tanto en el rango de baja (BF, 0.1-0.9 Hz) como en el de alta frecuencia (AF, 0.9-2.5 Hz). Resultados: El test de los datos subrogados mostró que la interdependencia entre las señales fue siempre significativa y de carácter no lineal. A  $N(X|Y)$ : Para la BF, en basal se observa una asimetría en la CCV, con  $(PS-IC) > (IC-PS)$ . Los fármacos producen dos efectos: 1) El bloqueo del sistema nervioso vagal produce una disminución de la dependencia  $(IC-PS)$  sin alterar la asimetría. 2) La disminución del tono vascular producida por el bloqueante de la síntesis del NO da lugar a un aumento de la esa misma dependencia (reflejo baroreceptor), desapareciendo la asimetría. Para la AF, en basal los resultados para la CCV coinciden con la BF. El bloqueo del sistema nervioso vagal disminuye la dependencia  $(PS-IC)$ , que se vuelve simétrica. Para la CCR, la dependencia  $(IC-RP)$  en basal es simétrica. El único efecto de los fármacos es la disminución de la dependencia  $(IC-RP)$  (*sinus arritmia*) tras bloqueo vagal. b)  $d_{xy}$ : Para la BF, la asimetría basal entre PS e IC coincide con lo encontrado para  $N(X|Y)$ . El efecto de los fármacos es también idéntico. En AF,  $d_{xy}$  muestra que  $(IC-PS) > (PS-IC)$ . La CCV tras los fármacos solo se ve afectada tras el bloqueo beta-simpático, que vuelve simétrica la dependencia  $(IC-PS)$ . El bloqueo del NO produce el mismo efecto. En cuanto a la CCR, este  $d_{xy}$  es sensible en basal a la sinus arritmia ( $(IC-RP) > (RP-IC)$ ). En cuanto a los fármacos, la dependencia  $(IC-RP)$  disminuye tras el bloqueo vagal. Conclusiones: a) Basal: ambos índices tienen el mismo comportamiento en BF. Sin embargo, en AF,  $d_{xy}$  muestra una asimetría en la CCR ( $(IC-RP) > (RP-IC)$ ), que no aparece con el otro. Al mismo tiempo, ambos difieren en el signo de la CCV: para  $N(X|Y)$ , se tiene  $(PS-IC) > (IC-PS)$  mientras que para  $d_{xy}$  sucede al contrario. b) Fármacos: de nuevo la diferencia entre índices aparece en AF. Mientras que  $d_{xy}$  es sensible al bloqueo beta-simpático,  $N(X|Y)$  lo es con respecto al bloqueo vagal. La teoría indica que la detección de sincronización generalizada en señales de diferente naturaleza resulta problemática. También, se sabe que la sincronización de fase es de carácter débil: las fases de las señales están relacionadas aunque no lo estén las amplitudes. Esto explicaría la distinta sensibilidad de los dos índices (véase la diferencia entre ambos tras el bloqueo beta-simpático y parasimpático en AF). Para el estudio de la CCV, ambos proveen la misma información, mientras que en el caso de la CCR, el  $d_{xy}$  parece poseer mayor sensibilidad. Estudio financiado por el PI02/0194 del F.I.S. y el BFI2002-01159 del MCyT.

## Una primera aproximación al estudio de series temporales de datos de teledetección mediante técnicas de dinámica no lineal

Juan José Miralles Canals  
*Universidad de Castilla-La Mancha*  
*E.P.S.A., Avenida de España, s/n*  
*Albacete, 02071*

E-MAIL: [Juan.Miralles@uclm.es](mailto:Juan.Miralles@uclm.es),  
[Juan.MMartinez@uclm.es](mailto:Juan.MMartinez@uclm.es), [Mariamar.Artigao@uclm.es](mailto:Mariamar.Artigao@uclm.es)  
 WWW: <http://www.poincare.pol-ab.uclm.es>

COLABORADORES: Juan Antonio Martínez Martínez, María del Mar Artigao Castillo

Un aspecto importante en cualquier trabajo que implique la medida de observables a partir de imágenes de satélite es la interpretación de la medida en términos de magnitudes medidas en tierra, y por lo tanto la correlación entre los datos obtenidos con el sensor espacial y el terrestre. Nuestro interés se centra en el estudio de la evolución temporal de observables físicos obtenida a partir de datos de teledetección.

La presente contribución trata de un primer acercamiento a la estimación de efectos no lineales en observables físicos medidos a partir de datos de satélite. Puesto que el tratamiento directo con datos de satélite es un problema arduo que consume muchos recursos, no sólo ni principalmente informáticos, y es crítico el número de datos necesarios, hemos optado, en un primer contacto con el problema, por una vía menos directa pero que esencialmente reproduzca el problema que queremos abordar.

Las medidas que toma un satélite pueden ser sustituidas por las medidas de un radiómetro que simule los canales de entrada de un sensor determinado, como puede ser el sensor AVHRR a bordo de los satélites NOAA.

En nuestra contribución se toman las series temporales de temperatura aparente de la superficie del mar adquiridas mediante un radiómetro situado en una plataforma petrolífera y las series temporales de temperatura tomadas mediante boyas marinas en las mismas instalaciones.

A partir de dichos datos se calcula el tiempo de retardo y la dimensión local del espacio de fases donde transcurre la dinámica, tanto de las series temporales obtenidas con el radiómetro como de las obtenidas con el sensor situado en la boya. Estas primeras medidas nos permiten estimar si el sistema físico que hay detrás de las medidas realizadas admite un tratamiento mediante dinámica no lineal en el sentido de los teoremas de *embedding*.

Finalmente se comparan los resultados obtenidos con ambas series temporales y se extrapolan las conclusiones obtenidas al problema de la medida de observables que evolucionan con el tiempo en el ámbito de la teledetección.

## Estudio de órbitas de sistemas dinámicos mediante *wavelets*

Francisco Ballesteros Olmo  
*Universidad Politécnica de Madrid*  
*E.T.S.I. Telecomunicación,*  
*Ciudad universitaria,*  
*Madrid, 28040*

E-MAIL: [fbo@mat.upm.es](mailto:fbo@mat.upm.es)

COLABORADORES: Lorenzo J. Martín García (U. Politécnica de Madrid), Pedro Mellén Bonilla (U. Politécnica de Madrid)

Los modelos no lineales surgen como una necesidad de describir más ajustada y detalladamente los fenómenos reales para su mejor conocimiento.

Para el estudio del caos muchas técnicas han sido empleadas: el análisis de Fourier, el exponente de Lyapunov, la función de autocorrelación y la sección de Poincaré, entre otras. En este trabajo se utiliza la transformada *wavelet* como una herramienta más en dicho estudio.

El análisis *wavelet* consiste en expresar una señal como descomposición de un conjunto de señales caracterizadas por anularse rápidamente en el tiempo y estar bien localizadas en frecuencia (*wavelets*). Estas señales representan la información a diferentes escalas, lo cual permite aquilatar detalles hasta el nivel deseado, dependiendo del nivel de resolución empleado.

A tal fin, en este trabajo se aplica la transformada *wavelet* discreta (DWT) a las órbitas del sistema dinámico para poner de manifiesto su carácter, bien periódico o bien, caótico. En esta línea, se comprueba que las señales a distintas escalas mantienen la estructura cualitativa de la señal inicial, lo cual se visualiza tanto con la función de autocorrelación como con el espectrograma. Además, la función correspondiente al último nivel de descomposición –baja frecuencia– es una función suave y, consecuentemente, es más estable respecto a los posibles redondeos de cálculo.

Asimismo, se ha construido un generador de secuencias aleatorias binarias, el cual puede obtenerse en cualquier etapa del proceso de descomposición ajustando adecuadamente el umbral de la función binaria de salida. Dichas secuencias aleatorias son aptas para su uso en módulos criptográficos.

---

## Sesión VA1: Ondas no lineales

Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)  
 Aula 1.2  
 Modera: Víctor M. Pérez García

---

## Soluciones moduladas tipo solitón para la ecuación de Zakharov-Kuznetsov

María del Carmen Jorge y Jorge  
*IIMAS, Universidad Nacional Autónoma de México.*  
*Ciudad Universitaria,*  
*México, D.F. 04510*  
*MEXICO.*

E-MAIL: [mcj@mym.iimas.unam.mx](mailto:mcj@mym.iimas.unam.mx)

COLABORADORES: Luis Mier y Terán Romero (Northwestern Univ.), A. A. Minzoni (IIMAS-UNAM) y N. F. Smyth (Univ. de Edimburgo)

En 1974 Zakharov y Kuznetsov estudiaron la propagación de ondas solitarias de densidad de iones en un plasma. Este plasma está sujeto a un campo magnético intenso y uniforme y se considera que los electrones tienen una temperatura mucho mayor al de los iones.

Obtuvieron una ecuación para las fluctuaciones de densidad iónica con amplitud pequeña que se conoce como la ecuación Zakharov-Kuznetsov (ZK) y está dada por:

$$u_t + 6uu_x + \nabla^2 u_x = 0. \quad (1)$$

Se sabe que las ondas con simetría esférica son estables y por tanto es posible que existan solitones.

En este trabajo se estudia la evolución de una onda con perfil Gaussiano. Utilizando las leyes de conservación de la ecuación ZK y la teoría de modulaciones se encuentra un sistema de ecuaciones ordinarias no lineales para la amplitud, velocidad y anchura de la Gaussiana inicial. Se incluye la solución numérica para comparar con los resultados asintóticos.

Se aplican las mismas técnicas para la evolución de una onda Gaussiana para la ecuación ZK generalizada dada por:

$$u_t + 6u^p u_x + \nabla^2 u_x = 0, p > 0. \quad (2)$$

Se encuentran los rangos del parámetro  $p$  para los cuales hay estabilidad y por tanto solución tipo solitón. Se incluyen también las comparaciones numéricas.

Finalmente se utilizan los resultados anteriores en el problema de electromigración en películas metálicas delgadas sometidas a una corriente eléctrica. La colisión de los electrones conductores y los átomos de metal hace que éstos se propaguen en la superficie de la película ocasionando que la superficie de metal sólido se mueva y deforme. Las ecuaciones que modelan este fenómeno son:

$$u_t + \frac{1}{2}uu_x + \nabla^2 u_x = -\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla u, \nabla^2\phi = u_x, \quad (3)$$

donde  $\phi$  es el potencial eléctrico y  $u$  la deformación de la película. Se prueba con las técnicas descritas al principio que efectivamente hay propagación de solitones en la superficie de la película.

1. Bradley, R. M. *Transverse instability of solitons propagating on current-carrying metal thin films*, *Physica D*, **158**, pp. 216-232 (2001).
2. Kath, W. y Smyth, N. F. *Soliton evolution and radiation loss for the Korteweg-de Vries equation*, *Phys. Rev. E*, **51**(2), pp. 1-670 (1995).
3. Sipcic, R. y Benney, D. J. *Lump interactions and collapse in the modified ZK equation*, *Studies in Applied Math.*, **105**, pp. 385-403 (2000).

4. Zakharov, V. E. y Kuznetsov, E. A. *Three dimensional solitons*, Sov. Phys. JETP, **39** pp. 285-286 (1974).
5. Zhuk, V. I. y Popov, S. P. *Soliton solutions in two-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation*, Zh. Vychisl. Mat Fiz., **38**, pp. 122-135 (1998).

---

### Transmisión, reflexión y generación del segundo armónico en una guía de ondas no lineal

Grant Lythe

*Departamento de Matemáticas Aplicadas*

*Universidad de Leeds*

*LS2 9JT*

*Reino Unido*

E-MAIL: [grant@maths.leeds.ac.uk](mailto:grant@maths.leeds.ac.uk)

WWW: <http://www.maths.leeds.ac.uk/~grant>

COLABORADORES: Roberto Camassa (Chapel Hill, EE.UU.), Alp Fındıkoğlu (Los Alamos, EE.UU.)

Hemos realizado un estudio experimental, numérico y teórico de lo que ocurre cuando ondas electromagnéticas y ruido se propagan por un medio no lineal. El medio experimental es una guía de ondas de longitud finita hecha en una película superconductor por encima de un cristal dieléctrico con dimensiones  $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 0.5\text{mm}$ .

Puesto que la relación entre carga eléctrica y voltaje es no lineal, la ecuación de ondas exhibe una no-linealidad cuya forma se puede afinar mediante un voltaje impuesto de unos voltios. Hemos obtenido soluciones numéricas de dicha ecuación con condiciones de contorno realistas, pero sin pérdidas. Un desarrollo analítico, basado en que la amplitud de la señal sea pequeña frente al voltaje característico de la no-linealidad, es capaz de predecir la transmisión, reflexión y generación del segundo armónico.

Además de fenómenos de resonancia entre la longitud de onda de la señal y la longitud de la guía de ondas, se generan señales armónicas. Obtenemos un acuerdo cuantitativo entre los resultados experimentales, numéricos y teóricos.

---

### Ecuación diferencial ordinaria como límite para una ecuación de ondas no lineal para un sistema muelle-masa

Marta Pellicer Sabadí

*Departament Matemàtica Aplicada 1*

*ETSEIB, Universitat Politècnica de Catalunya*

*Avda. Diagonal, 647*

*Barcelona, 08028*

E-MAIL: [marta.pellicer@upc.es](mailto:marta.pellicer@upc.es)

WWW: <http://www-ma1.upc.es/personal/pellicer.html>

COLABORADORES: Joan Solà-Morales Rubió (U. Politècnica de Catalunya)

En este trabajo se propone una versión no lineal para el modelo de un sistema muelle-masa estudiado en [1]. Concretamente, el objeto de nuestro análisis es la ecuación en

derivadas parciales siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - \alpha u_{txx}(x, t) \\ \quad + \varepsilon f\left(u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ u_{tt}(1, t) = -\varepsilon [u_x + \alpha u_{tx} + r u_t](1, t) \\ \quad - \varepsilon f\left(u(1, t), \frac{u_t(1, t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $u = u(x, t)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$  y con parámetros  $\alpha, r > 0$  y  $\varepsilon \geq 0$ . Se trata de una ecuación de ondas no lineal con disipación fuerte si  $\alpha > 0$  y con condiciones de contorno dinámicas (y no lineales) en  $x = 1$ . La ecuación anterior modeliza el comportamiento viscoelástico de un sistema muelle-masa al cual se aplica una fuerza externa dada por  $f$ . Clásicamente, este tipo de sistemas han sido modelizados por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, pero esto no tiene en cuenta fenómenos como la disipación debida a la viscosidad interna del muelle o posibles diferencias en su deformación interna. Nuestro objetivo será ver que el modelo propuesto admite una ecuación diferencial ordinaria como límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para ello utilizaremos la teoría de variedades invariantes para familias de operadores que, bajo ciertas condiciones de regularidad para  $f$ , permite demostrar la existencia de una variedad invariante exponencialmente atractora de dimensión dos, si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, cuya ecuación viene dada por  $\sigma_\varepsilon$ . Además, se puede ver que  $\sigma_\varepsilon \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la topología de  $C^1$ . Esto nos permitirá demostrar que, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , las soluciones de (1) tienden a las soluciones de la EDO no lineal de orden 2

$$u'' + u + f(u, u') = 0 \quad (2)$$

con  $u = u(t)$ , que pensaremos como límite de (1) y a la que podrán aplicarse resultados de estabilidad estructural. Este resultado, además, nos permite pensar la no linealidad de (1) como un control introducido en el sistema muelle-masa para que su desplazamiento venga dado por (2).

Más detalles sobre este trabajo pueden encontrarse en [2].

1. M. Pellicer, J. Solà-Morales, *Analysis of a viscoelastic spring-mass model*, preprint.
2. M. Pellicer, *Anàlisi d'un model de suspensió-amortiment*, tesis (en preparación).

---

### Diffusion of intrinsic localised modes by attractor hopping

Matthias Meister

*Dpto. Matemática Aplicada*

*Universidad Complutense*

*Ciudad Universitaria s/n*

*Madrid, 28040*

E-MAIL: [matthias@unizar.es](mailto:matthias@unizar.es)

COLABORADORES: Luis Vázquez

Intrinsic localised modes are localised excitations that can exist in a large variety of discrete and nonlinear systems. A standard example of such a system is the discrete sine-Gordon chain (which can be considered a system of coupled pendula). Here we consider this chain under damping

and external driving. In this case propagating intrinsic localised modes have been found to exist as attractors of the dynamics in certain regions of parameter space. The equations of motion of the system are augmented with Gaussian white noise in order to model the effects of temperature on the system. The noise induces random transitions between attracting configurations corresponding to opposite signs of the propagation velocity of the mode, which leads to a diffusive motion of the excitation. The Heun method is used to numerically generate the stochastic time-evolution of the configuration. We also present a theoretical model for the diffusion which contains two parameters, a transition probability  $\Theta$  and a delay time  $\tau_A$ . The mean value and the variance of the position of the intrinsic localised mode, obtained from simulations, can be fitted well with the predictions of our model,  $\Theta$  and  $\tau_A$  being used as parameters in the fit. After a transition period following the switching on of the noise, the variance shows a linear behaviour as a function of time and the mean value remains constant.

---

### Estudio de ecuaciones tipo Klein-Gordon no lineales mediante un formalismo Lagrangiano

Elías Zamora-Sillero

*Departamento de Análisis Matemático,  
Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,  
Apartado de Correos 1160, Sevilla E-41080, Spain  
y Departamento de Física Aplicada I (E.U.P. Universidad  
de Sevilla).*

E-MAIL: [elias@euler.us.es](mailto:elias@euler.us.es)

COLABORADORES: Niurka R. Quintero (Universidad de Sevilla)

Durante las últimas tres décadas los solitones y las ondas solitarias bajo la acción de perturbaciones externas han sido profusamente estudiados. La causa estriba en que tanto la disipación como la acción de las fuerzas externas están inevitablemente presentes en los sistemas físicos, que son modelados por ecuaciones (en general EDP no lineales) relacionadas con estas soluciones. Con el objetivo de resolver aproximadamente este tipo de ecuaciones, a lo largo de este tiempo se han desarrollado varias técnicas analíticas, entre las que podemos citar las teorías de perturbaciones propuestas por Fogel *et al.* [Phys. Rev. Lett. **36**, 1411 (1976)] y por McLaughlin y Scott [Phys. Rev. A **18**, 1652 (1978)]. Sin embargo, dichos métodos se basan en cálculos tediosos que los hacen poco manejables. Estos cálculos pueden simplificarse al suponer que la perturbación afecta exclusivamente a un número finito de magnitudes, las llamadas coordenadas colectivas (CCs). En este caso se utilizan diferentes métodos para obtener las ecuaciones de movimiento de dichas coordenadas, entre ellos se destacan:

- (a) el método generalizado de ondas viajeras — *Generalized Traveling Wave Ansatz* (GTWA)— [Phys. Rev. Lett. **84**, 871 (2000)],
- (b) la variación del momento y la energía —cuando sólo consideramos dos coordenadas colectivas— [Phys. Rev. E **62**, 5695 (2000)] y
- (c) el formalismo lagrangiano (en el caso de las ecuaciones de sine-Gordon y  $\phi^4$ , bajo determinadas perturbaciones donde no se consideran los efectos de la disipación) [Phys. Rev. Lett. **67**, 1177 (1991), Phys. Rev. A **45**,

6019 (1992)].

El objetivo de este trabajo es extender el formalismo lagrangiano a las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales, perturbadas de forma genérica. A diferencia de los trabajos anteriores tenemos en cuenta explícitamente el término disipativo. En este caso, proponemos un cambio de variable temporal en la ecuación original que elimina el término disipativo. Ello hace posible que se pueda escribir una densidad lagrangiana relacionada con esta última ecuación. A partir de ella y de un *ansatz* que se propone como solución de la ecuación original se calcula el lagrangiano como función de las CCs. Finalmente, utilizando la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen las CCs.

Además de generalizar el formalismo lagrangiano a las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon perturbadas, demostramos la equivalencia de este método con el *GTWA* independientemente del *ansatz* que se proponga como solución de la ecuación original y de cuántas CCs se utilicen. A modo de ejemplo, analizaremos las ecuaciones de sG y  $\phi^4$  con disipación bajo la acción de fuerzas externas periódicas.

---

### Sesión VA2: Sistemas dinámicos discretos

Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)

Aula 2.2

Moderador: Lluís Alsedà

---

#### Modelos dinámicos discretos de neuronas

Borja Ibarz Gabardós

*Grupo de Dinámica no Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
28933 Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [bibarz@escet.urjc.es](mailto:bibarz@escet.urjc.es)

COLABORADORES: Alexandre Wagemakers, Miguel A. F. Sanjuán

Desde que Hodgkin y Huxley publicaron sus ecuaciones para representar el comportamiento eléctrico de una neurona, los sistemas dinámicos en tiempo continuo han dominado el modelado de las células excitables. Sólo recientemente están recibiendo atención en este campo aplicaciones discretas explícitas, muy ventajosas para el estudio de grandes redes neuronales debido a su sencillez computacional. Estos modelos renuncian en buena medida a una correlación fisiológica directa y tratan de reproducir de forma tan simple como sea posible los distintos regímenes observados experimentalmente en este tipo de células.

El presente trabajo recoge y compara las aplicaciones discretas de Shilnikov-Rulkov, Tanaka-Aihara, Cazelles e Izhikevich y trata de clarificar las relaciones entre ellos, con especial atención a los mecanismos que producen oscilaciones bajo umbral y ráfagas. Estos comportamientos son determinantes para la sincronización de grupos de neuronas, fenómeno de gran importancia para la regulación de la función cerebral y, según se cree, para el procesamiento neuronal de información. La clasificación de acuerdo con estas propiedades de los modelos discretos permite esclarecer las coincidencias y diferencias en capacidad de repre-



sentación y computación de las redes con ellos formadas.

### Sobre ANCE's en sistemas triangulares con base no conjugada a una rotación

Sara Costa Romero

Universitat Autònoma de Barcelona  
 Departament de Matemàtiques, Edifici C  
 08193 Bellaterra (Barcelona)

E-MAIL: [scosta@mat.uab.es](mailto:scosta@mat.uab.es)

WWW: <http://www.gsd.uab.es/personal/scosta>

COLABORADORES: Lluís Alsedà Soler (U. Autònoma de Barcelona)

En este trabajo pretendemos estudiar los atractores no caóticos extraños (ANCE's) en sistemas bidimensionales triangulares cuando la componente rotatoria es complicada. Una definición aproximada de ANCE podría ser la siguiente: un ANCE es un atractor geoméricamente extraño para el que los exponentes de Lyapunov en las órbitas típicas son no positivos.

A pesar de que los ANCE's son objetos dinámicos exóticos aparecen frecuentemente en los fenómenos físicos. Un área importante de la física donde el estudio de los ANCE's tiene una especial relevancia es, entre otras, la mecánica cuántica (más concretamente en la parte relacionada con los sistemas mecánicos cuánticos con potenciales cuasiperiódicos). Otro ejemplo es la relación existente entre el fenómeno de localización de la función de onda y el ANCE asociado a una variable auxiliar (véase [1]).

En la literatura se pueden encontrar sistemas genéricos sometidos a un forzamiento cuasiperiódico, de manera que se pueden hallar entornos en el espacio de parámetros que están relacionado con atractores caóticos extraños, y otros relacionados con la existencia de atractores periódicos o cuasiperiódicos. En algún sentido, se puede considerar que los ANCE's son la dinámica intermedia entre la cuasiperiódica y la caótica, i.e., no hay sensibilidad respecto a condiciones iniciales pero el movimiento es no periódico.

Los ejemplos más sencillos de ANCE's se obtienen en modelos de la forma:

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \omega \pmod{1}, \\ x' &= f(\theta, x) \end{cases}$$

donde  $(\theta, x) \in \mathbb{R}^2$  y  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Para este tipo de modelos existen demostraciones rigurosas de la existencia de ANCE's en:

- Ref. [2] para el caso:

$$f(\theta, x) = 2\sigma \tanh(x) \cos(2\pi\theta)$$

- Ref. [3], donde  $f(\theta, x) = h(x)g(\theta)$  verificando las condiciones siguientes:

1.  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es clase  $\mathcal{C}^1$ , acotada, creciente, estrictamente cóncava y  $f(0) = 0$ ,
2.  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$  continua,
3.  $\sigma := f'(0) \cdot \exp(\int \log g(\theta) d\theta) > 1$ ,
4. existe  $\hat{\theta} \in \mathbb{S}^1$  de manera que  $g(\hat{\theta}) = 0$ .

Un modelo más general y con dinámica más rica que el descrito anteriormente es:

$$\begin{cases} \theta' &= \varphi(\omega), \\ x' &= f(\theta, x) \end{cases}$$

donde el intervalo de rotación de  $\varphi$  no es necesariamente degenerado.

Una pregunta natural en este contexto es: ¿bajo qué condiciones coexisten ANCE's asociados a diferentes números de rotación irracionales pertenecientes al intervalo de rotación de  $\varphi$ ? Esta es una investigación en curso. El objetivo de la charla es presentar los resultados obtenidos hasta el momento en esta dirección, así como algunas conjeturas razonables.

1. A. Prasad, S. S. Negi and R. Ramaswamy, *Strange nonchaotic attractors*, International Journal of Bifurcation and Chaos 11 (2001) 291-309.
2. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikand and J. A. Yorke, *Strange attractors that are not chaotic*, Physica D 13 (1984), 262-268.
3. G. Keller, *A note on strange nonchaotic attractors*, Fundamenta Mathematicae (1996), 139-148.

### Dinámica mínima en árboles

David Juher Barrot

Universitat de Girona  
 c/Lluís Santaló s/n  
 Girona, 17071

E-MAIL: [juher@ima.udg.es](mailto:juher@ima.udg.es)

WWW: <http://ima.udg.es/~juher>

COLABORADORES: Lluís Alsedà Soler (U. Autònoma de Barcelona), Pere Mumbrú Rodríguez (U. de Barcelona)

En la década de 1970, científicos de todas las ramas del saber empezaron a mostrarse interesados por los sistemas dinámicos discretos en dimensión 1. En parte, el éxito de este tipo de sistemas vino dado por el hecho de que, a menudo, la parte más compleja de un modelo multidimensional (como el modelo atmosférico de Lorenz) puede reducirse a un sistema de dimensión 1. Además, de algún modo las aplicaciones continuas no invertibles definidas en un intervalo cerrado (o en toda la recta real) son el modelo más simple en el que se pueden dar fenómenos complejos como el caos, la transitividad o la entropía topológica positiva, y tiene interés y sentido plantearse problemas como la caracterización del tamaño de las órbitas periódicas que puede exhibir un sistema dinámico definido por la iteración sucesiva de una aplicación de este tipo. Por ejemplo, por el Teorema de Sharkovskii, una aplicación continua en dimensión 1 puede tener órbitas periódicas solamente de periodos 1, 2, 4, 8 y 16. Pero si tiene una órbita de periodo impar, entonces necesariamente presenta órbitas con una infinidad de periodos distintos.

En el estudio de este tipo de problemas combinatorios (coexistencia de órbitas periódicas de distintos tamaños) tiene mucha importancia la existencia de modelos minimales. Esto es: dada una permutación (o *pattern*)  $P$  de orden  $n$  (digamos,  $P = (1, 3, 4, 2)$ ), existe una aplicación continua  $f_P$  del intervalo con una órbita periódica de periodo  $n$  que combinatoriamente se comporta como  $P$  (es decir, si los puntos de la órbita están ordenados  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  entonces  $f_P(x_1) = x_3$ ,  $f_P(x_3) = x_4$ ,  $f_P(x_4) = x_2$  y  $f_P(x_2) = x_1$ ) y

que es monótona entre los puntos  $x_i$  (la gráfica de  $f_P$  entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  es, por ejemplo, una afinidad de pendiente constante). Este modelo  $P$ -minimal es la aplicación más simple (dinámicamente hablando) en el conjunto de todas las aplicaciones que exhiben una órbita que se comporta como  $P$ . Su entropía topológica es la menor posible en este conjunto, y cualquier otra órbita que exhiba también será exhibida por cualquier aplicación del conjunto.

En la década de los 90 varios autores generalizaron estas nociones clásicas de dinámica combinatoria al contexto de los árboles. Es decir, se ha generalizado el espacio 1-dimensional en el cual las aplicaciones están definidas (se puede pensar un intervalo cerrado como un árbol con una sola arista). Alsedà, Guaschi, Los, Mañosas y Mumbrú, en un trabajo del año 1997, extienden por primera vez el concepto de *pattern* de una órbita de periodo  $n$  (que, en el caso del intervalo, coincide con el concepto de permutación de  $n$  elementos), y logran demostrar que, dado un *pattern*  $P$ , siempre existe un modelo  $(T, A, f)$  ( $T$  es un árbol,  $f : T \rightarrow T$  es una aplicación continua y  $A$  es una órbita que exhibe  $P$ )  $P$ -minimal, de forma que  $f$  es monótona entre puntos consecutivos del conjunto  $A$ . Aquí, dos puntos de  $A$  se dice que son consecutivos si no hay ningún otro punto de  $A$  en el camino más corto que los une. Este modelo, que esencialmente es único, tiene propiedades de minimalidad dinámica parecidas a las que presentaban las aplicaciones del intervalo “monótonas a trozos” de los años 70 y 80. En nuestro trabajo analizamos con más detalle la minimalidad dinámica de este tipo de modelos, y demostramos que el conjunto de periodos de  $f$  está contenido en el de cualquier otra aplicación  $g$  que exhiba  $P$ . Además, afinamos este resultado estableciendo una correspondencia inyectiva del conjunto de órbitas periódicas de  $f$  en el de  $g$  que preserve el periodo, de lo que se deduce que cualquier modelo que exhiba el *pattern*  $P$  siempre tiene al menos tantas órbitas periódicas de un periodo dado como el modelo minimal. Estos resultados han sido básicos para demostrar un resultado de coexistencia de órbitas de distintos tamaños para aplicaciones de árboles, que hemos presentado en otro trabajo.

### Combinación periódica de aplicaciones cuadráticas y paradoja de Parrondo

Daniel Peralta-Salas  
 Departamento de Física Teórica II  
 Facultad de Ciencias Físicas,  
 Universidad Complutense,  
 28040 Madrid, Spain

E-MAIL: dperalta@fis.ucm.es

COLABORADORES: Javier Almeida Linares (CSIC), Miguel Romera García (CSIC)

La recientemente descubierta paradoja de Parrondo afirma que dos juegos perdedores pueden dar lugar, si se los alterna de forma aleatoria o periódica, a un juego ganador. Este fenómeno se representa habitualmente como “perder + perder = ganar”. En este trabajo seguimos la filosofía de Parrondo de combinar diferentes dinámicas y la aplicamos al caso de aplicaciones cuadráticas unidimensionales. Mostramos que para ciertos valores del parámetro  $c$  las dinámicas  $A_1 : x_{n+1} = x_n^2 + c_1$  y  $A_2 : x_{n+1} = x_n^2 + c_2$  son caóticas, mientras que la dinámica  $(A_1 A_2)$  obtenida mediante alter-

nancia periódica, esto es

$$(A_1 A_2) : \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + c_1 & \text{cuando } n \text{ es par} \\ x_{n+1} = x_n^2 + c_2 & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (1)$$

es ordenada en un sentido bien definido (posee una órbita 2-periódica estable). Probamos este resultado suponiendo que las constantes  $c_1$  y  $c_2$  son puntos de Misiurewicz que satisfacen la ligadura  $c_1^2 + c_2 = \epsilon$ , donde  $\epsilon$  representa un número real suficientemente pequeño. Dos puntos de Misiurewicz que satisfacen esta condición son  $c_1 = -1,407405118\dots$  y  $c_2 = -2$ . Esto proporciona un ejemplo explícito (teórica y numéricamente verificado) de un fenómeno paradójico Parrondiano diferente: “caos + caos = orden”.

1. J. Almeida, D. Peralta-Salas and M. Romera, Can two chaotic systems make an order? Preprint, 2004.

### Sistemas dinámicos discretos que generan únicamente conjuntos scrambled bipuntuales

Juan Luis García Guirao  
 Universidad de Castilla-La Mancha  
 E.U. Politécnica de Cuenca,  
 16071-Cuenca (España)

E-MAIL: jlguirao@tel-cu.uclm.es

COLABORADORES: M. Lampart (Silesian University at Opava)

Sea  $(\mathbb{X}, \psi)$  un sistema dinámico discreto, donde  $\mathbb{X}$  es un espacio métrico compacto con métrica  $\varrho$ , y  $\psi$  es una aplicación sobreyectiva y continua definida del espacio  $\mathbb{X}$  sobre él mismo. Para entender el comportamiento dinámico del sistema es necesario descubrir cuál es el comportamiento asintótico de las órbitas de todos los puntos de  $\mathbb{X}$  ( $Orb_\psi(x) = \{\psi^n(x)\}_{n=0}^\infty$  donde  $\psi^n(x) = \psi(\psi^{n-1}(x))$  para  $n \geq 1$  y  $\psi^0$  es la aplicación identidad en  $\mathbb{X}$ ).

El concepto de caos en conexión con esta clase de sistemas fue introducido por Li y Yorke [1], aunque sin una definición formal. Un par de puntos  $\{x, y\} \subseteq \mathbb{X}$  se llama par de Li-Yorke si simultáneamente se satisfacen las siguientes dos propiedades

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho(\psi^n(x), \psi^n(y)) = 0 \quad y \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho(\psi^n(x), \psi^n(y)) > 0.$$

Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{X}$ , conteniendo al menos dos puntos, se llama conjunto *scrambled* si cada par de puntos distintos  $\{x, y\} \subseteq S$  es un par de Li-Yorke. Finalmente, un sistema  $(\mathbb{X}, \psi)$  se dice caótico (en el sentido de Li y Yorke) si  $\mathbb{X}$  contiene un conjunto *scrambled* infinito no numerable. Por otro lado, un par  $\{x, y\} \subseteq \mathbb{X}$  tal que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho(\psi^n(x), \psi^n(y)) > 0$  se llama distal, y si le ocurre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\psi^n(x), \psi^n(y)) = 0$  se dice asintótico.

Para transformaciones del intervalo (respectivamente del círculo), la existencia de un par de Li-Yorke implica la existencia de un conjunto *scrambled* no numerable [2] (resp. [3]). En general, la caoticidad no es implicada por la presencia de un par de Li-Yorke [4]. Como consecuencia de este hecho, actualmente existe gran interés en estudiar cuáles son las cardinalidades de los conjuntos *scrambled* que produce un sistema dinámico discreto. Sobre esta cuestión existen algunos resultados conocidos.

En [5] se construye un espacio infinito (contable con puntos aislados) y una aplicación sobre este espacio (incluso homeomorfismo) tal que cada par de puntos distintos es un par de Li-Yorke. A este tipo de espacios se les llama totalmente *scrambled*. Si establecemos una clasificación de los espacios métricos compactos según su complejidad Li-Yorke, en la cima de esta lista (con la mayor complejidad dinámico-topológica) encontramos espacios infinitos no numerables que admiten aplicaciones caóticas Li-Yorke. El siguiente nivel está compuesto por espacios totalmente *scrambled* numerables [5], después encontramos espacios contables que admiten aplicaciones generando sólo conjuntos *scrambled* contables o finitos [6]. Finalmente, el último nivel lo forman espacios que admiten aplicaciones sin pares de Li-Yorke. En [7] se estudian las propiedades dinámicas de los sistemas que no poseen pares de Li-Yorke. En esta situación de carencia de pares de Li-Yorke, existen varias posibilidades: todos los puntos son asintóticamente periódicos (en este caso tenemos dinámica trivial), todos los pares son distales, todos los pares son asintóticos o existen pares que son distales y otros asintóticos. En [8] se estudian las relaciones entre las cuatro posibilidades anteriores en el caso de ausencia de pares de Li-Yorke.

El objetivo de esta contribución es introducir un nuevo nivel en la anterior clasificación. Estudiamos espacios que admiten aplicaciones con conjuntos *scrambled* que contienen únicamente dos puntos, es decir, espacios que admiten aplicaciones generando únicamente pares de Li-Yorke. Nuestro principal resultado son dos aplicaciones que poseen la anterior propiedad y que están definidas en espacios diferentes. La primera aplicación está definida en un conjunto tipo Cantor y la segunda en un conjunto conexo por arcos, bidimensional y que posee interior vacío en la topología relativa de  $\mathbb{R}^2$ .

1. T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period Three implies Chaos*, Amer. Math. Monthly. **82** (1975), 985-992.
2. M. Kuchta and J. Smítal, *Two point scrambled set implies chaos*, Proc. Europ. Conf. on Iteration Theory, Spain 1987, World Scientific, Singapore (1989), 427-430.
3. M. Kuchta, *Characterization of chaos for continuous maps of the circle*, Commentat. Math. Univ. Carol. **31**, No2, 383-390, (1990).
4. G. L. Forti, L. Paganoni and J. Smítal, *Strange Triangular Maps of the Square*, Bull. Austral. Math. Soc. **51** (1995), 398-415.
5. W. Huang and X. Ye, *Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets*, Erg. Th. & Dynam. Sys. (2001), **21**, 77-91.
6. F. Blanchard, F. Durand and A. Maas, *Constant-Lenght Substitutions and Countable Scrambled Sets*, Preprint, (2003).
7. F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada and A. Maas, *On Li-Yorke pairs*, J. reine angew. Math. **547**, (2002), 51-68.
8. A. Barrio, J.L. García and V. Jiménez, *Looking for the Smallest notion of Chaos in Discrete Dynamical Systems*, Submitted to Proc. Amer. Math. Soc., (2003).
9. B. P. Kitchens, *Symbolic Dynamics. One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts* (1998) Springer, Berlin.

10. M. Lampart, *Two kinds of chaos and relations between them*, Acta Math. Univ. Comenianae LXXII, 1 (2003), 119-127.

---

## Sesión VA3: Osciladores acoplados

Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)  
Iglesia de San Pedro Mártir  
Modera: José María Sancho

---

### Competición de dominos de sincronización en redes de osciladores caóticos

Inmaculada Leyva Callejas  
Universidad Rey Juan Carlos  
E.S. Ciencias Experimentales e Ingeniería  
c/Tulipan s/n  
28933 Mostoles, Madrid.

E-MAIL: [ileyva@escet.urjc.es](mailto:ileyva@escet.urjc.es)

WWW: <http://www.urjc.es/~fisica/investigacion.html>

COLABORADORES: E. Allaria, S. Boccaletti, F. T. Arecchi (Istituto Nazionale di Ottica Applicata)

La respuesta de una red de osciladores caóticos ante estímulos periódicos externos aplicados localmente tiene una gran relevancia en el estudio de sistemas complejos biológicos. Utilizando como modelo una red de osciladores caóticos homoclinicos, observamos que cuando un solo elemento de la cadena es perturbado por un impulso periódico, la red transmite la señal como un estado de sincronización de fase solo en un cierto rango de frecuencias y acoplos entre elementos. Cuando dos señales distintas se aplican a diferentes puntos de la red, encontramos una rica fenomenología de estados estables de competición, como alternancia temporal entre las dos frecuencias o la coexistencia espacial entre distintos dominios de sincronización.

1. I. Leyva, E. Allaria, S. Boccaletti, F. T. Arecchi. Phys. Rev. E **68** 066209 (2003).
2. F. T. Arecchi, E. Allaria, I. Leyva. Phys. Rev. Lett. **91** 234101 (2003).

---

### Competición de osciladores no-lineales a través de un elemento excitable. Aplicación a arritmias cardíacas

Ana María Lacasta Palacio  
Universitat Politècnica de Catalunya,  
Departament de Física Aplicada,  
Av. Gregorio Marañón 44, Barcelona, 08028

E-MAIL: [anna@fa.upc.es](mailto:anna@fa.upc.es)

WWW: <http://dfa.upc.es/websfa/eupb/ana>

COLABORADORES: José María Sancho Herrero, Francesc Sagúés Mestre (U. de Barcelona)

Presentamos un modelo de dos osciladores no lineales actuando sobre un elemento excitable con el que reproducimos algunas de las características de un tipo de arritmia

cardíaca que se manifiesta cuando existe un foco ectópico que produce latidos anómalos en el ventrículo.

Los latidos normales (*S-beats*) se generan como un impulso eléctrico periódico en una zona concreta del corazón, el nódulo sinoatrial (SA), y se propagan a través del atrio hasta el nódulo atrioventricular (AV). El nódulo AV puede considerarse como un conjunto de células que se disparan cuando son excitadas por el impulso procedente del nódulo SA. Después de dispararse, existe un tiempo refractario durante el cual no pueden ser excitadas. Los latidos anómalos (*V-beats*) se producen en los ventrículos. Su efecto es la posible inhibición del latido normal.

La modelización que proponemos consiste en dos osciladores no-lineales, que representan las señales normal y ectópica, que compiten sobre un elemento excitable (nódulo atrioventricular). Con este modelo, se obtienen respuestas análogas a las observadas en los electrocardiogramas de pacientes con este tipo de arritmia. Hemos analizado el porcentaje de latidos inhibidos en función de la relación de períodos de los osciladores, así como el efecto de las fluctuaciones en dichos períodos.

---

### Bifurcaciones paramétricas en osciladores perturbados resonantes

Mercedes Arribas Jiménez  
*Grupo de Mecánica Espacial*  
*Universidad de Zaragoza,*  
*50009 Zaragoza*

E-MAIL: [marribas@unizar.es](mailto:marribas@unizar.es)  
WWW: <http://gme.unizar.es>

COLABORADORES: Antonio Elipe (GME, U. Zaragoza)

Numerosos problemas de dinámico no lineal pueden modelizarse por osciladores armónicos resonantes perturbados, dependientes de varios parámetros. La forma normal de estos osciladores permite un análisis cualitativo del problema considerado.

En el caso de resonancia 1:1, la topología del espacio fásico normalizado es la de la esfera  $S^2$  y la estructura de Poisson la del sólido rígido. Debido a la simetría esférica, los posibles casos paramétricos se reducen a unos pocos. Sin embargo, en el caso de una resonancia más general  $p:q$ , dicha simetría se pierde, pues la topología es la de un esfera pinzada una o dos veces, y la estructura de Poisson es más complicada, lo que hace que la clasificación, en función del número de parámetros, sea más compleja. La pérdida de simetría también hace que los tipos de bifurcaciones paramétricas que aparecen sean más variados.

---

### Synchronization between two Hele-Shaw convective cells

Jean Bragard  
*Universidad de Navarra*  
*Facultad de Ciencias,*  
*c/Irunlarrea, s/n*  
*Pamplona, 31080*

E-MAIL: [jbragard@unav.es](mailto:jbragard@unav.es)  
WWW: <http://www.fisica.unav.es>

COLABORADORES: A. Bernardini (U. Navarra), H. Mancini (U. Navarra)

We present results on complete synchronization between two chaotic states in Hele-Shaw thermoconvective cells (HS). The cells are modelled mathematically from the balance equations (Boussinesq-Darcy approximation) in two spatial dimensions. The model reproduces all the dynamical states observed in experiments, and it is shown that in order to obtain synchronization between the two HS, a large number of connectors situated inside the HS is required. We discuss how the number of such connectors influences the dynamics.

---

### Láseres de semiconductor multimodo: sincronización y comunicación encriptada

Javier Martín Buldú  
*Departament de Física i Enginyeria Nuclear*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*c/Colom 11*  
*Terrassa E-08222*

E-MAIL: [javier.martin-buldu@upc.es](mailto:javier.martin-buldu@upc.es)  
WWW: <http://oliana.upc.es/javier>

COLABORADORES: Jordi García-Ojalvo (U. Politècnica de Catalunya), M. Carme Torrent (U. Politècnica de Catalunya)

Los láseres de semiconductor, al ser realimentados ópticamente mediante la colocación de un espejo externo, pueden entrar en regímenes de emisión caóticos. En el presente trabajo estudiamos la sincronización de la señal caótica de dos láseres multimodo. Observamos la existencia de la sincronización anticipada y la sincronización isócrona, analizando el comportamiento tanto de la intensidad total como la de cada uno de los modos longitudinales de los láseres. Seguidamente comprobamos la eficiencia de los láseres multimodo para la transmisión de un mensaje encriptado, analizando diferentes tipos de configuraciones.

---



---

## Sesión VA4: Dinámica de fluidos

Viernes, 4 de junio (9:30-11:10)  
Teatrillo de San Pedro Mártir  
Modera: Francisco Marqués

---

## Uso del $p$ -Laplaciano en modelos de consolidación de Biot monodimensionales

Patrick Saint-Macary

*Université de Pau et des Pays de l'Adour  
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, IPRA  
Avenue de l'Université, BP 1155  
64013 Pau Cedex, FRANCE*

E-MAIL: [patrick.saint-macary@univ-pau.fr](mailto:patrick.saint-macary@univ-pau.fr)

COLABORADORES: Hélène Barucq (U. Pau), Monique Madaune-Tort (U. Pau)

La propagación de ondas elásticas en un medio poroso saturado con un fluido es un fenómeno complejo que se puede encontrar en numerosos campos físicos, como la sismología o la prospección de petróleo. Clásicamente, este fenómeno se describe con un modelo debido a M. A. Biot. Es un sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico/parabólico cuyas incógnitas son el desplazamiento de la estructura  $\mathbf{u}$  y la presión del fluido  $p$ :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla(\lambda^*(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}) - \nabla((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ \quad - \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) |\nabla \mathbf{u}|^{q-2} \nabla \mathbf{u}) + \alpha \nabla p = \mathbf{f} \\ c_0(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \nabla p) = h. \end{cases} \quad (1)$$

La primera ecuación describe la evolución del vector desplazamiento con el tiempo y tiene como origen la combinación de la ley de Hooke con la ley de conservación de los momentos. La segunda, respecto a  $p$ , es una ecuación de difusión. Se obtiene considerando la ley de Darcy de circulación de un fluido laminar por un medio poroso, escrita con la ley de conservación de la masa. El acoplamiento por los términos en  $\alpha$  representa los efectos de deformación/presión, llamados efectos de consolidación, que aparecen a causa de las interacciones entre el fluido y la estructura porosa. Se encuentra también en la primera ecuación un término de consolidación secundaria cuando  $\lambda^* > 0$ . Cuando se descuida este término ( $\lambda^* = 0$ ), el modelo que resulta sirve en termo-elasticidad pero la incógnita  $p$  representa la temperatura. Además, el caso límite del modelo de Biot donde la densidad de la estructura  $\rho$  se puede despreciar corresponde a un fenómeno cuasi-estático.

Los trabajos elaborados por M. A. Biot desde un punto de vista físico han motivado numerosos estudios matemáticos. Por ejemplo, para el sistema linear acoplado termo-elástico ( $\lambda^* = 0$ ,  $q = 2$ ), C. M. Dafermos ha demostrado la existencia y la unicidad de soluciones fuertes para este problema. Podemos indicar también los trabajos de R. E. Showalter, quien mostró resultados de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones del sistema cuasi estático lineal degenerado ( $\rho = \lambda^* = 0$ ,  $q = 2$ ) utilizando la teoría de los semi grupos en espacios de Hilbert.

En este trabajo, nos interesamos en el modelo de Biot y en el sistema cuasi estático cuando el fluido considerado puede ser no newtoniano ( $q \geq 2$ ), lo que introduce eventualmente una no linealidad con un  $p$ -Laplaciano en la primera ecuación. Sólo se consideran sistemas en dimensión uno y se prueban resultados de existencia y de unicidad para cada problema antes de comparar las soluciones por medio de una estimación de error con arreglo a la densidad de la estructura  $\rho$ .

## Convección de Bénard-Marangoni en un dominio cilíndrico

Sergio Hoyas Calvo

*Universidad de Castilla-La Mancha  
Fac. de Ciencias Químicas  
c/Camilo Jose Cela, 3  
Ciudad Real, 13071*

E-MAIL: [sergio.hoyas@uclm.es](mailto:sergio.hoyas@uclm.es)

WWW: <http://matematicas.uclm.es>

COLABORADORES: Henar Herrero (U. Castilla-La Mancha), Ana Mancho (CSIC)

En este trabajo se estudia, desde un punto de vista numérico, el papel jugado por la relación de aspecto en distintas bifurcaciones que aparecen en un problema de convección térmica en geometría anular. En este recinto imponemos un estado básico convectivo a través de un gradiente de temperaturas en el fondo de la celda. Este estado puede sufrir diversas bifurcaciones que son controladas a través de parámetros térmicos, apareciendo tanto soluciones estacionarias como oscilatorias. Además, aparecen diversas bifurcaciones de codimensión dos controladas por el intercambio de calor con la atmósfera (número de Biot). Analizaremos el papel de la relación de aspecto en estas bifurcaciones, comparando con diversos experimentos realizados en el mismo recinto.

## Leyes de escala y semejanza para flujos en tuberías lisas y rugosas

Pedro Luis Luque Escamilla

*Universidad de Jaén  
E.U.P. de Linares,  
c/Alfonso X el Sabio, 28  
Linares (Jaén), 23700*

E-MAIL: [peter@ujaen.es](mailto:peter@ujaen.es)

COLABORADORES: Juan Francisco Gómez Lopera (Dep. Física Aplicada, U. Granada), José Martínez Aroza (Dep. Matemática Aplicada, U. Granada), Ramón Román Roldán (Dep. Física Aplicada, U. Granada)

Uno de los problemas más complejos y con mayores aplicaciones prácticas que afrontan la Física y la Ingeniería actuales es la descripción del movimiento turbulento de un fluido confinado en una tubería forzada. Muchas veces, los técnicos se ven obligados a emplear correlaciones empíricas para poder dar solución al diseño de redes de transporte de fluidos. Pero las ecuaciones de ese tipo carecen de la universalidad necesaria para hacerlas completamente fiables. En esta ponencia se emplean argumentos dimensionales y de semejanza, junto con otros procedentes de la teoría de Kolmogorov para turbulencia homogénea e isotrópica, para obtener leyes de escala que justifican teóricamente algunas de las fórmulas más empleadas por los ingenieros hidráulicos: la de Blasius para estimar el coeficiente de fricción en tuberías lisas, y algunas correlaciones para tuberías rugosas, como la de Hopf y Fromm. De este modo se justifica su fiabilidad de un modo que antes no tenían. Se mostrarán, asimismo, las propiedades de escala de esas ecuaciones.

## Un método numérico para la ecuación no lineal de Reynolds en dispositivos magnéticos

J. Jesús Cendán Verdes  
*Universidade da Coruña*  
*Facultad de Informática,*  
*Campus Elviña s/n,*  
*A Coruña, 15071*

E-MAIL: [suceve@udc.es](mailto:suceve@udc.es)

COLABORADORES: Iñigo Arregui Álvarez (Universidad da Coruña), Carlos Vázquez Cendón (Universidad a Coruña)

En los procesos de fabricación de discos duros de ordenadores, para aumentar la densidad de datos grabados se trata de minimizar la separación entre la cabeza lectora y el disco. De este modo, en dicha separación se forman capas ultrafinas de aire, cuya presión se comporta de acuerdo con la teoría de la lubricación. En particular, se emplea la ecuación no lineal de Reynolds compresible [1]. Al cabo de un cierto tiempo, que permite alcanzar el estado estacionario, el modelo adimensional para la presión,  $p$ , se rige por la ecuación:

$$\frac{\partial(ph)}{\partial x} - \alpha \nabla \cdot (h^2 \nabla p) - \beta \nabla \cdot (h^3 p \nabla p) = 0 \text{ en } \Omega,$$

donde las magnitudes reales son:

$$P = P_a p, \quad H = H_m h, \quad X = Lx, \quad Y = Ly,$$

siendo  $P_a$  la presión ambiental,  $H$  la separación real,  $H_m$  el espesor mínimo de la capa de aire y  $L$  la longitud del lado de la cabeza lectora de base cuadrada. Los parámetros de la ecuación son  $\beta = (P_a H_m^2)/(6U\eta L)$  y  $\alpha = 6aM\beta$ , siendo  $U$  la velocidad de deslizamiento,  $\eta$  la viscosidad del aire,  $a$  el coeficiente corrector de superficie y  $M$  el número de Knudsen. La ecuación se completa con la condición de contorno de presión ambiental en la frontera del dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . El análisis matemático del modelo anterior se puede enmarcar en el trabajo [2].

En cuanto a la resolución numérica, los valores típicos de  $\alpha$  y  $\beta$  son suficientemente bajos para que el problema se considere de convección dominante. Por otra parte, presenta una no linealidad en el término difusivo. En trabajos previos se proponen técnicas de diferencias finitas clásicas o de tipo LPDEM [3], combinadas con Newton. En el presente trabajo proponemos la adaptación del método de las características a problemas estacionarios para el aspecto de convección dominante. A continuación, introducimos una formulación del término no lineal de difusión mediante un operador maximal monótono con vistas a utilizar un algoritmo de dualidad. Para la discretización espacial se proponen elementos finitos de Lagrange lineales a trozos. En la exposición se mostrará el buen funcionamiento del método sobre un test con solución analítica y otros con parámetros reales.

1. Busham, B., *Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Devices*, Springer, (1996).
2. Chipot, M., Luskin, M., Existence and uniqueness of solutions to compressible Reynolds lubrication equation, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**, (1986) 1390-1399.
3. Jai, M., Homogenization and two-scale convergence of the compressible Reynolds lubrication equation modelling the flying characteristics of a rough magnetic head over a rough rigid-disk surface, *Math. Model. Numer. Anal.*, **29**, (1995) 199-233.

## Un esquema paralelo en tiempo y espacio para la resolución de problemas en mecánica de fluidos

José Román Galo Sánchez  
*Universidad de Córdoba*  
*Dpto. de Informática y Análisis Numérico,*  
*Campus de Rabanales, Ed. Einstein, Planta 3*  
*Córdoba, 14071*

E-MAIL: [maigasaj@uco.es](mailto:maigasaj@uco.es)

WWW: <http://www.uco.es/investiga/grupos/parflui/>

COLABORADORES: Isidoro Albarreal Núñez (U. Sevilla), Carmen Calzada Canalejo (U. Córdoba), José Luis Cruz Soto (U. Córdoba), Enrique Fernández-Cara (U. Sevilla), Mercedes Marín Beltrán (U. Córdoba)

El tratamiento numérico de las ecuaciones que modelan el comportamiento de un fluido en movimiento es un área de considerable interés, tanto por sus aplicaciones científicas como industriales. Para llegar a entender el comportamiento de algunos fluidos en disciplinas tales como la astrofísica, la aerodinámica, la meteorología, la oceanografía, la ingeniería civil o la biología, es necesario disponer de métodos numéricos que permitan resolver estas ecuaciones de forma cada vez más rápida y precisa.

El objetivo de esta comunicación es presentar un esquema numérico paralelo que permita la simulación numérica del flujo de un fluido homogéneo, incompresible, newtoniano y viscoso a lo largo del tiempo. Este tipo de fluidos aparece en multitud de situaciones de interés en las áreas que hemos indicado anteriormente. Las ecuaciones matemáticas que modelan su comportamiento son las ecuaciones en derivadas parciales no lineales denominadas ecuaciones de Navier-Stokes.

No se dispone de ningún método general de integración de las ecuaciones de Navier-Stokes, y en casi todos los problemas de interés práctico sólo puede esperarse calcular soluciones aproximadas mediante simulaciones numéricas. Sin embargo, resolver estos problemas numéricamente es también una tarea considerable sobre todo si se está interesado en estudiar el comportamiento, durante largos periodos de tiempo, de flujos tridimensionales con viscosidades pequeñas, ya que el tiempo de cálculo se vuelve excesivo.

La mayoría de los algoritmos paralelos que existen hoy día para la resolución de este problema plantean el paralelismo al nivel más bajo, en la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes. El objetivo de este trabajo es proponer un nuevo algoritmo de resolución que tiene un alto potencial de paralelización a niveles superiores, ya que ésta se plantea en la propia formulación del algoritmo, buscando reducir el tiempo de cálculo si se dispone de un número apreciable de procesadores.

Una característica esencial de este método es que presenta dificultades numéricas similares tanto para problemas bidimensionales como tridimensionales ya que, aplicando la técnica desarrollada *Simultaneous Directions Implicit* (SDI) se consigue reducir el problema  $d$ -dimensional a la resolución de una gran cantidad de problemas unidimensionales que se resuelven por diferencias finitas. Además, muchos de estos problemas unidimensionales son independientes entre sí y pueden resolverse de forma simultánea.

Dado que todo se reduce, en la práctica, a problemas unidimensionales, no es necesario realizar ninguna rectificación de fronteras, permitiendo la resolución en dominios con geometrías arbitrarias y la utilización de mallados no regulares. El método paralelo empleado en la resolución de los problemas diferenciales elementales se adapta también al uso de técnicas Multigrid, como se ha comprobado tanto teóricamente como en diversos test efectuados.

Se presentan resultados numéricos bi y tridimensionales que confirman el buen funcionamiento del algoritmo.

---





# PANELES



### Acotación del número de ciclos límite alrededor de nodos

María Jesús Álvarez Torres  
*Universitat de les Illes Balears*  
*Edifici Anselm Turmeda,*  
*Crta. Valldemossa, km 7,5*  
*07122 Palma (Illes Balears)*

E-MAIL: [chus.alvarez@uib.es](mailto:chus.alvarez@uib.es)

COLABORADORES: Armengol Gasul (U. Autònoma de Barcelona), Rafel Prohens (U. Illes Balears)

En esta comunicación presentamos los resultados que hemos obtenido en relación al número máximo de ciclos límite que pueden tener determinados sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano.

En concreto, los sistemas con los que trabajamos se obtienen como suma de 3 campos quasi-homogéneos de determinados grados y que en coordenadas polares generalizadas se escriben

$$\begin{cases} \dot{r} &= \alpha(\theta)r + \beta(\theta)r^{k+1} + \gamma(\theta)r^{2k+1} \\ \dot{\theta} &= b(\theta) + c(\theta)r^k, \end{cases} \quad (1)$$

donde la función  $b(\theta)$  cambia de signo. Un caso particular son los sistemas cúbicos con el infinito degenerado y que tienen un nodo en el origen.

Para todos estos sistemas hemos obtenido dos criterios mediante los que podemos asegurar que, bajo unas condiciones sobre los coeficientes del sistema, el número máximo de ciclos límite que rodearán el origen es 2.

### Synchronization of Hele-Shaw cells

Angela Bernadini  
*Departamento de Física y Matemática aplicada,*  
*Universidad de Navarra,*  
*c/Irunlarrea, s/n*  
*31080 Pamplona*

E-MAIL: [angela@fisica.unav.es](mailto:angela@fisica.unav.es)

COLABORADORES: Jean Bragard y Hector Mancini (U. de Navarra).

Complete synchronization between two Hele-Shaw cells is examined. The two dynamical systems are chaotic in time and spatially extended in order to achieve synchronization. In particular, we have studied how the number of connectors influences the dynamical regime that is set inside the hele-Shaw cells.

### Irreversibilidad cuántica con trayectorias bohmianas en sistemas caóticos. Aplicación a sistemas mesoscópicos

Florentino Borondo Rodríguez  
*Departamento de Química C-IX, Universidad Autónoma de Madrid, Cantoblanco, 28049-Madrid (Spain).*

E-MAIL: [f.borondo@uam.es](mailto:f.borondo@uam.es)

COLABORADORES: Diego A. Wisniacki (U. Buenos Aires) y Rosa M. Benito (U. Politécnica de Madrid) .

La irreversibilidad es un tema importante en muchos procesos cuánticos [1], cuyo estudio se ha incrementado recientemente [2], mediante el llamado *eco de Loschmidt* o fidelidad

$$M(t) = |\langle \phi | \exp(i\hat{H}t) \exp(-i\hat{H}_0t) | \phi \rangle|^2. \quad (1)$$

Esta función mide la capacidad de un sistema cuántico para regresar a su estado inicial bajo el efecto de una perturbación externa.

Basándonos en esta filosofía, y utilizando las trayectorias cuánticas definidas en la interpretación causal de la mecánica cuántica debida a Bohm [3], nosotros introducimos una medida más informativa de irreversibilidad, ya que permite obtener la historia y mecanismos implicados en el proceso [4]. El método se ha aplicado al estadio de Bunimovitch en presencia de ruido, un ejemplo paradigmático de sistemas caóticos, que constituye un excelente modelo para simular la dinámica de electrones en cavidades mesoscópicas [5]. En particular, cabe mencionar el transporte balístico de electrones en heteroestructuras de semiconductores.

1. Nielsen M A and Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press).
2. Jalabert R and Pastawski H M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2490; Jacquod Ph, Silvestrov P G, and Beenaker C W J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 055203(R); Hiller M, Kottos T, Cohen D, and Geisel T. 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 010402.
3. Holland P R 1993 *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge: Cambridge University Press).
4. Wisniacki D A, Borondo F, and Benito R M 2003 *Europhys. Lett.* **64** 441.
5. Fromhold P B *et al.* 1996 *Nature* **380** 608; Marcus C M *et al.* 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 506; Simons B D and Altshuler B L 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 4063. Crommie M F, Lutz C P and Eigler D M 1993 *Nature* **363** 524; *Science* **262** 218; *Nature* **369** 464.

### Clases de conjugación de una familia de métodos iterativos de tercer orden

Sonia Busquier Sáez  
*U.P. Cartagena*  
*Dpto. Matemática Aplicada y Estadística*  
*Avd. Alfonso XIII, 52*  
*Cartagena, 30203*

E-MAIL: [sonia.busquier@upct.es](mailto:sonia.busquier@upct.es)  
 WWW: <http://www.dmae.upct.es/~busquier/>

COLABORADORES: Sergio Amat (U.P. Cartagena), Sergio Plaza (U. Santiago de Chile)

Uno de los problemas clásicos en matemáticas es el estudio de ecuaciones no lineales

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

Con el fin de obtener aproximaciones numéricas a las raíces de la ecuación, se suelen utilizar métodos iterativos. Comenzando de una aproximación inicial  $z_0$  y con ayuda de una función de iteración  $\Phi$ , un método iterativo genera una

sucesión de aproximaciones  $z_{n+1} = \Phi(z_n)$  que bajo ciertas hipótesis converge a  $z^*$  solución de (1).

El ejemplo más conocido lo encontramos en el método de Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = N_p(z_n).$$

Para ecuaciones polinómicas  $p(z) = 0$ , la función de iteración  $N_p$  define una función racional sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Las raíces simples de  $p(z)$ , es decir, raíces que no son puntos críticos, resultan ser puntos fijos superatractores de  $N_p$ . Esto implica que si  $z_0$  es tomado suficientemente próximo a una raíz el método convergerá con orden dos.

Existen métodos de orden superior que mejoran los resultados obtenidos por Newton cuando el cálculo de la segunda derivada es sencillo, cosa que ocurre por ejemplo en polinomios o en ecuaciones integrales. El objetivo de este trabajo es estudiar la dinámica de una familia de dichos métodos.

Consideramos

$$z_{n+1} = z_n - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(z_n)}{1 + b_n \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} + c_n L_f(z_n)^2} \right) \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

donde  $b_n$  y  $c_n$  son parámetros dependientes de  $n$  y  $L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$ .

En esta familia aparecen los métodos de Chebyshev, Halley, Super-Halley, C-métodos, etc.

Las raíces simples de la ecuación son puntos fijos superatractores de las distintas funciones de iteración de los métodos introducidos. Nótese que tanto las raíces como sus cuencas de atracción se encuentran en el conjunto de Fatou. Estas cuencas representan regiones donde la convergencia del método iterativo a una raíz está asegurada. Existen situaciones donde el método iterativo puede presentar problemas con la convergencia. En primer lugar destacamos que si la condición inicial  $x_0$  es tomada en el conjunto de Julia el método no convergerá. No obstante, en este caso existen puntos en entornos de la condición inicial que podrían ser tomados como buenos puntos de salida. Una situación más dramática la encontramos con la existencia de puntos fijos extras a las raíces, ya que cualquier  $x_0$  tomado en sus cuencas de atracción imposibilitaría la convergencia a la raíz buscada.

Mediante el cálculo explícito de las clases de conjugación de los métodos introducidos se ha estudiado la dinámica de los mismos para polinomios de grado dos y tres. A su vez, se han obtenido las ecuaciones de los puntos críticos y de los puntos fijos adicionales.

1. S. Amat, S. Busquier and J.M.Gutiérrez, Geometric Constructions of Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations. *J. of Comp. and App. Math.*, Vol. 157(1), pp. 197-205, 2003.
2. P. Blanchard, Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere. *Bull. of AMS (new series)*, **11** (1), 85-141, (1984).
3. A. Emerenko and M. Lyubich, The Dynamics of Analytic Transformations. *Leningrad Math. J.*, **1** (3), 563-634, (1990).
4. H.O. Peitgen (Ed.), *Newton's method and Dynamical Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1989.

## Conexiones homoclínicas y heteroclínicas entre órbitas de Lyapunov alrededor de $L_1$ y $L_2$ en el problema de tres cuerpos restringido plano

Elisabet Canalías Vila

*Universitat Politècnica de Catalunya*

*E.T.S.E.I.B.*

*Av. Diagonal, 647*

*08028 Barcelona*

E-MAIL: [canalias@vilma.upc.es](mailto:canalias@vilma.upc.es)

COLABORADORES: Josep J. Masdemont Soler (Universitat Politècnica de Catalunya)

Mi trabajo está enmarcado en el problema restringido de 3 cuerpos plano. Ofrece una metodología para encontrar conexiones homoclínicas y heteroclínicas entre órbitas de Lyapunov alrededor de los puntos de equilibrio  $L_1$  y  $L_2$  (casos Tierra-Sol y Tierra-Luna).

Para hacerlo, se usan técnicas aplicables a las variedades invariantes en sistemas dinámicos, aprovechando el carácter hiperbólico de las regiones alrededor de los puntos  $L_i$ . Si tomamos como condición inicial un punto en la variedad estable de un conjunto invariante, en nuestro caso una órbita periódica de Lyapunov, la trayectoria se va acercando a la o.p. a medida que avanza el tiempo. Al contrario, si lo tomamos en la variedad inestable, tiende a la o.p. al retroceder en el tiempo. De este modo, si podemos encontrar intersecciones entre una variedad estable y una variedad inestable, tendremos conexiones homoclínicas (si las variedades son de una misma órbita) o heteroclínicas (si cada variedad es asintótica a una órbita alrededor de un punto de equilibrio distinto). Es decir, obtenemos una transferencia entre órbitas de una manera natural.

Como resultados, se ofrece una clasificación de las conexiones encontradas, así como algunos comentarios sobre las simetrías y otras particularidades que presentan.

Este trabajo, y su generalización al problema 3-dimensional, puede ser de aplicación a misiones espaciales. Por ejemplo, diseño de órbitas para satélites de observación solar o de caminos de bajo coste entre elementos del sistema solar (*Petit Grand Tour* de las lunas de Júpiter, *Shoot the moon*: transferencia a la luna ...).

## Invariantes de sistemas dinámicos cuadráticos discretos

Raúl Durán Díaz

*Instituto de Física Aplicada, CSIC*

*C/ Serrano, 144*

*28006 Madrid*

E-MAIL: [raul@iec.csic.es](mailto:raul@iec.csic.es)

COLABORADORES: Jaime Muñoz Masqué (Instituto de Física Aplicada, CSIC), A. Peinado Domínguez (Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones, E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación, U. de Málaga)

Los sistemas dinámicos permiten modelar multitud de fenómenos, no sólo en Física y Matemáticas, sino también en Biología, Ingeniería, Economía, etc., y su estudio ha ejercido una gran influencia en el desarrollo de la Ciencia actual.

El análogo discreto bidimensional de un sistema dinámico consiste en iterar una aplicación  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Aquí, la evolución de un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  viene descrita por la sucesión de sus iterados:

$$p, f(p), f^2(p) = f(f(p)), \dots, f^n(p) = f(f^{n-1}(p)), \dots,$$

que indica los estados de  $p$  en los tiempos  $t = 0, t = 1, t = 2, \dots, t = n$ , etc. Tales sucesiones sustituyen el flujo del campo en un sistema continuo y son el objeto de estudio de la dinámica discreta.

Los sistemas discretos se han desarrollado extraordinariamente en los últimos años porque, dada su sencillez, permiten un tratamiento muy eficiente por ordenador, conservando, sin embargo, todas las propiedades cualitativas de los sistemas continuos. En la actualidad, los sistemas discretos son el verdadero laboratorio donde se exploran en primer lugar las propiedades complejas de las ecuaciones diferenciales, tales como su carácter caótico, la estabilidad, etc.

Los sistemas discretos mejor conocidos son los cuadráticos homogéneos en dos variables; esto es, los que vienen descritos por una aplicación  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $q(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))$ , cuyas componentes son polinomios homogéneos de segundo grado:

$$q_1(x, y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2, \quad q_2(x, y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2.$$

El ejemplo más famoso corresponde a la aplicación  $q_0(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  (en notación compleja,  $z \mapsto z^2$ ,  $z = x + iy$ ) que da lugar al fractal de Mandelbrot. Tales aplicaciones dependen de 6 parámetros:  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  y  $c_2$ ; pero sólo 2 son esenciales salvo cambios lineales de referencia, porque el grupo de las matrices no singulares  $2 \times 2$  es de dimensión 4. A fin de estudiar las dinámicas discretas cuadráticas es, pues, importante disponer de una forma normal para cada una de ellas que permita trabajar sólo con los 2 parámetros esenciales. Ello se consigue por medio de los invariantes.

Un invariante es una función de los parámetros del sistema que permanece invariante cuando se efectúa un cambio de coordenadas. En un trabajo reciente (R. Durán Díaz, J. Muñoz Masqué, A. Peinado Domínguez, *Classifying quadratic maps from plane to plane*, Linear Algebra Appl. 364 (2003), 1–12) se ha determinado una base de dos invariantes  $I_1, I_2$  que permite clasificar las aplicaciones cuadráticas del plano en sí mismo: dos de tales aplicaciones son equivalentes por un cambio lineal de coordenadas si y sólo si ambas tienen los mismos invariantes  $I_1, I_2$ . Estos invariantes juegan el mismo papel que la traza y el determinante en el caso de los endomorfismos, pero a diferencia de éstos, la complejidad computacional de  $I_1, I_2$  no permite calcularlos “a mano”, sino que se requieren programas de computación simbólica.

La ponencia tiene como objeto introducir estos resultados, poniendo de manifiesto cómo tales invariantes lineales son de utilidad en el tratamiento de los sistemas dinámicos cuadráticos discretos.

## Caracterización experimental de patrones periódicos en una cavidad óptica no lineal

Adolfo Esteban Martín  
 Universidad de Valencia  
 Departamento de Óptica,  
 c/ Dr. Moliner, 50  
 Burjassot, 46100

E-MAIL: [adolfo.esteban@uv.es](mailto:adolfo.esteban@uv.es)

COLABORADORES: J. García (U. Valencia), E. Roldán (U. Valencia), V. B. Taranenko (U. Valencia), G. J. de Valcárcel (U. Valencia), and C. O. Weiss (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)

La óptica no lineal ofrece una gran variedad de sistemas donde se forman estructuras disipativas como patrones espaciales. Estos patrones se caracterizan por su número de onda y por sus simetrías. En resonadores ópticos no lineales con alto número de Fresnel, la cavidad es la principal responsable de la selección del número de onda mientras que las simetrías de los patrones dependen de la forma de la no linealidad. El mecanismo de selección del número de onda en estos sistemas se basa en la resonancia de ondas inclinadas con respecto al eje de la cavidad.

En la aproximación paraxial se predice una relación lineal entre el cuadrado del número de onda transversal seleccionado y la desintonía (diferencia entre la frecuencia de la radiación de bombeo y la frecuencia del modo longitudinal de la cavidad más próximo). Dependiendo del valor y signo de la desintonía, podemos encontrar diferentes estructuras y dinámicas espaciotemporales. Para desintonías negativas, el sistema puede ajustarse emitiendo ondas inclinadas, por lo que encontraremos estructuras periódicas. Por el contrario, para desintonías positivas no hay ondas inclinadas que puedan satisfacer la condición de resonancia, por lo que esperamos emisión en eje [1]. Esta relación lineal entre la frecuencia seleccionada y la desintonía ha sido predicha para multitud de sistemas ópticos no lineales. Sin embargo, desde el punto de vista experimental esta ley ha sido cuantificada únicamente en [2, 3]. En esta comunicación presentamos un sistema experimental de mezcla degenerada de cuatro ondas en un oscilador fotorrefractivo con alto número de Fresnel para la generación y estudio de estructuras disipativas.

En el experimento se ha utilizado un método preciso para la determinación de la desintonía basado en la medida del rango espectral libre, a través de la comparación entre frecuencias espaciales correspondientes a dos series consecutivas de estructuras periódicas unidimensionales (rollos). Dentro del rango de desintonías negativas para las que se forman estructuras de rollos, se analiza la relación que existe entre el cuadrado de la frecuencia espacial y la desintonía, verificando la relación lineal predicha. Para desintonías positivas y negativas cercanas a cero, se muestra la existencia de campo homogéneo y la formación de paredes de dominio (estructuras disipativas que separan zonas homogéneas con una diferencia de fase de  $\pi$ ).

Un resultado en aparente contradicción con la predicción teórica es la observación de patrones aperiódicos en un rango de desintonías negativas. No obstante, un modelo sencillo de ganancia saturable, que tiene en cuenta la anchura de línea de la cavidad, permite una interpretación de este fenómeno.

1. K. Staliunas and V. J. Sánchez-Morcillo, *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators* (Springer, 2002).

2. U. Bortolozzo, P. Villoresi and P. L. Ramazza, Phys. Rev. Lett. 25, 274102 (2001).
3. A. Esteban-Martín, J. García, E. Roldán, V. B. Taranenko, G. J. de Valcárcel, and C. O. Weiss, "An experimental approach to transverse wave-number selection in cavity nonlinear optics", Phys. Rev. A (aceptado).

### Nuevas soluciones de las ecuaciones de Jacobi para sistemas Hamiltonianos generalizados

Benito Hernández Bermejo

*E.S.C.E.T., Edificio Departamental II  
Campus de Móstoles, C/Tulipán S/N  
Universidad Rey Juan Carlos  
28933-Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [bhernandez@escet.urjc.es](mailto:bhernandez@escet.urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/matemati/benito/benito.html>

Los sistemas dinámicos de Poisson son una generalización de los sistemas Hamiltonianos clásicos. Aquéllos tienen la forma  $\dot{x} = J \cdot \nabla H$ , donde  $H$  es el Hamiltoniano y  $J$  es la denominada matriz de estructura, que está caracterizada por dos propiedades: (1) es antisimétrica; y (2) cumple las identidades de Jacobi, que son el siguiente conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas:  $\sum_{l=1}^n (J_{li} \partial_l J_{jk} + J_{lj} \partial_l J_{ki} + J_{lk} \partial_l J_{ij}) = 0$ , donde las  $J_{ij}$  son las entradas de dicha matriz. La gran potencia de los sistemas de Poisson está en que suponen una generalización muy amplia de los sistemas Hamiltonianos clásicos (dado que por ejemplo permiten sistemas de dimensión impar, y aun en el caso de dimensión par engloban una diversidad de sistemas mucho mayor) mientras que el carácter Hamiltoniano de la dinámica se preserva (Teorema de Darboux). Tal y como se desprende de la forma de los sistemas de Poisson, los sistemas Hamiltonianos clásicos corresponden de hecho al caso particular en el que la dimensión es par y la matriz de estructura  $J$  es la conocida como matriz simpléctica (que es antisimétrica y de entradas constantes de valores 0, 1 o -1). Los sistemas de Poisson también presentan propiedades muy generales en otros aspectos, ya que por ejemplo todo cambio diferenciable de las coordenadas es una transformación canónica (es decir preserva el formato de sistema de Poisson). Entre los problemas no resueltos relativos a los sistemas de Poisson destaca el de identificar y escribir un sistema dado como estructura de Poisson, lo cual puede entenderse como un tipo de problema inverso. Las dificultades principales para ello son fundamentalmente dos: determinar una integral primera utilizable como Hamiltoniano, y encontrar una matriz de estructura apropiada. Para esto último es necesario encontrar una solución adecuada de las ecuaciones de Jacobi. Lo más habitual en la práctica viene siendo proceder mediante *ansatzs* sencillos (normalmente lineales o cuadráticos) y comprobar si llevan a posibilidades válidas, a falta de un conocimiento adecuado de familias suficientemente amplias de soluciones de dichas ecuaciones. Este trabajo desarrolla un enfoque alternativo, que considera a las ecuaciones de Jacobi como un problema *per se*. Ello no sólo representa una contribución para la comprensión general del problema antes aludido de la identificación de un sistema diferencial como estructura de Poisson, sino que también es útil en la medida en que permite avanzar en la clasificación de las estructuras de Poisson como problema relevante en sí mismo.

Gracias a esta aproximación se han obtenido familias de soluciones muy generales que engloban *ansatzs* anteriormente utilizados con frecuencia, de manera que sistemas de Poisson ya conocidos, y hasta ahora aparentemente inconexos, resultan ser casos particulares de estructuras más generales. A menudo esto ha permitido, además, desarrollar métodos comunes y constructivos para la caracterización global de propiedades independientes del Hamiltoniano, tales como la estructura simpléctica y la forma canónica de Darboux.

1. B. Hernández-Bermejo, V. Fairén, Separation of variables in the Jacobi identities. *Physics Letters* **271A**(4), 258-263 (2000).
2. B. Hernández-Bermejo, One solution of the 3D Jacobi identities allows determining an infinity of them. *Physics Letters* **287A**(5,6), 371-378 (2001).
3. B. Hernández-Bermejo, New solutions of the Jacobi equations for three-dimensional Poisson structures. *Journal of Mathematical Physics* **42**(10), 4984-4996 (2001).

### Computación efectiva de secciones isócronas utilizando simetrías

Gemma Huguet Casades

*Universitat Politècnica de Catalunya  
Departament de Matemàtica Aplicada I, ETSEIB,  
Av. Diagonal, 647  
Barcelona, 08028*

E-MAIL: [gemma.huguet@upc.es](mailto:gemma.huguet@upc.es)

WWW: <http://www-ma1.upc.es/>

COLABORADORES: Toni Guillamon

En artículos recientes (ver [M. Sabatini, *Isochronous sections via normalizers*, Preprint (2003)] y [E. Freire, A. Gasull and A. Guillamon, *Lie symmetries and limit cycles*, Preprint (2004)]), ha sido clarificada la conexión entre las simetrías de Lie y las secciones isócronas (hipersuperficies de dimensión  $n - 1$ ) de ciclos límite.

Sin embargo, dada una ecuación diferencial con un ciclo límite, no es sencillo encontrar campos vectoriales que satisfagan las condiciones requeridas de las simetrías de Lie. Trabajamos con herramientas analíticas para la computación de tales secciones isócronas en un pequeño entorno del ciclo límite. Aunque esas herramientas son locales, pueden ser muy útiles para el estudio de modelos de ritmos circadianos. Se mostrarán aplicaciones de estos modelos.

### Predicción de series temporales de consumo eléctrico considerando la influencia de la temperatura

Miguel Angel Jaramillo Morán

*Universidad de Extremadura  
E. de Ingenierías Industriales  
Avda. de Elvas, s/n  
Badajoz, 06071*

E-MAIL: [miguel@unex.es](mailto:miguel@unex.es)

COLABORADORES: Diego Carmona Fernández (U. Extremadura), Eva González Romera (U. Extremadura), Juan Antonio Álvarez Moreno (U. de Extremadura)

La predicción de la demanda de energía eléctrica representa una herramienta muy importante para las compañías encargadas tanto de su producción como de su distribución, ya que un conocimiento preciso de la evolución de su demanda les facilitaría una planificación conveniente de sus políticas de generación y de expansión de instalaciones y redes. La ejecución de esta predicción se basa en un análisis de las series temporales de los datos de consumos que permita deducir un valor futuro a partir de un número dado de valores pasados. Sin embargo, la demanda de energía eléctrica se ve influenciada por variables externas como el clima o la evolución económica. Esta última presenta un comportamiento fuertemente no predecible al venir condicionada, en muchos casos, por apreciaciones o decisiones subjetivas realizadas por los agentes que controlan la economía. Por el contrario, el clima tiene unas pautas de comportamiento estacionales que facilitan una cierta predicción, por lo que los datos que lo describen son susceptibles de ser utilizados como elementos de apoyo a la predicción de consumos basada únicamente en el análisis de datos pasados. Una de las técnicas que han demostrado una mayor efectividad en la predicción de series temporales es la conocida como Redes Neuronales. En este trabajo se propone el uso del modelo conocido como Perceptrón Multicapa para realizar la predicción de las demandas mensuales de consumo eléctrico combinando datos pasados de consumo junto con temperaturas mensuales. Para realizar la predicción se ha entrenado a una red de tres capas dotada de 8, 4 y 8 neuronas a la que se le presentan doce datos de consumos anteriores junto con otro de temperatura media mensual. Todos los datos han sido convenientemente normalizados para adaptarlos al rango de funcionamiento de la red: los consumos han sido divididos por la media de los doce datos anteriores y la temperatura por el valor máximo que ha alcanzado a lo largo de todos los meses utilizados. Se han probado dos posibilidades de inclusión de la temperatura: tomar la del mes anterior a la del que se va a predecir o la correspondiente al año anterior de ese mes. Los mejores resultados se han obtenido con esta última opción, siendo en los dos casos superiores a los alcanzados sólo con datos de consumo.

### Modelización de la evolución del frente de un incendio mediante autómatas celulares

Ángel Martín del Rey

*Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Salamanca, Escuela Politécnica Superior  
C/Santo Tomás s/n  
Ávila, 05003*

E-MAIL: [delrey@usal.es](mailto:delrey@usal.es)

COLABORADORES: Sara Hoya White (Universidad de Salamanca), Gerardo Rodríguez Sánchez (Universidad de Salamanca)

En este trabajo se muestra un modelo para la determinación de la evolución del frente de fuego de un incendio forestal basado en técnicas matemáticas discretas; más concretamente, se hace uso de los autómatas celulares bidimensionales. El modelo está basado en el propuesto en 1997 por los griegos Karafyllidis y Thanailakis (en: *Ecological Modelling* 99 (1997) 87-97), y posteriormente modificado por los sudafricanos Berjak y Hearne (en: *Ecological Modelling* 148 (2002) 133-151). Se realiza una modificación de los mismos,

fundamentalmente en lo referente a los parámetros de propagación, que los hace más próximos a la realidad.

### Resonancia fantasma en láseres con acoplamiento bidireccional

Javier Martín Buldú

*Departament de Física i Enginyeria Nuclear  
Universitat Politècnica de Catalunya  
c/ Colom 11  
Terrassa E-08222*

E-MAIL: [javier.martin-buldu@upc.es](mailto:javier.martin-buldu@upc.es)

WWW: <http://oliana.upc.es/javier>

COLABORADORES: C.M. Gonzalez (U. Politècnica de Catalunya), J. Trull (U. Politècnica de Catalunya), J. García-Ojalvo (U. Politècnica de Catalunya), M.C. Torrent (U. Politècnica de Catalunya)

En el siguiente trabajo estudiamos experimental y numéricamente el fenómeno de la resonancia fantasma en un sistema que está bidireccionalmente acoplado. Dos láseres de semiconductor, mutuamente acoplados, son perturbados por dos señales periódicas de diferente frecuencia. En ausencia de perturbaciones externas, los láseres tienen un comportamiento pulsado, de manera que su intensidad cae a cero a tiempos irregulares, mostrando un perfil de pulsos invertidos. Ajustando la amplitud y frecuencia de las señales periódicas, se puede observar cómo el periodo de los pulsos entra en resonancia con una frecuencia diferente a la de las señales periódicas. Este fenómeno, conocido como resonancia fantasma, es observado por primera vez en dos sistemas acoplados.

### Dinámica compleja en convección doble-difusiva

Esteban Meca Álvarez

*Departament de Física Aplicada  
Universitat Politècnica de Catalunya,  
c/Jordi Girona s/n  
Barcelona, 08015*

E-MAIL: [esteban@fa.upc.es](mailto:esteban@fa.upc.es)

WWW: <http://dfa.upc.es/websfa/eupb/>

COLABORADORES: Isabel Mercader, Oriol Batiste, Laureano Ramírez-Piscina

La convección en mezclas binarias ha sido un sistema típico para el estudio de la dinámica no lineal. Se han encontrado múltiples escenarios y una gran riqueza en su dinámica. Asimismo es un sistema con importantes aplicaciones, en áreas tales como la oceanografía o el crecimiento cristalino de aleaciones.

Presentamos en este trabajo un estudio de la convección de una mezcla binaria en una cavidad con calentamiento lateral, para un cierto rango de parámetros. Se ha simulado la dinámica y se ha analizado la estabilidad de los estados estacionarios, que se han estudiado asimismo empleando un programa de continuación.

Es sabido que en esta configuración se presenta un estado conductivo para un valor dado del parámetro de separación, y es en ese valor en el que se ha centrado el estudio. Sin embargo, para comprobar la generalidad de las soluciones

encontradas se ha hecho una exploración de los valores contiguos del parámetro de separación.

Se ha encontrado que para un rango importante de parámetros la única solución es una órbita de largo periodo que no tiene análogo en el caso del fluido puro. Describimos las bifurcaciones globales que para ciertos valores del parámetro de separación dan lugar a la aparición de la órbita, así como ciertos puntos de codimensión 2 en los cuales la naturaleza de las bifurcaciones globales cambia.

Entre las bifurcaciones encontradas destaca una *Blue Sky Catastrophe*, ya que es la primera vez (que nosotros tengamos constancia) que se encuentra una bifurcación de ese tipo en un sistema extenso. Asimismo se han encontrado bifurcaciones de codimensión 2 estructuradas como en el *unfolding* de una bifurcación de Bogdanov-Takens degenerada.

## Sistemas de Kummer en la mecánica no holónómica

José Mencía Bravo  
*Universitat Rovira i Virgili*  
*E.T.S.E., Avda. Paisos Catalans, 26*  
*Tarragona, 43007*

E-MAIL: rramirez@etse.urv.es

COLABORADORES: Rafael Ramírez Inostroza (U. Rovira i Virgili), Natalia Sadovskaia (U. Politècnica de Catalunya)

El enfoque cartesiano para sistemas no holonómicos con 3 grados de libertad y el enlace

$$\mathbf{a}(x, y, z) \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv a_1(x, y, z)\dot{x} + a_2(x, y, z)\dot{y} + a_3(x, y, z)\dot{z} = 0$$

se aplica al estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden [2]

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(x, y, z)$$

bajo la condición

$$\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} = \Lambda(x, y, z)\mathbf{a}(x, y, z).$$

En la comunicación que se propone se analiza el caso particular correspondiente a los campos vectoriales que satisfacen la condición

$$\dot{\mathbf{v}} = K(x, y, z)\mathbf{v}$$

(sistemas de Kummer). Los resultados obtenidos se ilustran en el caso de una partícula restringida en  $\mathbb{R}^3$  en el trineo de Chaplyguin-Caratheodory y en el cuerpo rígido en el caso de Suslov.

1. Kozlov, V.V., Obshaia teria vixrei, Udmurski Universitet, 1998.
2. Ramírez R., Sadovskaia N., Cartesian approach for nonholomic systems, Representation Theory, Dynamical Systems, Eds. A.M. Vershik and N.V. Svanidze, 2002.

## Mecanismos de inestabilidad en flujos espirales

Álvaro Meseguer Serrano  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Departament de Física Aplicada*  
*c/ Jordi Girona 1-3*  
*Barcelona, 08034*

E-MAIL: alvar@fa.upc.es

WWW: <http://dfa.upc.es/websfa/fluids/alvar/meseguer.html>

COLABORADORES: Francisco Marques Truyol

En el presente trabajo se analizan los diferentes tipos de inestabilidad que pueden aparecer en el problema de Poiseuille espiral (flujo entre cilindros coaxiales con rotación independiente y en presencia de un gradiente de presiones axial). Se ha llevado a cabo un análisis lineal de estabilidad para diferentes valores de los tres parámetros del problema; las rotaciones del cilindro interno y externo y el gradiente de presión. La exploración abarca un amplio rango de los tres parámetros. Se han encontrado cuatro mecanismos diferentes de inestabilidad. Los dos primeros están asociados a la rotación de los cilindros interno y externo. El tercer mecanismo es debido a la cizalla axial, en competición con mecanismo centrífugo. El último de ellos es la inestabilidad de Tollmien-Schlichting, debida a cizallas axiales para velocidades axiales muy grandes.

## Espacios de Banach sin operadores caóticos

Alfred Peris Manguillot  
*Universitat Politècnica de València*  
*E.T.S. Arquitectura*  
*Departament de Matemàtica Aplicada*  
*València, 46022*

E-MAIL: aperis@mat.upv.es

WWW: <http://ttt.upv.es/~aperis/>

COLABORADORES: José Bonet Solves (Universitat Politècnica de València), Félix Martínez Giménez (Universitat Politècnica de València)

Nuestro objetivo es el estudio de las propiedades dinámicas caóticas de operadores lineales y continuos  $T : X \rightarrow X$  definidos en espacios de Banach  $X$  de dimensión infinita. Un operador  $T$  es hipercíclico si existen vectores  $x \in X$  tales que su órbita mediante  $T$ ,  $Orb(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ , es densa en  $X$ . La existencia de operadores hipercíclicos es conocida desde el primer cuarto del siglo pasado por el trabajo de Birkhoff. El estudio sistemático de esta propiedad en el contexto descrito se inició a finales de los años 80, y ha sido ampliamente desarrollado en los últimos años. Por otra parte, Devaney definió el concepto de sistema dinámico caótico  $(X, T)$  como aquel que es topológicamente transitivo (para todo par de abiertos no vacíos  $U, V \subset X$  existe un natural  $n$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ), el conjunto de puntos periódicos de  $T$  es denso en  $X$ , y presenta cierta dependencia sensible en las condiciones iniciales. Esta es una de las nociones universalmente más aceptadas del caos. En nuestro contexto de trabajo es conocido que ser caótico equivale a ser hipercíclico y que el conjunto de puntos periódicos sea denso en  $X$ . Ansari y Bernal demostraron, de forma independiente, que todo espacio de Banach se-



parable de dimensión infinita admite necesariamente operadores hipercíclicos  $T$ . Nosotros probamos que existen espacios de Banach separables de dimensión infinita  $X$  tales que no existen operadores  $T : X \rightarrow X$  que sean caóticos.

### Mecanismo de orden generado por transiciones en sistemas planos de microgránulos superconductores

L. Ramírez-Piscina

*Departamento de Física Aplicada,  
Universidad Politècnica de Catalunya,  
Auda. Gregorio Marañón 44, E-08028 Barcelona.*

E-MAIL: [angelina@upc.es](mailto:angelina@upc.es)

En la última década se han desarrollado detectores de radiación y materia oscura basados en las transiciones de fase producidas en sistemas de microgránulos superconductores, que a su vez podrían utilizarse como sensores de partículas tales como neutrones y neutrinos. Los detectores iniciales estaban constituidos por sistemas coloidales en estado metaestable que, debido a diferencias de tamaño de los gránulos, defectos y principalmente interacciones diamagnéticas entre los granos, presentaban un amplio intervalo de valores de campo magnético y/o temperatura de transición, con la consecuente indeterminación en la energía detectada. Como alternativa se han realizado detectores en los que los microgránulos están colocados en una red cuadrada (PASS) para los que el intervalo de transiciones se reduce en un orden de magnitud.

Nosotros hemos simulado el comportamiento de este tipo de sistemas inmersos en un campo magnético exterior. El cálculo del campo magnético en cada microgránulo, que incluye interacciones entre  $N$  cuerpos y contribución multipolar, permite determinar las transiciones que se producen a medida que el campo exterior aumenta.

Para el caso de sistemas planos observamos la existencia de un intervalo de valores del campo exterior para el que no se produce ninguna transición. Este efecto aparece para sistemas concentrados tanto para un campo magnético aplicado en dirección perpendicular como paralela al plano del sistema. Este intervalo corresponde a un *it hot border zone* en el sentido de que sólo pueden producirse transiciones por nucleación térmica. En nuestro estudio se encuentra la razón de este fenómeno como consecuencia de un orden espacial originado por transiciones producidas en posiciones preferentes, dependiendo de la concentración del sistema. Este orden explica además el valor de la fracción de esferas que aún permanecen superconductoras cuando el *gap* aparece. Asimismo determinamos el límite en la concentración que origina este comportamiento. Este efecto puede tener consecuencias en la precisión de los detectores. En el caso de un campo paralelamente aplicado, el orden obtenido genera avalanchas que pueden ser utilizadas en los sensores para amplificar la respuesta de detección de muy bajas energías.

### Ecuación de difusión no lineal aplicada a la eliminación de ruido en imágenes mamográficas

Francisco Rodenas Escribá

*Universidad Politècnica de Valencia  
E.T.S. Arquitectura,  
C/ Camino de Vera, s/n.  
Valencia, 46022*

E-MAIL: [frodenas@mat.upv.es](mailto:frodenas@mat.upv.es)

COLABORADORES: Damián Ginestar, Gumersindo Verdú y Patricia Mayo (U. Politècnica de Valencia)

Cada vez más, las técnicas de diagnóstico asistido por ordenador van adquiriendo relevancia en el análisis de las imágenes radiográficas, en especial, en el caso de las mamografías, en las que la presencia de microcalcificaciones son un signo precoz de cáncer de mama. En ocasiones la detección de las microcalcificaciones es complicada debido al bajo contraste y al ruido procedente del proceso de adquisición de la imagen, por lo que es importante el procesado previo para reducir el nivel de ruido.

En el presente trabajo se propone la utilización de filtros basados en una ecuación de difusión no lineal para reducir de forma eficiente el ruido en mamografías. Los métodos basados en filtros lineales tienden a emborronar los bordes de la imagen, mientras que los filtros no lineales [1] preservan los bordes, lo que implica que la acción del filtro sobre una mamografía preserva la forma y el tamaño de las microcalcificaciones.

Sea  $u_0(x, y)$  la función que representa los niveles de gris de la imagen observada,  $u_0(x, y) = u(x, y) + n(x, y)$ , siendo  $u$  la imagen limpia de ruido que se pretende reconstruir a partir de  $u_0$  y  $n$  un ruido aditivo. La técnica clásica de crear un filtro difusivo consiste en procesar la imagen con una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}(g(|\vec{\nabla}u|)\vec{\nabla}u) \quad (1)$$

con la condición inicial  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$  y condiciones de contorno de reflexión, siendo  $g$  una función positiva y decreciente que controla el grado de difusión realizada. La solución es una familia  $u(x, y, t)$  de imágenes correspondientes a versiones filtradas de la original  $u_0(x, y)$ . Es habitual trabajar con modificaciones del problema (1) como, por ejemplo, la ecuación [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}(g(|\vec{\nabla}\tilde{u}|)\vec{\nabla}u), \quad (2)$$

siendo  $\tilde{u}$  una versión suavizada de  $u$ ; o bien, la ecuación procedente de un problema variacional [2], [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}(g(|\vec{\nabla}u|)\vec{\nabla}u) + \mu(u_0 - u) \quad (\mu \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Distintas funciones  $g$  dan lugar a distintos filtros no lineales con propiedades comunes y algunas particularidades, esto hace interesante el estudio de cuál es el más apropiado para procesar una imagen mamográfica. En este trabajo consideramos filtros obtenidos para distintas funciones  $g$ , comparando su acción sobre mamografías mediante el *signal to noise ratio* (SNR) de la imagen.

La discretización de las ecuaciones de difusión utilizadas se realiza con un esquema semi implícito modificado [1], denominado AOS (*additive operator splitting*).

1. J. Weickert, Efficient image segmentation using partial differential equations and morphology, *Pattern Recognition* 34 (2001), 1813-1824.

2. S. Keeling, Total variation based convex filters for medical imaging, *Applied mathematics and computation*, vol. 139 (2003), 101-119.
3. G. Verdú, D. Ginestar, I. Vizcaino, Using a variational image restoration method to enhance microcalcifications detection in mammograms, preprint de la U. Politécnica de Valencia (2003).

## Diseño de un circuito electrónico para la modelización de una neurona

Alexandre Wagemakers

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
 28933 Mostoles, Madrid

E-MAIL: awagemakers@escet.urjc.es

COLABORADORES: Borja Ibarz, Miguel A. F. Sanjuan

Las ecuaciones de Hodgkin y Huxley representaron un gran avance en el dominio de las neurociencias, tanto a nivel experimental como a nivel teórico. Estas ecuaciones han hecho posible estudiar el comportamiento dinámico de un tipo de neuronas, pudiendo así predecir fenómenos que han sido confirmados experimentalmente más tarde. Sin embargo, estas características dinámicas pueden interpretarse con la ayuda de modelos más sencillos; las aproximaciones de Fitzhugh-Nagumo permitieron reducir la complejidad del modelo además de proponer una nueva formulación de estas ecuaciones bajo la forma de un oscilador del tipo de Van der Pol. Gracias a estas aproximaciones se pueden diseñar circuitos electrónicos analógicos destinados a estudiar el comportamiento dinámico de estos modelos. En el presente trabajo se propone la realización de una neurona electrónica para la experimentación de los modelos teóricos. Además, se exploran las características dinámicas y las reacciones a estímulos exteriores, y se estudia la interacción con otras neuronas. También se analiza la sincronización de neuronas acopladas.

## Resonancias deterministas y estocásticas en sistemas no lineales

Samuel Zambrano Silva

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
 Tulipán, s/n,  
 28933 Móstoles, Madrid

E-MAIL: szambrano@escet.urjc.es

WWW: <http://www.escet.urjc.es/fisica>

COLABORADORES: José M. Casado (Universidad de Sevilla), Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

El fenómeno de la resonancia estocástica ha sido ampliamente estudiado y aplicado a campos muy variados. El ejemplo paradigmático de sistema donde se puede observar este fenómeno es el de una partícula en un pozo doble de potencial sometida a un leve forzamiento periódico. Al aplicar ruido al sistema y hacer aumentar su intensidad se observa que la relación señal-Ruido no es monótona, sino que experi-

menta un máximo para cierto valor del ruido. La resonancia estocástica también ha sido observada en sistemas caóticos en los que el atractor se compone de dos trozos, jugando un papel análogo al sistema biestable anteriormente mencionado.

Comportamientos del mismo tipo han sido observados usando en lugar del ruido externo otro tipo de perturbación de naturaleza determinista. En particular, si la perturbación externa es una señal caótica, puede aparecer un fenómeno muy parecido al anterior que se denomina resonancia caótica. Un efecto similar se observa también cuando al sistema se le perturba mediante una señal periódica de alta frecuencia, lo que se conoce como resonancia vibracional. Asimismo, un fenómeno similar se da cuando el sistema es caótico y uno de sus parámetros es perturbado de forma periódica, fenómeno conocido como resonancia estocástica sin ruido. De este modo perturbaciones de muy distinta naturaleza dan lugar a fenómenos cualitativamente muy similares entre sí.

En este trabajo hacemos un estudio comparativo de estos fenómenos, usando para ello un sistema dinámico discreto sencillo que reproduce muchas de las características básicas de un sistema continuo biestable; una aplicación cúbica en la que coexisten dos atractores caóticos. Además mostramos las diferencias cualitativas entre los distintos fenómenos, los márgenes en los que es posible apreciar dichas diferencias y presentamos técnicas que permiten hacer un análisis más cuantitativo de cada tipo de resonancia, de tal modo que pueda describirse de un modo más preciso qué papel juega el hecho de que las perturbaciones sean deterministas o aleatorias.

## El efecto *ratchet* de las ondas solitarias

Elías Zamora-Sillero

*Departamento de Análisis Matemático*  
*Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla*  
 Apartado de Correos 1160, Sevilla E-41080  
 y Departamento de Física Aplicada I (E.U.P. Universidad de Sevilla).

E-MAIL: elias@euler.us.es

COLABORADORES: Niurka R. Quintero (Universidad de Sevilla)

Recientemente Flach *et al.* [*Phys. Rev. Lett.* **88**, 184101 (2002)] han propuesto un análisis de las simetrías de las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon perturbadas que permite determinar, *a priori*, qué tipo de perturbaciones pueden provocar un efecto *ratchet* (movimiento unidireccional independiente de las condiciones iniciales) de sus soluciones tipo *kink*. De este modo se puede predecir la existencia de este fenómeno en las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon con

- (i) potencial asimétrico, donde se tienen en cuenta los efectos de las fuerzas periódicas y de la disipación [*Phys. Rev. E*, **65** 025602(R) (2002)];
- (ii) potencial simétrico con fuerzas periódicas asimétricas [*Phys. Rev. E* **65**, 056603 (2002)].

Un estudio sistemático de estos sistemas (i) y (ii), utilizando métodos de coordenadas colectivas, demuestra que el mecanismo que hace posible la aparición de este fenómeno está relacionado con el acoplamiento efectivo entre el modo de traslación (MT) y el modo interno (MI) [*Phys. Rev. Lett.* **91**, 234102 (2003)]. En este trabajo proponemos unas nue-

vas ecuaciones de sine-Gordon y  $\phi^4$  perturbadas que hacen posible el movimiento unidireccional del *kink*. Utilizando el formalismo Lagrangiano [“Lagrangian Formalism in Perturbed Nonlinear Klein-Gordon Equations”, Quintero and Zamora, *Physica D* (enviado)] y el *ansatz* de Rice [Solid State Commun. **35**, 487 (1980)] obtenemos las ecuaciones de movimiento para el centro del *kink*,  $X(t)$ , y su anchura,  $l(t)$ . A partir del análisis teórico y numérico de estas ecuaciones obtenemos que:

- (a) al igual que en los casos anteriores, la existencia del efecto *ratchet* es consecuencia del acoplamiento entre el MT y el MI.
  - (b) a diferencia de los problemas (i) y (ii), el movimiento efectivo aparece a primer orden en la teoría de perturbaciones.
  - (c) las resonancias que tienen lugar en este problema, están relacionadas con las frecuencias de la fuerza externa y la del MI (o frecuencia de Rice).
-



# ESTADÍSTICAS

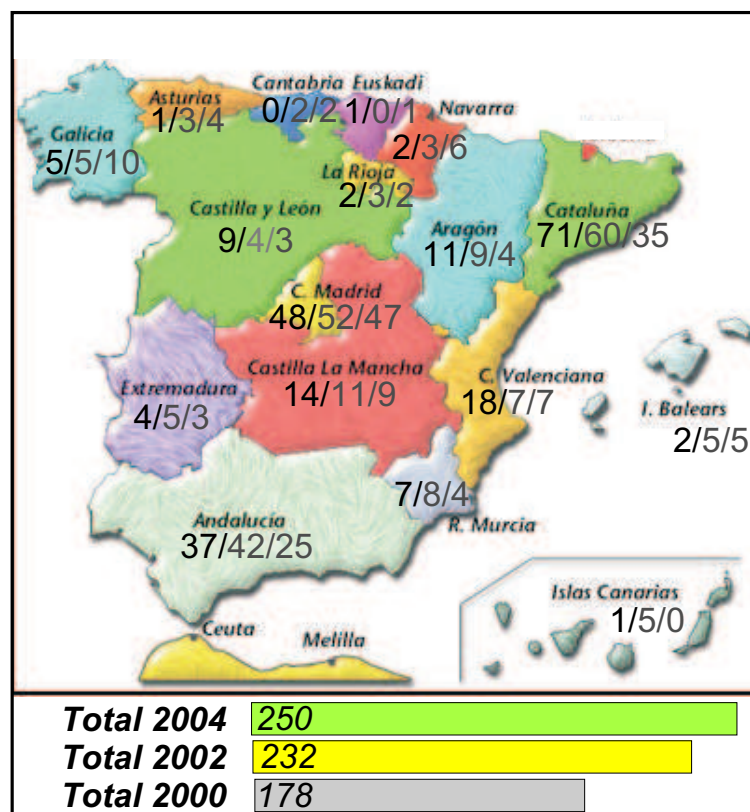


<b>Participantes por instituciones</b>	
Universidad Politécnica de Cataluña	36
Universidad de Sevilla	17
Universidad de Castilla-La Mancha	14
Universidad de Barcelona	14
Universidad Rey Juan Carlos	13
Universidad Autónoma de Barcelona	12
Universidad de Granada	11
Universidad de Zaragoza	11
Universidad de Valencia	10
Universidad Complutense de Madrid	9
Universidad Politécnica de Madrid	8
Universidad Politécnica de Valencia	6
Centro de Astrobiología (INTA-CSIC)	5
Otros Institutos del CSIC	5
Universidad de Huelva	5
Universidad de Murcia	5
Universidad de Valladolid	5
Universidad de Vigo	4
Universidad Pontificia Comillas de Madrid	4
Universidad de Salamanca	4
Universidad Autónoma de Madrid	4
Universidad de Extremadura	4
Universidad de Girona	4
Universidad de Lleida	3
Universidad Politécnica de Cartagena	2
Universidad de Navarra	2
Universidad de La Rioja	2
Universidad de Córdoba	2
Universidad Rovira i Virgili	1
Universidad de La Laguna	1
Universidad de las Islas Baleares	1
Universidad de Oviedo	1
Universidad CEU San Pablo	1
ESA	1
Centre de Recerca Matematica	1
Universidad de La Coruña	1
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria	1
Universidad del País Vasco	1
Universidad Jaume I	1
Universidad de Jaen	1
Universidad Miguel Hernández	1
Centros extranjeros y otros	21
<b>Total</b>	<b>250</b>

Tabla I: Distribución de participantes en Nolineal 2004 por instituciones

<b>Participantes (por comunidades)</b>	
Cataluña	71
Comunidad de Madrid	48
Andalucía	37
Comunidad Valenciana	18
Castilla-La Mancha	14
Aragón	11
Castilla-León	9
Región de Murcia	7
Galicia	5
Extremadura	4
Baleares	2
Canarias	2
La Rioja	2
Navarra	2
Asturias	1
Pais Vasco	1
Otros	17

Tabla II: Distribución de participantes en Nolineal 2004 por comunidades autónomas



Mapa I: Distribución geográfica y número de participantes en Nolineal 2004 (total 250)/Nolineal 2002 (total 232)/Nolineal 2000 (total 178)



# Índice alfabético

- Abásolo Baz, Daniel-Emilio, 30  
Aguareles Carrero, María, 67  
Aguirre Araujo, Jacobo, 61  
Almendral Sánchez, Juan Antonio, 45  
Alonso Mallo, Isaías, 30  
Alvarez Torres, María Jesús, 105  
Amat Plata, Sergio, 31  
Arnau Pilar, Jose Manuel, 50  
Arranz Saiz, Francisco Javier, 75  
Arribas Jiménez, Mercedes, 98
- Baldomá Barraca, Inmaculada , 80  
Balenzuela, Pablo, 31  
Ballesteros Olmo, Francisco, 92  
Baltanás Illanes, José Pablo, 56  
Barrio Blaya, Alejo, 62  
Barrio Gil, Roberto, 54  
Bascompte, Jordi, 23  
Batlle Arnau, Carles, 52  
Benadero García-Morato, Luis, 46  
Benito Zafrilla, Rosa María, 54  
Bernadini, Angela, 105  
Borondo Rodríguez, Florentino, 57, 105  
Bragard, Jean, 98  
Bravo Yuste, Santos, 83  
Briones Llorente, Carlos, 77  
Bueno Orovio, Alfonso, 50  
Buicá, Adriana, 64  
Busquier Sáez, Sonia, 105
- Caballé Vilella, Jordi, 26  
Caballero Pintado, M. Victoria, 73  
Calvo-Jurado, Carmen, 34  
Camacho Moreno, José Carlos, 68  
Campos Rodríguez, Juan, 85  
Canalias Vila, Elisabet, 106  
Cano Casanova, Santiago, 87  
Cano Urdiales, Begoña, 51  
Cantalapiedra, Inmaculada R., 36  
Caraballo Garrido, Tomás, 67  
Carmona Centeno, Victoriano, 32  
Carrión, M.C., 38  
Carrillo Parramón, Oliver, 83  
Casado Vázquez, José Manuel, 24  
Casas, Pablo S., 64  
Cendán Verdes, J. Jesús, 100  
Costa Romero, Sara, 95
- Díaz-Guilera, Albert, 25  
de Castro Muñoz de Lucas, Manuel, 23  
Durán Díaz, Raúl, 106  
Durany Castrillo, José, 82
- Eguíluz, Víctor M., 45  
Escribano Aparicio, Francisco Javier, 52
- Esteban Martín, Adolfo, 107  
Esteban Martín, Adolfo, 71
- Fenton, Flavio H., 23  
Fernández Sánchez, Fernando, 45  
Ferragut i Amengual, Antoni, 40  
Floría Gimeno, Luis, 84  
Fontich Julià, Ernest, 69
- Galán Vioque, Jorge, 41  
Galo Sánchez, José Román, 100  
García Delgado, Óscar, 73  
García Quesada, Jesús, 65  
García Rodríguez, Isaac A., 49  
García García, Cristóbal, 62  
García Guirao, Juan Luis, 96  
Garrido Atienza, María José, 84  
Ginestar Peiró, Damián, 51  
Gomez Gardeñes, Jesús, 29  
González González, Julián J., 90  
González Miranda, Jesús Manuel, 76  
Grau Carles, Pilar, 37  
Grau Montaña, Maite, 58  
Guillén González, Francisco, 73  
Guillamon Grabolosa, Toni, 48
- Hernández Bermejo, Benito, 59, 108  
Hoyas Calvo, Sergio, 99  
Huguet Casades, Gemma, 108
- Ibáñez Mesa, Santiago, 46  
Ibarz Gabardós, Borja, 94
- Jaramillo Morán, Miguel Angel, 38, 108  
Jarque Ribera, Xavier, 39  
Jiménez López, Víctor, 70  
Jorba, Àngel, 25  
Jorge y Jorge, María del Carmen, 92  
Juher Barrot, David, 95
- Kalisch, Henrik, 89
- Lacasta Palacio, Ana María, 97  
Lanchares Barrasa, Víctor, 60  
Lazaro Lázaro, Ester, 87  
Leyva Callejas, Inmaculada, 97  
Lopez González, Mariló, 72  
Lopez, Juan Manuel, 79  
Lopez-Ruiz, Ricardo, 86  
Luque Escamilla, Pedro Luis, 99  
Luque Palomo, José Juan, 33  
Lythe, Grant, 93
- Mañosa Fernández, Víctor, 49  
Madaune-Tort, Monique, 70

- Mancho Sánchez, Ana María, 80  
 Manrubia, Susanna C., 60  
 Marín Rubio, Pedro, 74  
 Maroto Fernández, José María, 55  
 Marqués Truyol, Francisco, 47  
 Marquez Durán, Antonio Miguel, 41  
 Martín Buldú, Javier, 98, 109  
 Martín del Rey, Ángel, 109  
 Martínez Alvarez, Clotilde, 42  
 Martínez Aroza, José, 77  
 Martínez Giménez, Félix, 61  
 Martínez Quesada, Manuel Francisco, 57  
 Matías, Manuel A., 67  
 Mateos de Cabo, Ruth, 75  
 Meca Álvarez, Esteban, 109  
 Meister, Matthias, 93  
 Melendo Pardos, M<sup>a</sup> Begoña, 81  
 Mencía Bravo, José, 110  
 Merillas Santos, Iván, 65  
 Merino Morlesín, Manuel, 65  
 Meseguer Serrano, Álvaro, 74, 110  
 Miguel Nicola, Ernesto, 72  
 Miralles Canals, Juan José, 91  
 Montesinos Matilla, Gaspar D., 66  
 Morillas Jurado, Francisco, 71
- Navarro Lérida, M. Cruz, 34  
 Nieto, J., 37  
 Nuño, Juan C., 39
- Olmedo, Estrella, 78  
 Oteo Araco, José Ángel, 31
- Pantazi, Chara, 58  
 Parra Arévalo, María Isabel, 90  
 Pascual Broncano, Pedro, 44  
 Paz Alonso, María J., 29  
 Pellicer Sabadí, Marta, 93  
 Peralta-Salas, Daniel, 96  
 Perez Arjona, Isabel, 82  
 Perez García, Rosario, 56  
 Peris Manguillot, Alfred, 76, 110  
 Pickering, Andrew, 40  
 Pierantozzi, Teresa, 43
- Ramírez Inostroza, Rafael, 63  
 Ramírez-Piscina, L., 111  
 Ramírez Ros, Rafael, 85  
 Ratanov, Nikita, 36  
 Riaza Rodríguez, Ricardo, 81  
 Ripoll i Missé, Jordi, 78  
 Rodas Verde, María I., 58  
 Rodenas Escribá, Francisco, 111  
 Rodrigo Muñoz, Francisco, 69  
 Roldán Gonzalez, Pablo, 53  
 Romero Vallés, María José, 33  
 Ros Padilla, Javier, 51  
 Ruiz Gordo, Pilar, 88
- Sadovskaia, Natalia, 48  
 Saint-Macary, Patrick, 99  
 Saldaña Meca, Joan, 86  
 Sanchón Rodellar, Manel, 55  
 Sanchez Díaz, Óscar, 33  
 Sanchez, Juan Roberto, 86
- Sanchez-Morcillo, Víctor J., 89  
 Seara, Tere M., 66  
 Sendiña Nadal, Irene, 88  
 Seoane Sepúlveda, Jesús, 69  
 Serrat Jurado, Carles, 42  
 Simon i Estrada, Sergi, 64  
 Sorolla Bardají, Jordi, 63  
 Staliunas, Kestutis, 39  
 Stich, Michael, 34
- Tomás Rodríguez, María, 81  
 Trillo Moya, Juan Carlos, 35
- Vázquez, Juan Luis, 25  
 Vázquez-Prada Baillet, Miguel, 44  
 Valencia, Alfonso, 24  
 Vallejo Chavarino, Juan Carlos, 54  
 Vargas Guadarrama, C. Arturo, 68  
 Vekslerchik, V.E., 40  
 Vidal López, Alejandro, 55
- Wagemakers, Alexandre, 112
- Zambrano Silva, Samuel, 112  
 Zamora-Sillero, Elías, 94, 112