

RESÚMENES DE LOS  
POSTERS



## 149 Análisis de un modelo estocástico para las células $\beta$ del páncreas.

**Autor:** Jacobo Aguirre Araujo

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
c/Tulipán s/n  
Móstoles, 28933  
Madrid

**E-mail:** [jaguirre@escet.urjc.es](mailto:jaguirre@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Erik Mosekilde (U. Técnica de Dinamarca, Dinamarca), Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

Presentamos el análisis realizado a un modelo del comportamiento electrofisiológico de las células  $\beta$  del páncreas, secretoras de insulina. La insulina es una hormona cuya principal labor es la regulación de la concentración de glucosa en la sangre. Disfunciones relacionadas con la incorrecta secreción de esta hormona son responsables de la diabetes, que puede llegar a causar la muerte. Por esa razón, se hace imprescindible un conocimiento más profundo de estos procesos.

En particular, se ha estudiado la transición entre los regímenes determinista y estocástico del modelo matemático propuesto por Sherman en 1989. En el presente modelo, el régimen determinista representa el límite de muchas células sanas, mientras que el sistema se vuelve más estocástico conforme disminuye este número. La finalidad de este modelo es representar lo más fidedignamente posible los resultados experimentales obtenidos en pacientes sanos y enfermos de diabetes. En una isleta de Langherans intacta, donde se encuentran unas 10000 células sanas, cada célula es capaz de producir "bursts" en su señal de voltaje de membrana, que además facilitan la secreción de insulina. Sin embargo, cuando estas isletas poseen pocas células sanas, su voltaje sólo presenta "disparos" aleatorios que disminuyen sustancialmente la secreción hormonal.

El objetivo de nuestro trabajo es por lo tanto aprender a caracterizar la información obtenida de sistemas experimentales ruidosos, tales como, por ejemplo, los análisis fisiológicos de pacientes. En particular, nos hemos detenido en el análisis de la naturaleza periódica o caótica de las órbitas en este modelo.

## 150 Cuencas de Wada en el oscilador de Duffing.

**Autor:** Jacobo Aguirre Araujo

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
c/Tulipán s/n  
Móstoles, 28933  
Madrid

**E-mail:** [jaguirre@escet.urjc.es](mailto:jaguirre@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

En este trabajo presentamos evidencias computacionales de que el oscilador de Duffing cumple una propiedad topológica muy particular, comunmente conocida como propiedad de Wada. Una cuenca fractal cumple la propiedad de Wada cuando la totalidad de su frontera lo es a la vez de otras dos cuencas. Por lo tanto, si una órbita comienza cerca de la frontera, no se podrá predecir con seguridad hacia cual de los tres atractores tenderá su trayectoria.

Asimismo, hacemos un estudio de la capacidad de predicción en sistemas que presentan dicha propiedad, demostrando que en muchos casos el único estudio posible del futuro de un sistema es el meramente probabilístico.

Finalmente, mostramos que las cuencas de Wada producen en el sistema una incertidumbre aún mayor que si simplemente poseyera cuencas fractales.

## 151 Problema centro-foco para puntos críticos nilpotentes

**Autor:** María Jesús Álvarez Torres

**Afiliación:** Universitat Autònoma de Barcelona  
Departamento de Matemáticas ,  
Edificio Cc, Campus Universitat Autònoma de Barcelona  
Bellaterra, Barcelona, 08193

**E-mail:** [jalvarez@mat.uab.es](mailto:jalvarez@mat.uab.es)

**Colaboradores:** Armengol Gasull Embid (U. Autònoma de Barcelona)

El estudio de los puntos críticos nilpotentes para ecuaciones diferenciales analíticas en el plano es un problema clásico. Este tipo de ecuaciones diferenciales se escriben como  $\dot{x} = X_1(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y_2(x, y)$  donde  $X_1$  e  $Y_2$  son funciones analíticas que empiezan con términos de orden mayor o igual que dos. En este póster estudiamos el llamado *problema centro-foco* para este tipo de puntos críticos. Recordemos que, una vez determinado que las soluciones de la ecuación diferencial giran entorno al punto crítico, este problema consiste en la distinción entre centros y focos. En particular presentamos un criterio efectivo para distinguir entre ambos tipos de puntos críticos. Este criterio está basado en las formas normales de dichas ecuaciones diferenciales y en el estudio de la multiplicidad de una cierta aplicación del plano en si mismo.

## 152 Resonancia vibracional en una estructura inducida por ruido

**Autor:** José Pablo Baltanás Illanes

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
ESCET, Área de Física Aplicada  
c/Tulipán, s/n  
28933 Móstoles, Madrid

**E-mail:** [baltanas@escet.urjc.es](mailto:baltanas@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Luis López (U. Rey Juan Carlos), A. Zaikin (Potsdam University), J. Kurths (Potsdam University), Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

La Resonancia Vibracional (RV) es un fenómeno que se manifiesta en el hecho de que para ciertos valores de la amplitud de una señal de forzado de alta frecuencia, la respuesta del sistema a una señal de baja frecuencia es óptima. En el presente trabajo presentamos el efecto de la RV para un sistema espacialmente extendido de osciladores acoplados bajo la acción de dos fuerzas periódicas, una de baja frecuencia y otra de alta frecuencia. En este caso, el fenómeno observado se debe a la combinación de dos efectos; por un lado, una transición de fase inducida por ruido que origina un potencial biestable colectivo, y por otro, la RV convencional. Debido a la generalidad del modelo considerado, creemos que dicho fenómeno podría ser de interés en áreas como la tecnología de circuitos electrónicos, tecnologías de la comunicación, convección de Rayleigh-Bénard o reacciones químicas fotosensibles.

El sistema considerado se estudia mediante simulaciones numéricas y se presenta una explicación cualitativa del mismo a través de un modelo efectivo de dimension cero. El comportamiento de dicho sistema efectivo, y en particular la presencia de RV en el mismo, se estudia mediante el empleo de simulaciones analógicas.

## 153 No linealidad geométrica en la flexión de una barra empotrada en un extremo sometida a distintos tipos de carga

**Autor:** Augusto Beléndez Vázquez

**Afiliación:** Universidad de Alicante  
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal  
Apartado 99. 03080 Alicante

**E-mail:** [augusto@disc.ua.es](mailto:augusto@disc.ua.es)

**Colaboradores:** Manuel Pérez Polo (U. Alicante) y Tarsicio Beléndez Vázquez (U. Miguel Hernández de Elche)

En el presente trabajo se analiza el comportamiento no lineal de los grandes desplazamientos de una barra flexionada de material elástico lineal, de sección constante y de longitud mucho mayor que sus dimensiones laterales, empotrada en un extremo y sometida a distintos tipos de cargas. Se trata del problema clásico de la elástica ya planteado por Euler y Bernoulli en el siglo XVIII. Se presenta la ecuación momento-curvatura que gobierna el comportamiento de la barra para grandes desplazamientos de la barra lo que implica que el problema presenta no linealidad geométrica. El resultado es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que debe ser resuelta numéricamente. Los parámetros de la barra que se han considerado son la pendiente en cada punto de la barra, la elástica de la barra y los desplazamientos horizontal y vertical del extremo libre. En el desarrollo de este trabajo se ha simulado el comportamiento no lineal de la barra utilizando los métodos de Runge-Kutta de 4° orden y el de Runge-Kutta-Fehlberg de 5° orden y se han comparado los resultados con los calculados en términos de funciones elípticas (cuando sólo se aplica una carga concentrada en el extremo libre) y con el método de los elementos finitos (cuando hay carga concentrada y distribuida) utilizando el programa ANSYS así como con resultados experimentales obtenidos en el laboratorio para una barra ejemplo. En el caso del método de Runge-Kutta de 4° orden los intervalos de simulación se han escogido desde valores de  $\lambda = 0.0125$  hasta  $\lambda = 0.00025$  unidades de longitud adimensionales a lo largo de la longitud de la barra, con objeto de verificar la estabilidad de las soluciones cuando el paso de integración disminuye. El método de Runge-Kutta se ha aplicado de la forma habitual calculando en cada paso los distintos coeficientes de Runge y a partir de éstos se ha obtenido el valor del estado en la siguiente iteración en función del vector de estado. La ventaja de este método es que arranca por sí solo y el inconveniente es que si se desea controlar el error en cada paso de integración es necesario hacer dos estimaciones en cada paso de integración con valores del paso de  $\lambda$  y  $2\lambda$ , lo cual requiere duplicar los cálculos. El método de Runge-Kutta-Fehlberg es mucho más preciso que el anterior, aunque es necesario evaluar la función seis veces en cada paso de integración, con lo cual para un mismo valor de  $\lambda$  es más lento. Tiene la ventaja de que se puede calcular el error por paso sin necesidad de duplicar los cálculos, y se ha utilizado cuando se desea mucha precisión en los cálculos de dependencia sensible. Es importante tener en cuenta que el método de Runge-Kutta-Fehlberg puede competir en velocidad con el de Runge-Kutta de 4° orden, ya que aunque el número de cálculos es muy superior, puede ser más rápido a costa de aumentar el paso de integración  $\lambda$ . Los resultados con ambos métodos se han comparado con aquellos que se obtienen utilizando el programa ANSYS que hace uso del método de los elementos finitos. Asimismo todas las simulaciones teóricas se han comparado con los resultados experimentales correspondientes a una barra de acero colocada en posición horizontal, empotrada por un extremo y sometida a una carga uniforme distribuida a lo largo de su longitud (su propio peso) y a una carga puntual vertical aplicada en el extremo libre. Por último señalar que los métodos de solución propuestos en este trabajo también pueden generalizarse al caso más general en el que el material de la barra no es elástico lineal, es decir, en el caso de no linealidades geométrica y del material combinadas.

## 154 Comportamiento bifurcacional en las oscilaciones transversales de un sistema mecánico forzado, con fricción seca

**Autor:** Francisco Bellido Leandro

**Afiliación:** Universidad de Cádiz  
 Dpto. de Física de la Materia Condensada  
 Facultad de Ciencias  
 Campus del Rio San Pedro  
 11510 Puerto Real (Cádiz)

**E-mail:** [francisco.bellido@uca.es](mailto:francisco.bellido@uca.es)

**Colaboradores:** Juan B. Ramírez Malo y Manuel Domínguez de la Vega

Es conocido que sistemas mecánicos reales de baja dimensionalidad presentan comportamientos característicos de la no linealidad. En particular, aquellos sistemas disipativos en los que intervienen fuerzas de fricción seca dependientes de la velocidad y que tienen un gran número de aplicaciones en ingeniería mecánica [1].

En el presente trabajo se aborda el estudio, mediante simulación numérica, de la dinámica de las oscilaciones transversales de un sólido paralelepédico con movimiento de traslación, que está sometido a un forzamiento armónico externo y a un rozamiento seco del tipo  $F_r = \mu_k^o + \eta v_{rel}$  ( $\mu_k^o > 0$ ,  $\eta > 0$ ). Así, con las características expuestas, el sistema puede constituir un modelo simplificado de un vehículo de tracción. En las simulaciones realizadas, los rangos de valores de los parámetros que intervienen en el sistema dinámico asociado a las ecuaciones de movimiento se eligieron de manera que el sistema evolucionara bajo condiciones de forzamiento y amortiguamiento débiles.

Utilizando la amplitud de la fuerza externa como parámetro de control, el sistema presenta un variado comportamiento, tanto periódico como caótico. De la misma manera, aparecen diferentes escenarios donde tienen lugar bifurcaciones catastróficas nodo-silla asociadas a un ciclo de histéresis, bifurcaciones de ruptura de la simetría características de la simetra que el sistema dinámico presenta y cascadas de dobles períodos que conducen al caos [2]. El estudio de la estabilidad de los atractores, al variar el parámetro de control, y la caracterización de las bifurcaciones fue realizado mediante el análisis de la evolución de los multiplicadores de Floquet, obtenidos a partir de la resolución numérica reiterada de la ecuación matricial variacional  $\dot{\mathbf{Y}} = (D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})\mathbf{Y}$  [3]

Finalmente, se analiza la coexistencia de soluciones periódicas en el espacio fásico, mediante la obtención de cuencas de atracción para valores del parámetro de control donde la dinámica del sistema presenta un mayor grado de riqueza.

[ 1] B. Blazejczyk-Okolewska, K. Czolczynski, T. Kapitaniak y J. Wojewoda, *Chaotic mechanics in systems with impacts and friction*, (World Scientific, Singapore, 1999).

[ 2] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart y Y. Ueda, *Safe, explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems*, Phys. Rev. E, 49 (1994) 1019-1027.

[ 3] A. H. Nayfeh y B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics*, (Wiley, New York, 1995).

## 155 Modelization of Benard-Marangoni Convection in circular container

**Autor:** Angela Bernardini Gagliani

**Afiliación:** Universidad de Navarra  
Irunlarrea s/n,  
31080 Pamplona Navarra.

**E-mail:** [angela@fisica.unav.es](mailto:angela@fisica.unav.es)

**Colaboradores:** Jean Bragard (U.Navarra ), Hector Mancini (U. Navarra)

A weakly non-linear amplitude equation is presented in order to model a Bénard-Marangoni convective structure recently observed in experiments

The structure is a single hexagon that appears for an intermediate aspect ratio and displays an interesting dynamics with spontaneous transitions to pentagon and heptagon .

The equations proposed are able to reproduce this nontrivial dynamics. We want to explore the possibility of controlling the evolution of the system using small “localized” perturbations both on the numerical simulations and on the experimental realizations.

## 156 Caracterización de la variabilidad mediante las dimensiones de Renyi

**Autor:** Javier Caniego

**Afiliación:** Universidad Politécnica de Madrid  
E.T.S.I. Agrónomos,  
Ciudad Universitaria s/n  
Madrid, 28040

**E-mail:** [caniego@mat.etsia.upm.es](mailto:caniego@mat.etsia.upm.es)

**Colaboradores:** M. Angel Martín (U. Politécnica de Madrid), Fernando San José (U. Politécnica de Madrid)

El análisis de la variabilidad espacio temporal de las propiedades medidas en el suelo es de gran interés científico por su utilidad en la predicción y en general en la interpolación . A ella contribuyen muchos factores que operan interaccionando y producen como resultado el hecho aparente de que el suelo es aleatorio. Las herramientas de la geostatística no son suficientes para distinguir si en esas causas físicas hay componentes de tipo determinista. No obstante, independientemente de la aleatoriedad del origen del suelo, se considera de mayor interés a efectos prácticos la cuantificación de esa variabilidad.

Recientemente se vienen aplicando nuevos métodos basados en la teoría de la información al estudio de la complejidad. En este trabajo se muestra la capacidad de las dimensiones de información de Rényi para analizar la variación de algunas propiedades edafológicas medidas a lo largo de distintos transectos. Como resultado es posible cuantificar y caracterizar la complejidad de esa variación así como obtener información relativa a su naturaleza aleatoria.

## 157 Dynamical Flows of a Bi-quadratic Information Neural Network

**Autor:** David Dominguez Carreta

**Afiliación:** ETSI,  
Universidad Autónoma de Madrid,  
Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain

**E-mail:** [david.dominguez@ii.uam.es](mailto:david.dominguez@ii.uam.es)

**WWW:** <http://www.ii.uam.es/esp/docentes/index.html>

**Colaboradores:** E.Korutcheva (UNED)

The mutual information ( $MI$ ) of the three-state neural network can be obtained exactly for the mean-field architecture, as a function of three macroscopic parameters: the overlap, the neural activity and the activity-overlap. A Hamiltonian is built from the expansion of the MI for the values of the parameters around the neuron states almost independent on the patterns. This Hamiltonian, with a bi-linear and bi-quadratic interactions, optimizes the retrieval properties of the network respect to the size of the basins of attraction of the patterns. The dynamics corresponding to this Hamiltonian is found, for several architectures. As a special characteristic of such network, we see that information can survive even if no overlap is present. We show in a flow diagram that there is a repeller from the metastable *quadrupolar* phase to the retrieval zone. A separatrix line can be observed which attracts the trajectories from below or above and hence to the fixed-point. The resulting system has a much larger retrieval capacity than the Hopfield network.

## 158 Relación entre métodos centrados y descentrados en sistemas hiperbólicos no homogéneos

**Autor:** Enrique Domingo Fernández Nieto

**Afiliación:** Universidad de Sevilla  
E.T.S. Arquitectura,  
Avda. Reina Mercedes N.2  
Sevilla, 41012

**E-mail:** [edofer@us.es](mailto:edofer@us.es)

**Colaboradores:** Tomás Chacón Rebollo, Antonio Domínguez Delgado (Universidad de Sevilla)

En este trabajo vamos a estudiar como aproximar la solución de sistemas hiperbólicos no homogéneos:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = G(x, W),$$

donde  $F$  se conoce como flujo físico y  $G$  como término fuente.

Si el sistema es homogéneo ( $G = 0$ ), una discretización centrada de la derivada del flujo produce métodos inestables, por lo que hay que utilizar métodos descentrados.

Dado un método descentrado para aproximar la solución del sistema homogéneo, en este trabajo estudiamos como construir una discretización de la fuente numérica. En concreto, desarrollamos un concepto novedoso referente a la extensión de métodos descentrados para sistemas hiperbólicos con término fuente.

Realizamos un estudio previo para métodos centrados, que a pesar de ser inestables, como hemos mencionado anteriormente, proporcionan una herramienta fundamental para el modelo desarrollado de extensión de métodos para sistemas homogéneos a no homogéneos.

Además, con la técnica introducida, hemos extendido al caso no homogéneo métodos numéricos que sólo se podían implementar en el caso homogéneo y tienen propiedades muy interesantes.

Presentamos varios test numéricos comparando con soluciones analíticas y datos de laboratorio.

## 159 Ondas espirales en sistemas de reacción-difusión experimentales bajo forzamientos convectivos

**Autor:** Nicolás Ferreiros

**Afiliación:** Grupo de Física non Lineal, Fac. de Física, Univ. de Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela.

**E-mail:** [nico@fmares.usc.es](mailto:nico@fmares.usc.es)

**WWW:** <http://chaos.usc.es>

**Colaboradores:** Vicente Pérez Villar y Alberto P. Muñuzuri (Univ. Santiago de Compostela)

Los sistemas de reacción difusión son conocidos y han sido ampliamente estudiados por sus múltiples aplicaciones y similitudes con procesos que tienen lugar en la Naturaleza. En la mayoría de los estudios realizados los procesos convectivos han sido sistemáticamente eliminados o minimizados. Sin embargo, en los sistemas reales la influencia de la convección puede jugar un papel determinante en la selección del tipo de estructura que aparecerá y en el comportamiento que tendrá.

En el presente estudio, se presentan resultados experimentales complementados por simulaciones numéricas del efecto de procesos puramente convectivos sobre estructuras espacio-temporales.

El sistema que estudiado es la reacción química de Belousov-Zhabotinsky sometida a un campo de fuerzas centrífugas que actúan de forma diferente dependiendo de la densidad local del medio. El efecto de dichos campos sobre la estructura de ondas espirales se analizará mostrando los diferentes casos y situaciones.

[ 1] R. Kapral and K. Showalter (Eds.), *Chemical Waves and Patterns*

[ 2] V. Pérez-Villar, A.P. Muñuzuri and V. Pérez-Muñuzuri. *Phys. Rev. E* **64** 3771 (2000)

[ 3] V. Pérez-Villar, A.P. Muñuzuri, M.N. Lorenzo and V. Pérez-Muñuzuri. *submitted to Phys. Rev. E* (2002).

[ 4] N. Ferreiros et al. *in preparation*

## 160 Integrales polinomiales en los sistemas cuadráticos a través de ecuaciones recurrentes

**Autor:** Belén García Fernández

**Afiliación:** E.U.I.T Informática de Gijón Universidad de Oviedo (Campus de Gijón)  
33203 Gijón (Asturias)

**E-mail:** [belen@inforg.uniovi.es](mailto:belen@inforg.uniovi.es)

**Colaboradores:** Javier Chavarriga (U. Lleida), Jaume Llibre (U. Autònoma de Barcelona), Jesús S. Pérez del Río (U. de Oviedo), José Angel Rodríguez (U. de Oviedo)

La búsqueda de integrales primeras es una herramienta clásica para la determinación del retrato de fases de un sistema de ecuaciones diferenciales. La obtención de integrales primeras para los sistemas polinomiales ya fue objeto de estudio de matemáticos clásicos como Poincaré o Darboux. Sin embargo, en sistemas tan simples como los cuadráticos (es decir, del tipo  $x' = P(x, y)$ ,  $y' = Q(x, y)$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios tales que el máximo de sus grados es 2), es todavía un problema abierto determinar cuales poseen una integral primera y, en particular, los que poseen una integral primera polinomial. Es de destacar, en este sentido que, recientemente, J. Llibre y Xiang Zhang han obtenido todos los sistemas cuadráticos que tienen integrales primeras polinomiales de grado menor o igual que cuatro y proporcionado sus correspondientes retratos de fases.

De cara a la clasificación de los sistemas cuadráticos que poseen integral primera polinomial de grado arbitrario, es útil considerar una reducción canónica de los mismos (esta reducción fue aplicada por primera vez por A. Gasull, S. Li-Ren y J. Llibre para la clasificación de los sistemas cuadráticos cordales). De este modo, todos los sistemas cuadráticos se pueden escribir, después del adecuado cambio de variables y tiempo, en la forma  $x' = R(x, y)$ ,  $y' = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ , donde  $R$  es uno de siguientes diez polinomios:  $0$ ,  $1$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $1 + x^2$ ,  $-1 + x^2$ ,  $y$ ,  $y + x^2$ ,  $xy$ ,  $1 + xy$ . En los seis primeros casos, en que la primera componente no depende de  $y$  los mismos autores hemos obtenido la clasificación completa, siendo el punto clave la equivalencia de los sistemas diferenciales que poseen integral primera polinomial con una ecuación diferencial lineal. Sin embargo, por la naturaleza de los cuatro últimos casos, debemos emplear para ellos técnicas completamente diferentes y con las que hasta el momento hemos conseguido clasificar los campos con integrales primeras polinomiales que responden a las formas canónicas vii y viii. La estrategia utilizada ha sido una descomposición de la posible integral primera polinomial de grado  $n$ , de modo que su cálculo equivale a obtener  $n$  polinomios que deben ser determinados a través de ecuaciones diferenciales recurrentes. Si bien un tratamiento de este tipo permite obtener de una manera sencilla los sistemas con integral primera polinomial en el caso vii, en cambio tiene gran complicación en el caso viii. De hecho, la aplicación de estas técnicas en éste último caso ha sido posible debido a la realización de un cambio de variable, sugerido por la información empírica obtenida, que simplifica en cierto modo el proceso. Aún así, la resolución del problema resultó compleja, debido al difícil control de los coeficientes de los polinomios recurrentes.

## 161 Condensados de luz en guías ópticas no lineales

**Autor:** Marta Gómez Cid

**Afiliación:** Universidade de Vigo  
Facultade de Ciencias,  
As Lagoas s/n Ourense 32004

**E-mail:** [mgc@uvigo.es](mailto:mgc@uvigo.es)

**Colaboradores:** Humberto Michinel Álvarez

En el presente trabajo se analizan las propiedades de haces de luz laser que se propagan en guías ópticas no lineales. Se han considerado guías tipo salto con no linealidad cúbico-quíntica, con un término cúbico focalizante y quántico desfocalizante. Las soluciones estacionarias estudiadas demuestran la aparición de propiedades similares a la tensión superficial en los haces de luz.

En primer lugar se ha analizado la estructura de los estados estacionarios del sistema, variando la potencia del haz para distintos anchos de la guía. Como es de esperar, la saturación en la no linealidad impide el aumento de la potencia pico por encima de un cierto umbral y provoca un ensanchamiento característico de los haces y la formación de un “top-flat”

La dinámica de las pequeñas oscilaciones se ha analizado partiendo de las ecuaciones que proporciona el método variacional basado en la formulación lagrangiana y demuestra la existencia de un máximo en la frecuencia de oscilación de los haces.

## 162 Funciones de distribución de probabilidad cuántica en el espacio de fases de sistemas moleculares: HO<sub>2</sub>, HCN, HCP

**Autor:** Carlos González-Giralda

**Afiliación:** Departamento de Física y Mecánica  
ETSI Agrónomos. Universidad Politécnica de Madrid  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid

**E-mail:** [carlos.giralda@ciemat.es](mailto:carlos.giralda@ciemat.es)

**Colaboradores:** L. Seidel, R.M. Benito (U. Politécnica de Madrid), Z. Safi, F. Borondo (U. Autónoma de Madrid)

La dinámica vibracional de moléculas con modos de gran amplitud, tales como HO<sub>2</sub>, HCN o HCP, viene bien descrita por modelos de 2 grados de libertad, en los que uno de los movimientos (O–O, C–N, C–P, respectivamente) se mantiene congelado. La estructura del correspondiente espacio de fases se explica bien en términos del teorema KAM.

En este trabajo se presentan funciones de distribución de probabilidad en el espacio de fases para estas moléculas, calculadas cuánticamente y se establece una correspondencia entre sus características más relevantes y la correspondiente dinámica clásica.

Se ha realizado una clasificación cualitativa de estados cuánticos para algunas de las moléculas mencionadas, en virtud de la distribución de nodos y máximos de la función de onda asociada a cada estado, y de la disposición de ceros y máximos de la representación de la función de distribución en el espacio de fases calculado cuánticamente.

De este modo, se encuentra que para los estados cuánticos cuya función de onda presenta una estructura regular de máximos y nodos, la función de distribución de probabilidad en el espacio de fases para ese estado, presenta una disposición ordenada de ceros.

Algunos estados, cuyas funciones de onda no poseen una estructura regular de nodos, también muestran, en la representación del espacio de fases, una disposición ordenada de algunos de sus ceros, aunque no de todos, y se discute la relevancia que parece tener en la dinámica del sistema, tanto la posición de los ceros que no se encuentran ordenados, como la correspondencia de éstos con algunas de las órbitas periódicas clásicas calculadas. Estos son los llamados estados de Scar del sistema.

Como conclusión se presentan estos estados de Scar como elementos que pueden ser de gran ayuda, en el contexto de la dinámica cuántica, para la definición de la frontera entre zonas de regularidad y de caos.

## 163 El método de los elementos finitos en análisis estructurales no lineales

**Autor:** Consuelo Gragera Peña

**Afiliación:** Universidad Extremadura  
Escuela de Ingenierías Industriales  
Avda de Elvas, sn  
Badajoz, 06071

**E-mail:** [cgragera@unex.es](mailto:cgragera@unex.es)

Se encuentran en la vida real multitud de ejemplos en los que aparecen comportamientos no lineales en análisis de sistemas estructurales, por ejemplo, la grapa que varía de forma con la acción de grapar unas hojas de papel o el contacto que se produce entre el firme de la carretera y una rueda del automóvil. Este comportamiento no lineal puede ser debido a numerosas causas, estas se pueden agrupar en tres grupos, primero debido a cambios de estado (incluido los problemas de contacto altamente no lineales), segundo no linealidades geométricas (con grandes deformaciones, desplazamientos y/o rotaciones) y por último no linealidades en materiales (relación entre tensión / deformación no lineal, con modelos diferentes como modelos hiperelásticos, elastoplásticos, etc.).

El problema básico será encontrar el estado de equilibrio del cuerpo que presenta una respuesta no lineal correspondiente a las cargas aplicadas en cada instante puntual. Este tipo de análisis va a requerir una solución incremental con un número determinado de etapas de carga. En el análisis incremental se expresa el equilibrio del cuerpo en un instante determinado utilizando el principio de los desplazamientos virtuales. Se obtendrán resultados en desplazamientos y derivados aproximados. La amplia gama de métodos iterativos utilizados en el análisis por elementos finitos se basan en las técnicas de Newton-Raphson.

El programa utilizado para realizar la simulación y el análisis mediante la discretización mediante elementos finitos de este tipo de problemas, emplea para resolver los problemas no lineales estas aproximaciones de Newton-Raphson. En este método las cargas se van a dividir en una serie de incrementos de carga y estos se pueden aplicar en varias etapas de carga. Antes de obtener la solución este método va evaluando el vector carga, diferencia entre las fuerzas obtenidas en los elementos tensionados y las cargas aplicadas. Si el criterio de convergencia no es satisfecho, se vuelve a evaluar el vector cargas, se actualiza la matriz de rigidez y se obtiene una nueva solución. Este procedimiento iterativo continúa hasta que el problema converge. En algunas ocasiones, la matriz de rigidez tangente puede llegar a ser singular causando graves problemas de convergencia. En estos casos se puede usar un esquema de iteración alternativo como por ejemplo el método de la longitud de arco. Así, las iteraciones de equilibrio de Newton-Raphson van a converger a lo largo de un arco.

**164 On the 16th Hilbert's problem for a Kukles system.****Autor:** Maite Grau Montaña**Afiliación:** Departament de Matemàtica  
Universitat de Lleida  
Avda. Jaume II, 69  
25001, Lleida.**E-mail:** [mtgrau@matematica.udl.es](mailto:mtgrau@matematica.udl.es)**WWW:** <http://www.udl.es/dept/matematica/ssd>**Colaboradores:** Javier Chavarriga (U. de Lleida), Eduardo Sáez (U. Técnica Federico Santa María), Ivan Szántó (U. Técnica Federico Santa María)

We consider a Kukles' system of the form  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = f(x, y)$  where  $f(x, y)$  is a polynomial with real coefficients of degree  $m$  without  $y$  as a divisor. We study the maximum number of small-amplitude limit cycles for these kind of systems which can coexist with invariant algebraic curves.

We give all the possible distributions of invariant straight lines for a Kukles' system and we give some bounds for the number of limit cycles. We also give some necessary conditions for the existence of an invariant algebraic curve of degree  $\geq 2$  and we study the possible coexistence of this curve and a limit cycle.

In particular, we give an example of an invariant hyperbola coexisting with a limit cycle, in contradiction of a previous result. This false result appears in

YANG XINAN, *A survey of cubic systems*, Ann. of Diff. Eqs. **7**, No. 3, (1991), p. 323–363.

## 165 Caos clásico y cuántico: un átomo de hidrógeno en presencia de campos magnético constante y eléctrico cuadrupolar

**Autor:** Manuel Iñarrea Las Heras

**Afiliación:** Universidad de La Rioja  
Dpt. Qumicas. Área de Física Aplicada  
Centro de Enseñanzas Científicas y Técnicas,  
c/ Madre de Dios, 51. Logroño, 26006

**E-mail:** [manuel.inarrea@dq.unirioja.es](mailto:manuel.inarrea@dq.unirioja.es)

**Colaboradores:** J.P. Salas Ilarrazza (U. La Rioja), V. Lanchares Barrasa (U. La Rioja) y A.I. Pascual Lería (U. La Rioja)

Con el caos en mecánica clásica completamente caracterizado - fuerte sensibilidad a la condiciones iniciales - la cuestión que surge es cómo el concepto de caos debe ser aplicado en mecánica cuántica. Una aplicación directa de la idea de trayectorias divergentes en mecánica cuántica no es posible debido a que las trayectorias sólo pueden ser determinadas de forma aproximada con una incertidumbre dada por la constante de Planck.

En contra de la que podría pensarse en un primer momento, el espectro cuántico de un sistema clásicamente caótico aparece fuertemente correlacionado, mostrando repulsión entre niveles más que un agrupamiento entre los mismos. En este sentido, en los espectros cuánticos se han encontrado patrones universales de fluctuación que están íntimamente relacionados con el comportamiento clásico: el espectro de niveles de sistemas clásicamente caóticos muestra fluctuaciones de matrices aleatorias, mientras el espectro de los sistemas integrables muestra fluctuaciones aleatorias caracterizadas por una distribución de Poisson.

En las últimas décadas, el átomo de Hidrógeno bajo campos externos, en particular en presencia de un campo magnético estático constante, se ha convertido en un importante sistema físico sobre el que estudiar la relación entre el caos clásico y el caos cuántico. Con este objetivo, en este trabajo abordamos el estudio de un átomo de Hidrógeno sometido a la acción simultánea de un campo magnético constante y un campo eléctrico cuadrupolar. La peculiaridad que presenta este sistema es su integrabilidad para tres valores concretos del cociente entre las intensidades de los campos. Esta característica nos ha permitido, para valores altos de la energía, obtener transiciones clásicas caos-orden-caos bien definidas y estudiar su "huella" en los correspondientes espectros cuánticos.

En el estudio clásico del problema, tras identificar los tres valores críticos de los campos para los cuales el sistema es integrable, hemos estudiado la evolución que sufre la estructura del espacio de fases del sistema en función de los parámetros del mismo (energía e intensidades de los campos externos). Debido a que el sistema posee dos grados de libertad, para estudiar el espacio de fases hemos generado superficies de sección de Poincaré. Mediante estas superficies de sección, hemos estudiado las transiciones caos-orden-caos que sufre el sistema cuando varían los parámetros. Simultáneamente, y mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov, hemos seguido la evolución de la fracción de órbitas regulares en las secciones de Poincaré.

Desde el punto de vista cuántico, hemos estudiado la evolución de la estadística de niveles de energía en función del parámetro que controla la razón entre las intensidades de los campos externos. Este estudio nos ha permitido confirmar que las transiciones clásicas caos-orden-caos, se corresponden cuánticamente con una estadística de niveles que sufre una transición gradual desde una distribución de Wigner (asociada a comportamientos completamente caóticos) a una distribución de Poisson (asociada a comportamientos regulares) y viceversa.

## 166 Predicción del consumo eléctrico mensual español con redes neuronales

**Autor:** Miguel Ángel Jaramillo Morán

**Afiliación:** Universidad de Extremadura.

Esc. de Ing. Industriales,  
Avda de Elvas s/n.  
Badajoz, 06071

**E-mail:** [miguel@unex.es](mailto:miguel@unex.es)

**Colaboradores:** Diego Carmona Fernández (Esc. de Ing. Industriales), Eva González Romera (Esc. de Ing. Industriales)

La predicción de la demanda del consumo eléctrico representa hoy día una herramienta fundamental de las compañías eléctricas para adaptar sus capacidades de producción o distribución a las demandas del mercado. La predicción a corto plazo, horizonte de días u horas, suele despertar un interés mayor en estas compañías ya que permite adecuar la capacidad productiva a las necesidades del mercado. Sin embargo la predicción a largo plazo, horizonte de un mes, no ha despertado un interés análogo ya que sus predicciones afectarían a la definición de políticas de aumento de la capacidad productiva que deberían reflejarse en la construcción de nuevas centrales y la implantación de más líneas de distribución, decisiones no tan acuciantes como las anteriores. En cualquier caso su necesidad es real y, aunque no con el mismo interés que la predicción a corto plazo, las empresas demandan sistemas capaces de realizarlas con fiabilidad. Con este objetivo se ha propuesto una red neuronal que aprende la dinámica de la serie temporal de los datos de consumo españoles entre los años 1959 y 2000 para luego realizar una predicción de los mismos. La red tiene como entrada doce datos correspondientes a los doce meses anteriores al que se desea predecir. El aprendizaje se realizó con los valores comprendidos entre 1959 y 1985, utilizando el resto para validar el modelo. Los resultados alcanzados presentan un error general de las predicciones inferior al 5% en la mayoría de los casos.

## 167 Comportamiento asintótico de un sistema acoplado edo-edp no lineal

**Autor:** Ángela Jiménez Casas

**Afiliación:** Universidad Pontificia Comillas de Madrid  
E.T.S.I. (I.C.A.I),  
c/Martires de Alcala, 11  
Madrid, 28015

**E-mail:** [angela@upco.es](mailto:angela@upco.es)

Se estudia el movimiento de un fluido que contiene una sustancia soluble, en el interior de un tubo cerrado, bajo los efectos de la convección natural y de una fuente externa de calor, estos dispositivos en ingeniería se denominan termosifones (ver [1,2]). Se estudia la evolución de la velocidad del fluido, la temperatura del fluido y la concentración del soluto.

En este trabajo se considera un modelo de termosifón que generaliza el modelo de termosifón estudiado en [2] y se extienden los resultados sobre el comportamiento asintótico probados en [2] para este modelo.

Finalmente se muestran los resultados numéricos obtenidos para varios modelos de termosifón, cuando se consideran diferentes leyes de flujo de calor en circuitos de la misma geometría. Se obtienen comportamientos muy variados delimitando además el rango de parámetros  $(\nu, b, c)$  para el cual se obtienen comportamientos caóticos.

Las ecuaciones que rigen la evolución de la velocidad del fluido,  $v$  así como la temperatura  $T$  y salinidad  $S$  son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = \oint (T - S) \cdot f, & v(0) = v_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(x) + \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & T(0, x) = T_0(x) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & S(0, x) = S_0(x) \end{cases}$$

donde  $G(v)$  es una función positiva que representa la fricción en la pared.

[ 1] M.A. Herrero, J.J-L. Velazquez, "Stability analysis of a closed thermosyphon", European J. Appl. Math., 1, 1-24, (1990).

[ 2] A. Jiménez Casas, "Tesis doctoral", U. Complutense de Madrid, (1996).

## 168 Resonancia Estocástica y sus aplicaciones a las comunicaciones

**Autor:** Luis López Fernández

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos.  
C/ Tulipán s/n  
28933 Móstoles (Madrid).

**E-mail:** [llopez@escet.urjc.es](mailto:llopez@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

Una de las propiedades más destacables de algunos sistemas no lineales es la de presentar el fenómeno conocido como resonancia estocástica. Este fenómeno consiste en que el sistema es capaz de mejorar las propiedades de la señal en presencia de ruido. Es conocido, sin embargo, que en el ámbito de las telecomunicaciones, el ruido suele ser considerado como un efecto parásito que degrada la calidad de recepción. En este contexto, este trabajo presenta un sistema innovador que pretende utilizar dicha propiedad para la realización de un circuito receptor de comunicaciones capaz de funcionar en situaciones de alto ruido electromagnético. En primer lugar se presentará una breve introducción a la resonancia estocástica, seguidamente se mostrará un sistema receptor basado en principios no lineales que permite el establecimiento de una comunicación entre emisor y receptor. Acto seguido, se mostrarán los resultados de las simulaciones sobre el sistema, para finalizar con una descripción del prototipo experimental que se ha construido.

## 169 Conectividad en sistemas complejos: hacia un modelo de transferencia de información en redes sociales

**Autor:** Luis López Fernández

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos.  
C/ Tulipán SN  
28933 Móstoles (Madrid).

**E-mail:** [llopez@escet.urjc.es](mailto:llopez@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

En los últimos años se ha puesto de manifiesto que el papel que desempeñan las redes de interconexión en los sistemas complejos es determinante a la hora de describir y comprender el comportamiento de los mismos. En este sentido, se están llevando a cabo investigaciones intensivas que han aportado trascendentes conclusiones en ámbitos tan dispares como la ecología, la biología, la neurología, el WWW, etc. En este contexto, el objetivo de esta comunicación es el de describir un novedoso modelo de transferencia de información en redes complejas que parece aportar un marco apropiado para la descripción de interacciones en redes sociales. Después de abordar los conceptos fundamentales asociados a la modelización de redes sociales, se presentarán los fundamentos matemáticos del modelo así como las implicaciones del mismo.

## 170 Estudio y modelado matemático para la predicción de problemas en Ingeniería

**Autor:** Mariló López González

**Afiliación:** Universidad Politécnica de Madrid y Universidad San Pablo CEU (EPS)  
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos  
Ciudad Universitaria s/n  
Madrid, 28040

**E-mail:** [ma08@caminos.upm.es](mailto:ma08@caminos.upm.es) y [lopgon.eps@ceu.es](mailto:lopgon.eps@ceu.es)

**Colaboradores:** Javier Rodrigo Hitos (U. Pontificia Comillas), Jose Juan de Blasco SanJose (U. Politécnica de Extremadura)

El cálculo de las coordenadas de puntos situados sobre el terreno o sobre una determinada estructura, es actualmente un campo de gran importancia y utilidad. Las aplicaciones más directas pueden hacerse sobre el replanteo de trabajos de ingeniería y sobre el estudio y control de movimientos pequeños y deformaciones. Por ello, es importante buscar el modo de perfeccionar este tipo de trabajos. La línea de estudio que se está realizando se centra en la búsqueda y ajuste de modelos matemáticos que sirvan para la posible predicción de la deformación de un área o estructura.

Establecer un sistema de ecuaciones  $x' = f(x)$  donde puedan aparecer ciertos parámetros como el tiempo, nivel de agua, precipitaciones, presión,... que se ajuste a la situación para predecir el comportamiento futuro según unos valores iniciales y unos valores de los parámetros. Así como establecer si dicho comportamiento es o no caótico.

## 171 Supresión de caos por cambio en la forma de onda de excitaciones elípticas en el oscilador de Helmholtz.

**Autor:** Miguel Ángel López Guerrero

**Afiliación:** Universidad de Castilla-La Mancha  
E.U. Politécnica de Cuenca,  
Cuenca, 16071

**E-mail:** [miguelangel.lguerrero@uclm.es](mailto:miguelangel.lguerrero@uclm.es)

**WWW:** [http://www.uclm.es/CU/Telecomunicaciones/docencia/personal/datos\\_malopez.htm](http://www.uclm.es/CU/Telecomunicaciones/docencia/personal/datos_malopez.htm)

**Colaboradores:** Francisco Balibrea Gallego (U. Murcia), Ricardo Chacón García (U. Extremadura)

En este trabajo se ha estudiado la estabilidad estructural de la dinámica de algunos osciladores no lineales, amortiguados y excitados periódicamente, bajo cambios en la forma de onda de la modulación periódica. Ello implica considerar modelos más realistas para las perturbaciones periódicas que actúan sobre los mismos. Las funciones periódicas más simples que cumplen este requisito son las funciones elípticas de Jacobi (FEJ), ya que proporcionan las soluciones de los sistemas integrables con las alinealidades polinómicas más simples (como las que presentan los osciladores de Helmholtz, Thompson y Duffing). En comparación con las funciones armónicas -mayoritariamente empleadas en la bibliografía al respecto- las FEJ añaden una nueva variable al espacio de parámetros del sistema: el parámetro elíptico  $m$  que es responsable de la forma geométrica de la perturbación, es decir, en términos físicos, del ritmo temporal en el que el mecanismo de excitación externo transfiere energía al sistema, en un período dado de la excitación. Este hecho permite esperar que se encuentren nuevos fenómenos -inexplorados en el caso armónico- cuando  $m$  varíe y los demás parámetros del sistema permanezcan constantes. De esta manera, con la amplitud y el período fijos, la forma de la perturbación se controla variando el parámetro elíptico  $m$ . Se han estudiado varios modelos: a) El oscilador de Helmholtz amortiguado y forzado (primero con la función seno-amplitud y luego con la función coseno-amplitud) y b) El oscilador de Helmholtz amortiguado y excitado paramétricamente (primero en el término lineal y luego en el término cuadrático) con la función seno-amplitud. Esto es, para el caso a), por ejemplo, hemos estudiado, una vez fijados algunos parámetros del oscilador, cómo se modifica la dinámica de éste cuando el forzamiento pasa de ser una función seno a una función onda cuadrada o de ser una función coseno a una secuencia de pulsos estrechos para cada condición inicial dada. Todos los resultados han sido comparados, concluyendo que los cambios en la forma de la onda de la perturbación periódica dependen de la FEJ elegida y del tipo de perturbación aplicada al sistema. Así, por ejemplo, hemos comprobado que es más fácil que exista escape caótico de un pozo de potencial cuando el forzamiento viene dado por la función seno-amplitud que cuando sea dado por la función coseno-amplitud. Los resultados obtenidos son una consecuencia del uso sistemático del análisis de Melnikov. En tales casos, dicho análisis establece un criterio para discernir entre el escape caótico o su inhibición.

## 172 Modelo predictivo de un buque utilizando técnicas neuro-fuzzy

**Autor:** Rafael López Martínez

**Afiliación:** Universidad Complutense de Madrid  
CCUM  
Madrid, 28040

**E-mail:** [rlopez@csc.ucm.es](mailto:rlopez@csc.ucm.es)

**Colaboradores:** Matilde Santos Peñas (DACYA, U. Complutense)

Actualmente se investiga en el diseño de sistemas de control para ferries rápidos que garanticen niveles básicos de estabilidad y de prestaciones. Para ello se ha definido un problema de control que consiste en el amortiguamiento de las aceleraciones verticales, principal causa del mareo.

En este artículo se expone la estrategia de utilización de técnicas neuro-fuzzy para la obtención de un modelo predictivo de la dinámica de un buque de alta velocidad, del que se dispone de resultados experimentales que permiten identificar su comportamiento.

Se puede suponer que el estado del sistema en un instante dado está relacionado, de alguna forma desconocida, con el estado del sistema en instantes previos. Es decir, la aceleración vertical, que es función de la altura de las olas, dependerá de como fueron éstas en instantes anteriores.

Se postula que, dada una sucesión de valores de amplitud de la ola, se puede predecir el próximo valor de la elongación de la misma y, por tanto, el momento de fuerzas verticales en el instante siguiente. La cuestión es determinar el intervalo de muestreo que se debe utilizar, que se obtiene como función de la altura de la ola, y que es la que determina el número de puntos que es necesario considerar. Con esta información, se genera un sistema de inferencia borroso que se entrena mediante técnicas neuronales, teniendo en cuenta los datos experimentales disponibles.

- [ 1] Kuo, B. (1996), "Sistemas de Control Automático". Prentice Hall. (Básico).
- [ 2] "Advances in Model-Based Predictive Control", (1994), Ed. by D. Clarke. Oxford University Press.
- [ 3] Anonymous (1996), "126 m Long Spanish Fast Ferry Launched". Fast Ferries, Septiembre, pp. 19-20.
- [ 4] Anonymous (1998), "Silvia Ana: Results of First Year's Service". Ship&Boat Int., Enero/Febrero, pp. 15-16.
- [ 5] Fossen, Thor I.(1994), "Guidance and Control of Ocean Vehicles". University of Trondheim. Norway.
- [ 6] Lewis, E.V. (1989). "Principles of Naval Architecture", SNAME, New Jersey.
- [ 7] Linkens, D. A., Kandiah, S., (1996), "Long-Range predictive control using fuzzy process Models". Trans. IChemE., vol. 74, pp. 77-88.
- [ 8] Santos, M., López, R., (2002), "Neuro-Fuzzy Model of a Fast Ferry Vertical Motion". Control 15th IFAC World Conference, 2002.

## 173 Nonlinear phenomena under modeled spatial growth conditions

**Autor:** Xavier Martí Rovirosa

**Afiliación:** Universitat de Barcelona  
Facultat de Física. Estructura i Constituents de la Matèria,  
Martí i Franqués, 1  
Barcelona, 08028

**E-mail:** [xmarti@hotmail.com](mailto:xmarti@hotmail.com)

**Colaboradores:** X. Ruiz (U. Rovira i Virgili), M. Ermakov (Institute for Problems in Mechanics. Moscow.), J. Casademunt (U. de Barcelona), L. Ramírez-Piscina e I. Mercader (Universitat Politècnica de Catalunya)

We have considered the effects of residual accelerations on fluid flow in microgravity environments. We have modeled some of these effects by means of pendular, translational and rotational polarized vibrations of relatively low frequencies. As a first approach to a real Bridgman-Stockbarger crystal growth arrangement, a rectangular domain with three different thermal boundary conditions, linear, adiabatic and mixed has been chosen. Temporal evolutions have been obtained by using standard volume finite methods on structured meshes. Calculations indicate that more intensive melt flows results using translational and rotational polarized vibrations. Also the magnitude of the thermal oscillations increases in these cases. Spectral results on thermal time series shows the appearance of harmonics of the external frequency in the thermal signal independently on the nature of the external excitation, but not any new (independent) frequency was detected.

## 174 Resonancia estocástica y sincronización de pulsos ópticos

**Autor:** Javier Martín Buldú

**Afiliación:** Departament de Física i Enginyeria Nuclear  
Universitat Politècnica de Catalunya  
c/Colom 11  
Terrassa E-08222

**E-mail:** [javier.martin-buldu@upc.es](mailto:javier.martin-buldu@upc.es)

**WWW:** <http://onyar.upc.es/javier>

**Colaboradores:** Jordi Garcia-Ojalvo (U. Politècnica de Catalunya), Claudio R. Mirasso (U. Illes Balears), M. Carme Torrent (U. Politècnica de Catalunya)

Uno de los comportamientos más característicos de los sistemas no lineales son las autopulsaciones. La evolución de los sistemas autopulsantes puede ser periódica o irregular, observándose este último caso, por ejemplo, cuando el sistema posee un único punto fijo estable alrededor del cual se oscila a causa de fluctuaciones internas o debido a una dinámica caótica. Un ejemplo de régimen autopulsado son las fluctuaciones de baja frecuencia (LFF) de un láser de semiconductor, las cuales se observan al realimentar el láser ópticamente. En estas condiciones, el sistema muestra repentinas caídas en la intensidad emitida, a frecuencias mucho más bajas que las típicas del láser. En el presente trabajo estudiamos el comportamiento de un láser modulado con una señal débil, observando cuál es el efecto de introducir un ruido externo en el sistema. Los resultados obtenidos muestran cómo para valores intermedios de la amplitud del ruido externo la regularidad de los pulsos aumenta, siguiendo además la frecuencia de la señal de entrada. Esta es la característica principal de la resonancia estocástica. Otra de las conclusiones de este estudio es que el tiempo de correlación del ruido es un parámetro fundamental para observar la resonancia estocástica en este tipo de sistemas.

## 175 Inhibition of chaotic escape from a potential well by incommensurate escape-suppressing excitations

**Autor:** Juan Antonio Martínez Martínez

**Afiliación:** Universidad de Castilla-La Mancha  
E.P.S.A.  
Avda. de Espanya, s/n. Campus Universitario  
Albacete, 02071

**E-mail:** [Juan.MMartinez@uclm.es](mailto:Juan.MMartinez@uclm.es)

**Colaboradores:** Ricardo Chacón García (U. Extremadura)

Theoretical results are presented concerning the reduction of chaotic escape from a potential well by means of a harmonic parametric excitations which verifies an ultrasubharmonic resonance condition with the escape-inducing excitation. The possibility of incommensurate escape-suppressing excitations is demonstrated by studying rational approximations to the irrational escape-suppressing frequency. The analytical predictions for the suitable amplitudes and initial phases of the escape-suppressing excitations are tested against numerical simulations based on a high-resolution grid of initial conditions. These numerical results indicate that the reduction of escape is reliably achieved for small amplitudes and at, and only at, the predicted initial phases. For the case of irrational escape-suppressing frequencies, the effective escape-reducing initial phases are found to lie close to the accumulation points of the set of suitable initial phases, which are associated with the complete series of convergents up to the convergent giving the chosen rational approximation.

## 176 Breathers discretos en redes disipativas

**Autor:** Pedro Jesús Martínez Ovejas

**Afiliación:** Universidad de Zaragoza  
E.U.I.T.I.,  
c/María de Luna, 3  
Zaragoza, 50015

**E-mail:** [icmat1@posta.unizar.es](mailto:icmat1@posta.unizar.es)

**Colaboradores:** Fernando Falo, Luis Mario Floría, José Luis Marín, Univ. de Zaragoza

En esta comunicación presentamos resultados publicados recientemente sobre la existencia y comportamiento de modos intrínsecos localizados (ILM) en un modelo paradigmático de la Física No lineal como es el Frenkel-Kontorova.

Las condiciones técnicas para la existencia teórica de los ILM, también llamados breathers discretos, son tan genéricas que aunque solo se hayan observado experimentalmente en una reducida cantidad de sistemas reales, es muy plausible que estén presentes en una gran variedad de sistemas físicos siendo una cuestión a dilucidar el papel que jueguen en el comportamiento de los mismos.

Por todo ello nos hemos fijado en un modelo básico (el Frenkel-Kontorova o Sine-Gordon discreto) y hemos estudiado su diagrama de fases frente a la variación del parámetro de discretitud desde el límite ultradiscreto hasta las cercanías de la versión continua del modelo, que es el Sine-Gordon. En nuestro estudio caracterizamos las sucesivas bifurcaciones que experimentan dichos breathers así como la existencia de soluciones móviles para determinados rangos del parámetro y mostraremos asimismo la coexistencia en algunos casos de soluciones estáticas y móviles de distintas propiedades.

También se presentan estudios preliminares sobre interacción entre diversos tipos de breathers, que demuestran la relevancia que tienen los modos normales (lineales y por tanto no localizados) de la red.

## 177 Potenciales *ratchet*, estructuras localizadas y redes no lineales

**Autor:** Juan José Mazo

**Afiliación:** Dpto. de Física de la Materia Condensada y Depto. de Teoría y simulación de sistemas complejos. Instituto de Ciencia de Materiales de Aragón (C.S.I.C) - Universidad de Zaragoza. C/Pedro Cerbuna 12, Zaragoza 50009

**E-mail:** [juanjo@posta.unizar.es](mailto:juanjo@posta.unizar.es)

**WWW:** <http://wzar.unizar.es/acad/fac/cie/cond-mat/T/juanjo.html>

**Colaboradores:** F. Falo (U. Zaragoza), T.P. Orlando (M.I.T.)

El desorden y el ruido no son siempre elementos indeseables en un sistema físico. Así, sabemos que la presencia de inhomogeneidades puede controlar ciertos tipos de caos temporal, y el ruido puede conducir a un incremento del cociente señal/ruido en un sistema debido al fenómeno de resonancia estocástica.

Otro resultado contra-intuitivo de reciente descubrimiento, es el transporte direccional de partículas brownianas en potenciales asimétricos (*ratchet*). En el inicio de su estudio, estos sistemas fueron propuestos como modelos biofísicos para el estudio de los mecanismos de transporte a nivel celular (los llamados *motores moleculares*); pero hoy en día son empleados en estudio de procesos disipativos y estocásticos en general a escala nanométrica.

Un potencial *ratchet* es un potencial periódico carente de simetría de reflexión (en 1D  $V(x) \neq V(-x)$ ). Una consecuencia de la ruptura de la simetría del potencial es la posible rectificación de fluctuaciones no térmicas (esto es, correlacionadas).

El fenómeno es fácil de comprender de manera intuitiva. La fuerza necesaria para mover una partícula de pozo a pozo en el potencial es menor en una dirección que en la otra. Así en la presencia de fuerzas alternas o ruido con correlaciones temporales, ocurre un flujo neto de partículas en la dirección de menos pendiente.

Este efecto puede usarse en dispositivos que busquen una selección en el movimiento de partículas. Así, se han propuesto *máquinas ratchet* como dispositivos de separación de fases, limpieza de fluxones en películas superconductoras o para evitar la formación de defectos en el crecimiento epitaxial de superficies.

Desde el panorama no lineal, una unión Josephson es un péndulo realizado en un dispositivo de estado sólido. Acoplando uniones se obtienen redes de péndulos acoplados y con ello realizaciones físicas de modelos tan interesantes como el modelo Frenkel-Kontorova (o sine-Gordon discreto) en una dimensión o el modelo XY en dos dimensiones. En particular, una red de uniones conectadas en paralelo corresponde a la realización del primero y hasta la fecha ha posibilitado realizar un estudio experimental de las propiedades dinámicas de *kinks* (o solitons discretos) en redes discretas.

En redes en paralelo los *kinks* se comportan como partículas en potenciales periódicos. Por ello en estas redes es posible estudiar las ideas de la rectificación de fluctuaciones. Si el *kink* experimenta un potencial asimétrico, su movimiento direccional estará favorecido.

Nosotros mostraremos como diseñar, casi a voluntad, potenciales usando redes de uniones Josephson en paralelo. En particular mostramos como conseguir potenciales asimétricos para el *kink*. Tales redes han sido fabricadas y medidas y los experimentos han confirmado las predicciones teóricas.

## 178 On the particular class of Heun's differential equation

**Autor:** José Mencía Bravo

**Afiliación:** Universidad Rovira i Virgili  
E.T.S.E.  
c/Paisos Catalans s/n  
Tarragona, 43007

**E-mail:** [jmencia@urv.es](mailto:jmencia@urv.es)

**Colaboradores:** Rafael Ramírez Inostroza (U. Rovira i Virgili), Natalia Sadovskaia (U. Politècnica de Catalunya)

We analyze Heun's classical equation

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \left( \frac{\delta}{z-a} + \frac{\epsilon}{z-1} + \frac{\gamma}{z} \right) \frac{dx}{dz} + \frac{\alpha\beta z - b}{z(z-1)(z-a)} x = 0$$

for the value of parameters  $\beta = 1 + \delta, b = \beta(\gamma - 1) + \alpha a$ . This case appears when we study the inverse Bertrand's problem on the construction of the potential field of force under which a particle has the family of conics as a trajectory.

Another applications of such Heun's equation we obtain when we study the particular case of Schrödinger's equation and the angular Teukolsky equation.

## 179 Dinámica espacio-temporal compleja inducida por las simetrías de reflexión y rotación en un problema de convección térmica

**Autor:** Marta Net Marcé

**Afiliación:** Universidad Politècnica de Catalunya  
Dpto. de Física Aplicada,  
c/ Jordi Girona Salgado s/n. Campus Nord. Mòdul B4  
Barcelona 08034

**E-mail:** [marta@fa.upc.es](mailto:marta@fa.upc.es)

**WWW:** [http://www-fa.upc.es/personals/fluids/marques/grup\\_fluids.html](http://www-fa.upc.es/personals/fluids/marques/grup_fluids.html)

**Colaboradores:** Juan Sánchez Umbría (U. Politècnica de Catalunya), Arantxa Alonso Maleta (U. Politècnica de Catalunya)

Mediante la simulación numérica de la convección térmica de un fluido Boussinesq de número de Prandtl bajo, contenido en un recipiente anular cilíndrico, y sometido a un gradiente de temperatura y gravedad radiales, se han obtenido nuevos flujos cuasiperiódicos bidimensionales consistentes en ondas moduladas que oscilan en dirección azimutal. El sistema de ecuaciones es  $O_2$  invariante, es decir es invariante bajo cualquier rotación de ángulo  $\theta$ ,  $R_\theta$ , y bajo reflexiones respecto a planos que pasen por el eje del anillo,  $R$ .

La interacción no lineal de soluciones estacionarias inestables conduce a la estabilización de soluciones que tienen un número de onda básico diferente al predicho por el análisis de estabilidad lineal del flujo básico. Bifurcaciones sucesivas de las nuevas soluciones estables, dan lugar a la aparición de una dinámica caótica complicada, para números de Rayleigh moderados ( $Ra \approx 10Ra_c$ ). A partir del valor del parámetro para el que se encuentra una solución caótica, coexisten familias de toros  $R$ -invariantes y  $R$ -conjugados que, posteriormente, dan lugar a soluciones consistentes en excursiones entre toros inestables del sistema. Todas estas soluciones se han obtenido utilizando dos códigos numéricos diferentes. Uno para la formulación velocidad-presión y otro, de cuarto orden en tiempo, para la formulación en términos de la función de corriente.

El estudio de la convección térmica bidimensional en un anillo tiene un triple interés. Bajo el punto de vista físico, se trata de un modelo barotrópico simple que permite estudiar la influencia de la curvatura en la selección de los modos dominantes que determinan la estructura del flujo. Bajo el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, se trata de un sistema lo suficientemente complejo para dar lugar a bifurcaciones y dinámicas espacio-temporales poco conocidas y analizadas, pero por tratarse de un problema bidimensional se puede abordar y explorar con suficiente profundidad. Finalmente, bajo un punto de vista puramente numérico, como sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no muy grande, debe permitir ensayar y adaptar métodos numéricos, ya existentes para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión baja, a sistemas de dimensión elevada provenientes de discretizar problemas tridimensionales.

## 180 New results on the Darbouxian theory of integrability for planar polynomial differential systems

**Autor:** Hara Pantazi

**Afiliación:** Universitat Autònoma de Barcelona  
 Departament de Matemàtiques,  
 08193 Bellaterra  
 Barcelona

**E-mail:** [hpant@mat.uab.es](mailto:hpant@mat.uab.es)

**Colaboradores:** Jaume Llibre (U. Autònoma de Barcelona)

In this communication we study the normal forms of polynomial differential systems having a set of given invariant algebraic curves, which force the Darbouxian integrability of the system. More precisely, we present the following result:

**THEOREM:** Let  $g = 0$  and  $f_i = 0$ , for  $i = 1, \dots, n$  be algebraic curves in  $\mathbb{C}^2$ . We denote by  $\delta f_i$  the degree of the invariant curves and let  $k = \max\{\sum_{i=1}^k r_i \delta f_i, \delta g\}$  for  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  and  $k = 1, \dots, n$ .

(a)  $\sum_{i=1}^n \delta f_i + k < m + 1$ . Then there are not vector fields  $(P, Q)$  of degree  $m$  with  $P$  and  $Q$  co-primes having a first integral of the form  $f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \exp(g/(f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}))$ .

(b)  $\sum_{i=1}^n \delta f_i + k = m + 1$ . Then, all polynomial systems  $(P, Q)$  of degree  $m$  with  $P$  and  $Q$  co-prime having the first integral  $f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \exp(g/(f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}))$  are of the form

$$P = \left( -\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{iy} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \right) \right) \prod_{i=1}^k f_i^{r_i} - \left( \prod_{i=1}^n f_i \right) g_y + \left( \sum_{i=1}^k r_i f_{iy} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \right) \right) g,$$

$$Q = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{ix} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \right) \right) \prod_{i=1}^k f_i^{r_i} + \left( \prod_{i=1}^n f_i \right) g_x - \left( \sum_{i=1}^k r_i f_{ix} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \right) \right) g.$$

(c)  $\sum_{i=1}^n \delta f_i + k > m + 1$ . Then, all polynomial systems  $(P, Q)$  of degree  $m$  with  $P$  and  $Q$  co-prime having the first integral  $f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \exp(g/(f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}))$  are of the previous form divided by a polynomial  $F$  of degree  $\sum_{i=1}^n \delta f_i + k - (m + 1)$ .

## 181 Aplicación de un modelo de difusión no lineal a la evaporación de un líquido volátil puro

**Autor:** María Isabel Parra Arévalo

**Afiliación:** Universidad de Extremadura  
Departamento de Matemáticas,  
Avenida de Elvas, sn  
Badajoz, 06071

**E-mail:** [mipa@unex.es](mailto:mipa@unex.es)

**Colaboradores:** Wojciech Okrański (U. of Zielona Gara), Francisco Cuadros Blázquez (U. de Extremadura), Benito Acedo Hidalgo (U. de Extremadura)

Para modelar la evaporación de un líquido volátil puro de un contenedor parcialmente abierto, a temperatura y presión constante, hemos de enfrentarnos a ciertos problemas relativos a la interfaz móvil líquido-vapor. La ecuación lineal de Fick, bajo ciertas condiciones iniciales de frontera, nos proporciona una descripción muy pobre del proceso real. Por ejemplo, la velocidad de propagación del vapor podría ser infinita. Este problema puede solucionarse asumiendo la existencia de una interfaz móvil entre las fases líquido y vapor, con lo cual habría que imponer ciertas condiciones adicionales a las soluciones (problema de difusión de Stefan). Recientemente, Slattery y Methar han utilizado esta formulación para obtener la interfaz móvil líquido-vapor. En este trabajo, presentamos un modelo no lineal que describe este mismo fenómeno, con la ventaja de que no es necesario imponer la existencia de una interfaz móvil, ya que ésta aparece de forma natural con la nueva descripción. La razón es que la velocidad de propagación del vapor es finita, lo que implica la existencia de la interfaz. Utilizando este modelo no lineal, hemos obtenido soluciones numéricas que determinan directamente la posición de la interfaz en cada instante, encontrando que son las mismas que las presentadas por Slattery y Methar.

## 182 Clasificación del flujo fásico para un sistema Hamiltoniano 2D en resonancia 1:3.

**Autor:** Ana Isabel Pascual Lería.

**Afiliación:** Universidad de La Rioja,  
Departamento de Matemáticas y Computación,  
Edificio Vives,  
Logroño, La Rioja, 26004.

**E-mail:** [aipasc@dmc.unirioja.es](mailto:aipasc@dmc.unirioja.es)

**Colaboradores:** Manuel Iñarrea Las Heras (U. La Rioja), Víctor Lanchares Barrasa (U. La Rioja), José Pablo Salas Ilarraza (U. La Rioja).

Numerosos sistemas hamiltonianos 2D presentan puntos de equilibrio lagrangianos, similares a los que aparecen en el problema restringido de tres cuerpos. Algunos ejemplos son el confinamiento de un ión mediante una trampa electrónica, la dinámica de una partícula de polvo orbitando un cuerpo bajo presión de radiación, la estabilidad de un satélite geostacionario o el comportamiento de una partícula que orbita alrededor de un objeto alargado. Para estos problemas resulta de especial interés el estudio de la estabilidad de los puntos lagrangianos, no sólo en el sentido lineal, sino en el sentido de Lyapunov y en algunos casos, como en el de los asteroides troyanos, en el sentido de Nekhoroshev.

Para el estudio de la estabilidad, cuando la parte cuadrática asociada al equilibrio es no definida, es preciso expresar el hamiltoniano en forma normal de Birkhoff en un entorno del punto crítico. Cuando no existen resonancias entre las frecuencias fundamentales es posible determinar la estabilidad mediante el teorema de Arnold, mientras que cuando hay resonancias deben aplicarse otros resultados como los de Markeev para resonancias de orden 3 ó 4 o los de Cabral & Meyer para una resonancia cualquiera. Este último resultado, que generaliza los anteriores, tiene una interpretación geométrica muy interesante si se tiene en cuenta la estructura del espacio de fases, después de realizar la transformación canónica que nos conduce a la forma normal de Birkhoff. En este sentido, la estructura del flujo fásico para el sistema en forma normal proporciona información relevante sobre el comportamiento del sistema original, no sólo en lo referente a la estabilidad, sino en cuanto a la presencia de familias de órbitas periódicas y bifurcaciones entre las mismas. Es por ello que resulta de gran interés el disponer de una clasificación del flujo fásico en términos de los parámetros libres del sistema.

Aquí nos centramos en el estudio de la resonancia 1:3 para un hamiltoniano en forma normal hasta orden 4. Tras la aplicación de diversos resultados algebraicos, damos la clasificación del flujo en términos de los dos parámetros relevantes del sistema.

## 183 Formas de la naturaleza encontradas en mapas no lineales

**Autor:** Gerardo Pastor Dégano

**Afiliación:** Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
Instituto de Física Aplicada,  
c/Serrano, 144  
Madrid, 28006

**E-mail:** [gerardo@iec.csic.es](mailto:gerardo@iec.csic.es)

**WWW:** <http://www.iec.csic.es/gerardo>

**Colaboradores:** Miguel Romera García (CSIC), Gonzalo Álvarez Marañón (CSIC), Fausto Montoya Vitini (CSIC)

En nuestros trabajos de física no lineal hemos tenido que desarrollar potentes herramientas gráficas. Con ellas hemos explorado el apasionante mundo del caos hasta los límites que nos era permitido por los ordenadores. Con frecuencia nos hemos topado con figuras de una belleza plástica extraordinaria. Pero a veces hemos podido contemplar formas singulares que, además de bellas, parecían un fiel reflejo de las que nos brinda a diario la naturaleza. Aquí mostramos algunos de los casos más representativos.

Para empezar, veamos la computación gráfica de un mapa complejo exponencial dependiente de un parámetro. Tanto el conjunto tipo Mandelbrot como los conjuntos de Julia de una familia de estos mapas exponenciales complejos, tienen la propiedad de crecer con el número de iteraciones que escogemos. Mostraremos algunos ejemplos gráficos que evocan la imagen de un jardín en sus diversas etapas de crecimiento. A continuación mostramos que en la familia de los mapas de Henon, para algunos valores particulares de los parámetros, la órbita de un segmento inicial tiene forma de caracol, que está relacionada con la forma de estrella de mar de la órbita de un punto inicial para los mismos valores del parámetro. Terminaremos mostrando una rica variedad de formas de la naturaleza en el conjunto de Mandelbrot.

## 184 Estudio analítico de la propagación de pulsos en guías no lineales con pérdida y ganancia

**Autor:** María Jesús Paz Alonso

**Afiliación:** Universidade de Vigo  
Facultade de Ciencias,  
As Lagoas s/n Ourense 32004

**E-mail:** [mpa@uvigo.es](mailto:mpa@uvigo.es)

**Colaboradores:** Humberto Michinel Álvarez

En el presente trabajo se estudia analítica y numéricamente la propagación de pulsos de luz laser que se propagan en fibras ópticas que presentan distintos tipos de pérdidas y ganancias tanto lineales como no lineales.

Se han considerado guías con no linealidad tipo Kerr focalizante y pérdidas lineales y no lineales. En particular, se ha estudiado la existencia de soluciones estacionarias que se obtienen si las pérdidas no lineales son equilibradas con una ganancia lineal. En este caso se obtiene un nuevo tipo de soluciones estacionarias cuya estabilidad depende de la magnitud de las pérdidas del sistema.

El método analítico empleado permite caracterizar el rango de parámetros en el que se encuentran las soluciones estacionarias, así como estudiar la dinámica de sus pequeñas oscilaciones. La comparación con simulaciones directas de la ecuación de ondas (tipo no lineal de Schrödinger generalizada) demuestra la validez del método empleado.

## 185 Correlaciones espaciales en un medio Kerr con haces contrapropagantes

**Autor:** Isabel Pérez Arjona

**Afiliación:** Universitat de Valencia  
Departament d'Òptica  
c/Dr.Moliner,50  
46100, Burjassot (Valencia)

**E-mail:** [isabel.perez-arjona@uv.es](mailto:isabel.perez-arjona@uv.es)

**Colaboradores:** Alessandra Gatti (Università degli Studi dell'Insubria, Como, Italia)

Los procesos de interacción no lineal de ondas permiten que se generen patrones espaciales en la sección transversal de haces de luz de forma espontánea cuando el medio es bombeado por un campo externo. Aunque menos conocido, es igualmente fascinante el hecho de que existan correlaciones espaciales cuánticas en dicha sección transversal, subyacentes al proceso clásico de formación de patrones. Entre las distintas estructuras espaciales que se generan de forma espontánea una de las más comunes es el patrón hexagonal, cuya formación ha sido predicha en medios no lineales de tipo Kerr en distintas configuraciones. En particular, se trata la configuración relativa a ondas contrapropagantes interactuando en un medio Kerr sin cavidad, aunque también se han predicho patrones hexagonales en otros tipos de configuraciones. En nuestro sistema se propagan dos haces en el interior del medio Kerr con sentidos opuestos. Inicialmente la solución estacionaria corresponde a haces que se propagan como ondas planas de amplitud constante en el plano transversal. Sin embargo, cuando se aumenta la intensidad incidente sobre el medio no lineal por encima de un cierto valor umbral las ondas planas se desestabilizan generando patrones hexagonales. En este trabajo se estudian las distintas correlaciones cuánticas existentes entre los dos campos contrapropagantes y sus complejos conjugados. El estudio muestra los resultados tanto analíticos como numéricos, obtenidos de dichas correlaciones a la salida del medio para valores de la intensidad por debajo del umbral de formación de hexágonos. La cuadratura de los campos a la salida del medio,  $X(\varphi)$  con  $X(\varphi) = \frac{1}{2}[(F(k) + B(k) - F(-k) - B(-k))e^{-i\varphi} + (F^\dagger(k) + B^\dagger(k) - F^\dagger(-k) - B^\dagger(-k))e^{i\varphi}]$  -donde  $F, B$  representan las amplitudes de los campos contrapropagantes y  $k$  el vector de ondas transversal-, presenta "squeezing" (o reducción de ruido cuántico) en función del ángulo de cuadratura  $\varphi$ . Por lo tanto, será de especial interés estudiar cómo varía el espectro de ruido de  $X(\varphi)$  a medida que varía el ángulo de cuadratura, así como ver cuál es su dependencia con la distancia al valor umbral de la intensidad, que son los resultados que se presentan en este trabajo.

## 186 Control del flujo de un fluido tras un cilindro oscilante

**Autor:** Ines Pérez Mariño

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos,  
Departamento de Ciencias Experimentales e Ingeniería  
Universidad Rey Juan Carlos  
c/Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid

**E-mail:** [iperez@escet.urjc.es](mailto:iperez@escet.urjc.es)

**Colaboradores:** Juan Carlos Vallejo (U. Rey Juan Carlos), Miguel A. F. Sanjuán (U. Rey Juan Carlos)

El problema del transporte de partículas tiene un gran interés tanto en el campo de la dinámica de fluidos como en el de la física del plasma. Cuando las partículas son advectadas por un flujo su movimiento puede ser complicado incluso aunque éstas se consideren trazadores pasivos, es decir, partículas que no modifican dicho flujo. En particular, estamos interesados en el estudio de la dinámica de trazadores pasivos en un flujo hidrodinámico bidimensional incompresible en el que se encuentra situado un obstáculo cilíndrico. A pesar de que el estudio de un flujo hidrodinámico a su paso por un cilindro es una configuración geométrica muy sencilla que se lleva analizando desde hace más de cien años, sigue estando hoy en día sometida a una intensiva investigación. Enfocaremos el problema desde el punto de vista de la dinámica Lagrangiana, recurriendo así al uso de una función de corriente a partir de la cual se deducen las componentes del campo de velocidades. Este enfoque permite caracterizar el transporte de partículas pasivas de un modo más sencillo que resolviendo directamente las ecuaciones de Navier-Stokes. En particular, usaremos como modelo analítico de la función de corriente el presentado por Péntek *et al* en CHAOS 3, 555 (1993). Dicho modelo contiene todas las características cualitativas del flujo de interés, en el cual lo más destacado es la aparición de vórtices detrás del cilindro, que originan una dinámica compleja en la trayectoria de las partículas.

Nuestro principal interés es reducir de algún modo la complejidad de las trayectorias de los trazadores pasivos. Para ello consideraremos el obstáculo cilíndrico en movimiento. Concretamente, analizaremos el comportamiento del sistema al considerar el cilindro vibrando armónicamente en una dirección, así como en rotación permanente alrededor de su eje.

## 187 Transitividad, órbitas densas y funciones discontinuas

**Autor:** Alfred Peris Manguillot

**Afiliación:** Universitat Politècnica de València

E.T.S. Arquitectura

D. Matemática Aplicada

46022 València

**E-mail:** [aperis@mat.upv.es](mailto:aperis@mat.upv.es)

Uno de los ingredientes principales en cualquier noción topológica de caos en sistemas dinámicos discretos es la *transitividad*. Una aplicación  $f : M \rightarrow M$  en un espacio métrico  $M$  es transitiva si para todo par de abiertos  $U, V \subset M$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Para espacios métricos completos y separables  $M$  y aplicaciones continuas  $f$ , la transitividad implica la existencia de órbitas densas, es decir, de  $x \in M$  tales que el conjunto

$$\text{Orb}(f, x) := \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$$

es denso en  $M$ .

Nosotros probamos que este resultado se generaliza para aplicaciones  $f$  con un punto de discontinuidad a lo sumo, de lo cual existen ejemplos naturales como la aplicación de Baker  $B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $B(x) := 2x$  si  $x \in [0, 1/2[$ ,  $B(x) := 2x - 1$  si  $x \in [1/2, 1]$ .

Este resultado, sin embargo, no es cierto en general cuando  $f$  tiene más de un punto de discontinuidad. Presentamos también un ejemplo de una función  $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$  con dos puntos de discontinuidad que es transitiva, pero que no admite ninguna órbita densa. Esta función se construye a partir de la función tienda  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $T(x) := 2x$  si  $x \in [0, 1/2[$ ,  $T(x) := 2 - 2x$  si  $x \in [1/2, 1]$ . Concretamente, nuestro ejemplo  $f$  viene definido por  $f(x) := T(x)$  si  $x \in [0, 1[$ ,  $f(x) := 1 + T(x - 1)$  si  $x \in ]1, 2[$ ,  $T(1) := y_0$ ,  $T(2) := y_1$ , seleccionando el valor  $y_1 \in ]0, 1[$  de forma que su órbita sea densa en  $[0, 1]$  mediante la función tienda  $T$ , y tomando  $y_0 := y_1 + 1$ .

[ 1 ] A. Peris, Transitivity, dense orbit and discontinuous functions, Bull. Belgian Math. Soc. **6** (1999), 391-394.

## 188 Fractional Reflection Principle

**Autor:** Teresa Pierantozzi

**Afiliación:** Universidad Complutense  
Departamento de Matemática Aplicada,  
Madrid, E-28040, Spain

**E-mail:** [Teresa.Pierantozzi@Mat.UCM.Es](mailto:Teresa.Pierantozzi@Mat.UCM.Es)

In its original form, standard diffusion equation is given by the following linear partial differential equation,

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$$

with  $x \in R$ ,  $t > 0$ . Now, following the Langevin approach, we can obtain for it an equivalent and alternative determination putting a Gaussian stable source in the stochastic “equation of motion” for the dynamic variable. This assumption is physically motivated by the fact that the random source is a sum of large number of independent identical (i.i.d.) random “pulses”. If these quantities possess a finite variance, then, according to the Central Limit Theorem, the distribution of their sum tends to the normal law when the number of the pulses go to infinity. However the Central Limit Theorem can be generalized and so also the stochastic equation of motion. Indeed, Lévy stable laws [1] correspond to the limit of normalized sums of i.i.d. random variables having no finite variance, and one expects that with this stable forcing in the stochastic equation for the dynamic random variables, the cloud of particles will spread much faster (for large times  $t \gg 1$ ) than for a Brownian motion. In order to encompass this Lévy anomalous diffusion, one of the possible generalizations for the Fokker-Plank equation consists in considering a fractional diffusion equation, this is, in replacing the first time derivative or the second space derivative by a derivative of real order [2]. In this paper we are concerned with this particular fractional integro-differential equation

$$u(t, x) = \phi(x) + \frac{t^{\alpha/2}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \psi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta u(s, x) ds$$

for  $1 \leq \alpha \leq 2$ ,  $t > 0$ ,  $x \in R$ , that interpolates, in same way, the heat (for  $\psi = 0$ ,  $\alpha = 1$ ) and the wave equation (for  $\alpha = 2$ ). The stochastic formulation of its solution [3] has the following expression

$$u(t, x) = \frac{1}{2} E[\phi(x + Y_\alpha(t)) + \phi(x - Y_\alpha(t))] + \frac{1}{2} E\left[ \int_{(x-Y_\alpha(t))}^{(x+Y_\alpha(t))} \psi(y) dy \right]$$

and involves a class of processes  $Y_\alpha(t)$  defined as the maximum processes of particular Lévy stable processes  $X_\alpha(t)$  called *spectrally negative*. We derive the exact distributions of  $Y_\alpha(t)$  and consequently of first-passage time processes  $Z_\alpha(t)$ . But the main result is the generalization of the validity of the well-known reflection principle holding for a Brownian motion [4], corresponding to  $X_1(t)$  in the above class, to all the Lévy stable processes considered. Indeed, if in the classical case we have a kind of symmetry in the brownian path due to the complete lack of memory of the process, now the evolution of these Lévy processes is everywhere depending on the past in a way dictated by the fractional index of stability.

[1] “Stable distributions and their characteristic functions”, Lukacs, E., . Jahreshbericht DMV, vol. **71**, pp. 84-114, Washington (1969).

[2] “Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications”, Samko, S. G., Kilbas, A.A. and Marichev, O. I., (translated from the Russian). Amsterdam: Gordon and Breach (1993).

[3] “Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation”, Fujita, Y., Osaka J. Math., **27**, pp.797-804 (1990).

[4] “Elementi per il corso di calcolo delle probabilità II”, Orsingher, E., CISU (1997).

## 189 Estudio de las vibraciones en estructuras arquitectónicas sencillas

**Autor:** Francisco Prieto Castrillo

**Afiliación:** Laboratorio Nacional de Engenharia Civil,  
LNEC,  
Lisboa, Portugal

**Colaboradores:** F. Borondo (U. Autónoma de Madrid), R.M. Benito (U. Politécnica de Madrid)

La protección del patrimonio artístico en países con actividad sísmica importante es un problema de interés creciente. A este respecto baste recordar los efectos devastadores en la ciudad de Asis y alrededores de los últimos episodios sísmicos en Italia, o recalcar el hecho de la gran inestabilidad intrínseca que presentan las estructuras del gótico inglés.

Las técnicas de programación lineal aplicadas a arcos de construcción formados por bloques rígidos sujetos por la fricción permiten estimar la carga y mecanismo de colapso, pero no aportan información sobre la dinámica del proceso (frecuencias, resonancias, etc.), que es inherentemente no lineal debido al carácter discontinuo (piecewise) de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

Nosotros hemos estudiado la dinámica de un sistema plano de bloques conectados por articulaciones fijas (que elimina el deslizamiento) utilizando superficies de sección de Poincaré, de forma que podamos conocer los rangos de los valores de los parámetros que conducen a vibraciones caóticas.

## 190 Routes to chaos in confined flow systems

**Autor:** Xavier Ruiz Martí

**Afiliación:** Universitat Rovira i Virgili (URV)  
Facultat de Química. Física Aplicada  
Imperial Tarraco 1  
Tarragona, 43002

**E-mail:** [xmarti@hotmail.com](mailto:xmarti@hotmail.com)

**Colaboradores:** Xavier Martí Rovirosa (Universitat de Barcelona), Jaume Casademunt (Universitat de Barcelona), Laureano Ramírez-Piscina (Universitat Politècnica de Catalunya), Isabel Mercader (Universitat Politècnica de Catalunya), Oriol Batiste (Universitat Politècnica de Catalunya)

We have studied flow instabilities in lateral heated cavities under reduced gravity in conditions which are relevant to actual semiconductor single crystal growth experiments. Numerical results have been obtained using two independent approaches. The first one is based on direct integration of the equations in primitive variables using finite-volume techniques and structured meshes. The second numerical integration is based on a pseudospectral method. In the perfectly conducting case the basic sequence observed for increasing Rayleigh number consists of a supercritical Hopf bifurcation of the basic single-vortex state followed by a subharmonic or period-doubling route to chaos. For even larger Rayleigh numbers, the behavior may exhibit windows of complex periodic behaviour and successive chaotic regimes again.

## 191 Problema 16 de Hilbert para ciclos límite algebraicos

**Autor:** Natalia Sadovskaia

**Afiliación:** Universidad Politécnica de Catalunya  
Facultad de Informática de Barcelona  
c/Pau Gargallo 5  
Barcelona, 08028

**E-mail:** [natalia@ma2.upc.es](mailto:natalia@ma2.upc.es)

**Colaboradores:** Rafael Ramírez Inostroza (U. Rovira i Virgili)

Se prueba que, para campos polinomiales de grado  $n > 2$  con  $s > 2$  curvas algebraicas invariantes de grado mayor que 1, la cantidad máxima de ciclos límite algebraicos es  $n - 1$ .

## 192 Transiciones de fase de no equilibrio en redes small-world dirigidas

**Autor:** Alejandro Daniel Sánchez Lepera

**Afiliación:** Instituto de Física de Cantabria, CSIC-UC, Av. de los Castros S/N  
39005 Santander

**E-mail:** [asanchez@ifca.unica.es](mailto:asanchez@ifca.unica.es)

**WWW:** <http://www.ifca.unican.es/~fises>

**Colaboradores:** J. M. López y M. A. Rodríguez

Las redes small-world surgen al reemplazar aleatoriamente un porcentaje de enlaces en una red normal por enlaces de largo alcance. El comportamiento de varios modelos en redes small-world ha sido estudiado recientemente. Se espera que estos modelos reproduzcan las características esenciales de los procesos que tienen lugar en las redes reales, tales como la dispersión de enfermedades, la formación de opinión pública, la distribución de riquezas, etc. En muchos de estos sistemas las relaciones son dirigidas, en el sentido de que actúan solo en una dirección. Nosotros investigamos el efecto de los enlaces dirigidos en el comportamiento de un modelo de espines en una red small-world. El hecho de que la red sea dirigida da lugar a un diagrama de fases muy rico, en el que existen transiciones de fase de primer (discontinuas) y segundo orden (continuas) de no equilibrio. Por lo tanto, a la hora de modelar sistemas reales, puede ser importante tener en cuenta el carácter dirigido o no dirigido de la red subyacente.

## 193 Aplicación eficiente de técnicas de continuación y análisis de bifurcaciones en problemas de Mecánica de Fluidos.

**Autor:** Juan Sánchez Umbría

**Afiliación:** Universitat Politècnica de Catalunya,  
Dept. Física Aplicada, Campus Nord UPC, Módulo B4,  
Jordi Girona Salgado 1-3,  
Barcelona 08034

**E-mail:** [sanchez@fa.upc.es](mailto:sanchez@fa.upc.es)

**WWW:** [http://www-fa.upc.es/personals/fluids/marques/grup\\_fluids.html](http://www-fa.upc.es/personals/fluids/marques/grup_fluids.html)

**Colaboradores:** F. Marqués (Univ. Politècnica de Catalunya), J. López (Arizona State Univ.)

Se presenta una aplicación de las técnicas de continuación y análisis de estabilidad de soluciones estacionarias a un problema de Mecánica de Fluidos. Se estudian las soluciones axisimétricas de las ecuaciones de Navier-Stokes en un recinto cilíndrico cuyas paredes pueden moverse diferencialmente (*vortex breakdown problem*). Los métodos propuestos son aplicables a cualquier ecuación en derivadas parciales disipativa por lo que son también de interés en problemas, por ejemplo, de reacción-difusión no lineales. Por ello se hará hincapié en los métodos numéricos empleados y en su eficiencia. En particular se mostrará como una adecuada implementación de los métodos modernos del álgebra lineal numérica (métodos de Krylov, GMRES, etc.) permite optimizar tanto las necesidades de almacenamiento como los tiempos de cálculo. Para el caso concreto del problema estudiado se mostrarán además algunos resultados obtenidos con estas técnicas: superficies cuspidales de soluciones, comparación entre funciones propias y evolución temporal, etc.

## 194 Biestabilidad dinámica en la propagación de frentes

**Autor:** Miguel Angel Santos Lopez

**Afiliación:** Universidad Rovira i Virgili  
E.T.S.E.  
Av. Països Catalans, 26  
Tarragona, 43007.

**E-mail:** [msantos@etse.urv.es](mailto:msantos@etse.urv.es)

**WWW:** <http://noise.ecm.ub.es>

**Colaboradores:** J. M. Sancho (U. Barcelona), Ch. Zülicke and L. Schimansky-Geier (Humboldt Universität zu Berlin)

Estudiamos la propagación de frentes inducida por ruido en un sistema biestable del tipo activador-inhibidor. Al variar la intensidad del ruido multiplicativo, la velocidad del frente presenta una transición a un régimen biestable, en el que la velocidad y dirección de propagación dependen fundamentalmente de las condiciones iniciales (aleatorias). El inhibidor está acoplado al activador mediante un término estocástico que representa la influencia de un ruido externo. Sin ruido, el inhibidor se ajusta a la condición de contorno dada y el activador desarrolla un frente con una única velocidad. Al conectar el ruido, se genera un frente en ambas componentes y la velocidad tiene tres soluciones estacionarias, siendo una de ellas inestable. A este fenómeno le llamamos biestabilidad dinámica inducida por ruido. Desde un punto de vista más general, el inhibidor actúa como un ruido externo estructurado. Se sugiere que el fenómeno puede ser más general y que fuentes de ruido adecuadas puedan generar una biestabilidad dinámica.

## 195 Caos en trayectorias bohmianas

**Autor:** Ángel S. Sanz

**Afiliación:** Universidad Autónoma de Madrid, Departamento de Química, C-IX,  
Cantoblanco, E-28049, Madrid

**E-mail:** [angel.sanz@uam.es](mailto:angel.sanz@uam.es)

**Colaboradores:** F. Borondo (U. Autónoma de Madrid)

Aunque la mecánica cuántica explica un amplio e importante espectro de fenómenos naturales, todavía plantea problemas en términos interpretativos. Este es el caso del denominado *caos cuántico*, donde no existe un consenso general claro sobre su existencia, significado y naturaleza [1,2]. En gran medida esto procede de la linealidad de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, así como del carácter estadístico de la interpretación de la función de onda, que sólo permite conocer propiedades de conjuntos de partículas, a diferencia de lo que sucede en mecánica clásica, donde las partículas son independientes. Los estudios realizados hasta el momento, basados en la mecánica cuántica estándar (o en su versión semiclásica), muestran ciertas peculiaridades en las distribuciones de autovalores, o comportamientos particulares de la función de onda, correlacionados en cierto modo con alguna propiedad análoga del sistema clásico. Sin embargo, estos resultados distan bastante de ofrecer una visión cuántica dinámicamente equivalente a la clásica, caracterizada por su sistematicidad a la hora de clasificar los fenómenos caóticos mediante distintos indicadores (superficies de sección de Poincaré, exponentes de Lyapunov, ...).

El objetivo de esta comunicación es replantear el problema del caos cuántico desde el punto de vista de la *teoría causal del movimiento* propuesta por Bohm [3], donde el formalismo probabilístico de la mecánica cuántica estándar se traduce en otro totalmente causal mediante la introducción del concepto de *trayectoria cuántica*. Estas trayectorias, con posiciones y momentos bien definidas en cada instante como las clásicas, se obtienen a partir de una reformulación de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, y su introducción sí que permite intentar utilizar unos indicadores del caos, que pueden ser los clásicos u otros.

Las trayectorias cuánticas presentan una importante propiedad, y es que a diferencia de las clásicas evolucionan de acuerdo a un potencial no local de origen puramente cuántico [4,5]. La aparición del *potencial cuántico* tiene dos importantes consecuencias que debemos tener en cuenta a la hora de considerar la presencia de caos. Por una parte, su carácter no local implica que toda trayectoria perteneciente a un mismo conjunto inicial mantendrá para cada instante cierta correlación con el resto. Por otra parte, la no linealidad en las ecuaciones de movimiento de las partículas cuánticas se deriva, en principio, de la complejidad del potencial cuántico, mientras que en el caso clásico potenciales muy simples, como por ejemplo, el billar de Sinai, dan lugar a fenómenos caóticos.

En nuestra comunicación analizamos la correspondencia entre mecánica clásica y cuántica a partir de la perspectiva causal subyacente a la teoría de Bohm, teniendo en cuenta los puntos anteriores. Aunque se han dado criterios para la existencia de caos bohmiano en diferentes sistemas, esta cuestión todavía permanece abierta. Aquí se intenta clarificar este tema calculando no sólo exponentes de Lyapunov, sino también aportando comparaciones entre conjuntos de trayectorias clásicas y cuánticas para discernir si este comportamiento puede ser realmente denominado como caótico en el caso cuántico. El sistema modelo que hemos considerado para este fin es el potencial bidimensional cuártico,  $V(x, y) = 0.5x^2y^2$ , cuyo comportamiento clásico es totalmente ergódico.

[1] Gutzwiller M C 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag).

[2] Reichl L E 1992 *The Transition to Chaos* (Springer-Verlag: New York).

[3] Holland P R 1993 *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge University Press).

[4] Sanz A S, Borondo F and Miret-Artés S 2000 *Phys. Rev. B* **61** 7743.

[5] Sanz A S, Borondo F and Miret-Artés S 2001 *Europhys. Lett.* **55** 303.

**196 Wave train propagation in an unexcitable channel improved by noise.****Autor:** Irene Sendiña Nadal**Afiliación:** Universidad Rey Juan Carlos  
E.S.C.E.T,  
c/Tulipán s/n  
Móstoles, 28933**E-mail:** [isendina@escet.urjc.es](mailto:isendina@escet.urjc.es)**Colaboradores:** Vicente Pérez Muñuzuri (U. Santiago de Compostela)

The influence of spatio-temporal colored noise on wave train propagation in non-excitable media is investigated. This study has been performed within the framework of the Oregonator model, a reaction-diffusion system, in terms of the characteristic noise parameters (Sendiña-Nadal & Pérez-Muñuzuri 2001). Some features seen in single front propagation, like noise induced propagation and facilitation for an optimal level of the noise intensity (Kádár et al.,1998) are also found for periodic wave trains. The main new effect is, however, an enhancement of propagation for correlation times of the noise of the order of the period of the wave train. Globally, the introduction of noise extends the propagation length. This is in agreement with other studies in noisy overdamped bistable oscillators (Lindner et al., 1998, García-Ojalvo et al., 2000) where the interplay among noise, nonlinearity and forcing gives rise to an enhancement of propagation.

[ 1] I. Sendiña-Nadal I., and V. Pérez-Muñuzuri *Int. J. of Bif. and Chaos* 11, 2837-2843 (2001).

[ 2] S. Kádár, J. Wang, and K. Showalter, "Noise-supported travelling waves in sub-excitable media", *Nature* 391, 770-772 (1998)

[ 3] J.F. Lindner, S. Chandramouli, A.R. Bulsara, M. Löcher, and W. L. Ditto, "Noise enhanced propagation", *Phys. Rev. Lett.* 81, 5048-5051 (1998)

[ 4] García-Ojalvo, J., Lacasta, A.M., Sagués, F., and Sancho, J.M. "Noise-sustained signal propagation", *Europhys. Lett.* 50, 427-433 (2000)

## 197 Dinámica de solitones ópticos de cavidad a dos fotones en medios activos

**Autor:** Carles Serrat

**Afiliación:** Departament de Física i Enginyeria Nuclear  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Colom 1, E-08222 Terrassa

**E-mail:** [carles.serrat-jurado@upc.es](mailto:carles.serrat-jurado@upc.es)

**WWW:** <http://segre.upc.es>

**Colaboradores:** M. C. Torrent, J. García-Ojalvo, R. Vilaseca

La formación de solitones espaciales en sistemas ópticos disipativos ("solitones de cavidad") es un tema de mucha actividad en los últimos años. Hasta hace muy poco, dichas estructuras localizadas sólo se habían observado en sistemas que contienen un medio pasivo. Recientemente se han predicho también en sistemas que contienen un medio puramente activo, concretamente en un láser con capacidad de emisión a dos fotones (R. Vilaseca *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 083902 (2001)). Los solitones de cavidad que se forman en dicho tipo de sistema gozan de algunas propiedades distintivas con respecto a aquellos que se forman en otros sistemas, en particular en cavidades pasivas alimentadas mediante un haz de luz introducido desde el exterior. La fase de los solitones puede evolucionar libremente, y además se observa la formación de ondas propagantes que emanan del solitón en dirección radial. Todo ello lleva a una dinámica de dichos solitones distinta a la habitual.

En este trabajo estudiamos la formación de solitones de cavidad en dicho sistema láser y la dinámica de los mismos en cuanto a su creación, aniquilación, movimiento e interacción mutua. En particular, examinamos las posibilidades de creación y aniquilación de solitones mediante haces inyectados en la cavidad desde el exterior o por medio de distintas distribuciones espaciales en la intensidad del bombeo. Indagamos las posibilidades de fijación de los solitones usando perfiles no homogéneos tanto de inyección como de bombeo, y observamos su movimiento respecto a gradientes de intensidad. También, investigamos la interacción entre los solitones, en función de distintos parámetros, y las posibilidades de su estabilización.

## 198 Respuesta de un láser de anillo de fibra dopada con erbio a un bombeo modulado sinusoidalmente

**Autor:** Íñigo Juan Sola Larrañaga

**Afiliación:** Universidad de Zaragoza  
Departamento de Física Aplicada,  
c/Pedro Cerbuna, 12  
Zaragoza, 50009

**E-mail:** [190046@docto.unizar.es](mailto:190046@docto.unizar.es)

**Colaboradores:** Juan Carlos Martín Alonso, José Miguel Álvarez Abenia

Se ha analizado, tanto experimental como teóricamente, la respuesta de un láser de anillo de fibra dopada con erbio cuya potencia de bombeo sigue un perfil sinusoidal,  $A(t) = A_0(1 + m\cos(2\pi f_e t))$ . En particular, el estudio se ha centrado en la evolución de la amplitud láser cuando, manteniendo constante el índice de modulación ( $m$ ), se varía la frecuencia de excitación ( $f_e$ ) desde 1 kHz hasta 80 kHz, bien en sentido ascendente o descendente.

Experimentalmente, analizando la amplitud de la respuesta para índices de modulación bajos ( $m < 0.05$ ) se observa la aparición de un pico de amplitud en la frecuencia natural del sistema (ésta puede determinarse experimentalmente con facilidad a partir de la oscilación amortiguada que experimenta la señal láser al interrumpir o restablecer una potencia de bombeo constante). Conforme se incrementa el índice de modulación, se puede observar la aparición de una región biestable en el rango de frecuencias en torno a la natural. Si se aumenta  $m$  hasta valores cercanos a 0.20, aparecen más resonancias y regiones biestables en torno a frecuencias múltiplos o submúltiplos de la natural. El análisis de Fourier de las señales obtenidas en estas regiones permite observar cómo sus correspondientes subarmónicos o armónicos resultan especialmente potenciados cuando sus frecuencias se aproximan a la natural del sistema.

El número de regiones biestables crece a medida que  $m$  se incrementa, observándose en ellas respuestas cuyo espectro de Fourier presenta cada vez mayor riqueza armónica. Finalmente, para valores de  $m$  superiores a 0.65, se observa en el rango 1-20 kHz un comportamiento todavía más complejo, tendiendo incluso hacia una fenomenología caótica. A su vez, se observa la aparición de nuevas biestabilidades del sistema para  $f_e > 50\text{kHz}$ .

Todo este variado comportamiento ha sido reproducido teóricamente mediante un modelo basado por un lado en el tratamiento comúnmente aplicado a fibras dopadas con erbio y por otro en la teoría semiclásica del láser. Dicho modelo describe tanto la evolución temporal de la población del nivel superior de la transición láser como la evolución temporal de la potencia láser, mediante un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas. Es de destacar que en este sistema la longitud del medio activo es de varios metros. Por ello, a diferencia de otras configuraciones láser en las que resulta válido un tratamiento basado en potencias y poblaciones promediadas longitudinalmente, en este caso ha sido necesario introducir en el modelo la variación longitudinal de las magnitudes del sistema. Ello complica la resolución de sus ecuaciones pero ha resultado imprescindible para conseguir una buena concordancia teoría-experimento.

## 199 Distribución de los exponentes de Lyapunov para las funciones Bungalow

**Autor:** Antonio Tintero Lora

**Afiliación:** Universidad de Castilla-La Mancha

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Albacete,

c/Campus Universitario s/n

Albacete, 02006

**E-mail:** [atlora@agr-ab.uclm.es](mailto:atlora@agr-ab.uclm.es)

**Colaboradores:** Francisco Balibrea (U. de Murcia)

Las funciones continuas del intervalo  $[0, 1]$  en él mismo monótonas a trozos, son muy interesantes desde el punto de vista de la dinámica, por la complicación que pueden tener. Además aparecen con mucha frecuencia cuando se trata de modelar fenómenos de la Dinámica de Poblaciones, de la Física, la Teoría Económica y la Ingeniería. En algunas ocasiones, para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos que son caóticos, se utilizan este tipo de funciones como prototipo.

Una de las herramientas clásicas que se utilizan para analizar la complicación dinámica de las órbitas de estos sistemas, son los exponentes de Lyapunov, que miden la dependencia que existe entre las variaciones en el comportamiento futuro del sistema y pequeños cambios en las condiciones iniciales del mismo.

En la presente comunicación estudiamos el comportamiento de la familia biparamétrica de funciones  $f_{a,b}$ , conocidas como funciones *bungalow* y que están definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{1-a} & 0 \leq x < 1-a \\ \frac{(1-b)x}{a-1/2} + \frac{2a-2+b}{2a-1} & 1-a \leq x \leq 0,5 \\ \frac{(b-1)x}{a-1/2} + \frac{2a-b}{2a-1} & 0,5 < x < a \\ \frac{b(1-x)}{1-a} & a \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Con  $0,5 < x < a$  y  $b \in (1/2, 1]$

Obtenemos los siguientes resultados:

**Teorema 1.-** Para la función *bungalow* definida en (1), se cumple que  $\lambda_{f_{a,b}} > 0$  y  $\lambda_{f_{a,b}} = \frac{r \log r + (1-r) \log(1-r)}{r-2}$  donde  $r = \frac{1-a}{b}$ .

**Teorema 2.-** El exponente de Lyapunov  $\lambda_k(x(0))$  de la familia (1), computadas para un número finito de observaciones, para  $x(0) \in (0, 1)$  y para cada  $k = 1, 2, \dots$  tiene de media:  $E\{\lambda_k\} = \frac{r \log r + (1-r) \log(1-r)}{r-2}$  donde  $r = \frac{1-a}{b}$ , y varianza:  $Var\{\lambda_k\} = \frac{r(1-r)}{k(2-r)} [\log r - \log(1-r)]^2$

Además si  $a = b = 0,5$  entonces es  $\lambda_k = \log 2$  y  $Var\{\lambda_k\} = 0$

Si  $a \neq b \neq 0,5$ , entonces  $D\left\{\frac{\lambda_k - E\{\lambda_k\}}{\sqrt{Var\{\lambda_k\}}}\right\} \rightarrow N(0, 1)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , donde  $D\{\cdot\}$  es la distribución de la función de  $\{\cdot\}$  y  $N(0, 1)$  denota la distribución normal.

Finalmente se pondrán de manifiesto algunas aplicaciones de dichas funciones.

## 200 On the use of dynamical systems to improve training methods in sport

**Autor:** Carlota Torrents

**Afiliación:** INEFC, Barcelona (Av de l'Estadi sn 08038)

**E-mail:** [carlotat@yahoo.com](mailto:carlotat@yahoo.com)

**Colaboradores:** James Stirling (Universitat Politècnica de Catalunya), Maria Zakyntthinaki (Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra), Natalia Balagué (INEFC Barcelona)

Tools from dynamical systems have mainly been used in sport for modeling rhythmic cyclic movements and analysing the phenomena of human coordination [1]. However they can also be used for modeling non-cyclic movements and for analysing the behaviour of the athlete performing technical exercises, what has produced as a result the appearance of new training methods. The aim of this study is to understand processes in sport by investigating a vertical jump onto a force platform and proposing alternatives to improve it. In particular we look at the 3 dimensional time series of the three forces  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  for the time in contact with the platform before lift off.

Various athletes jump onto a force platform from different distances and heights and as a result arrive to the platform with different body positions. We compare the approach of analysing the time series with the more commonly used statistical single variable approaches. We show how the use of tools from dynamical systems such as the concepts of critical fluctuations and critical slowing can be used to give new information about the individual athlete.

Results show how critical fluctuations (unstable high frequency oscillations in the time series) appear especially in  $F_x$  and  $F_y$  when the body is in a position near or at the point of failure. These fluctuations increase in both magnitude and time for the most unstable jumps, and also in the most inexperienced jumpers. This parameter, as well as critical slowing down (the time taken for the fluctuations to disappear), can be used as new measures of performance or ability and as a measure of the stress applied to the athlete in different training methods.

Previous studies analysing the time series of other exercises from the point of view of this approach have tried to improve them using differential learning [2]. It tries to train variations of the exercises for producing unconsciously fluctuations in the trajectories of the system and training as a result all the phase space. We propose too the use of the fluctuations for training, as well as the model we developed [3] from part of the time series when in contact with the platform. The geometry of the phase space of the model changes with improvements due to training and hence it can be used to understand the changes in performance of the athlete.

[ 1] Kelso (1999) MIT Press

[ 2] Schoellhorn (1999) Leistungssport 2: 5-12

[ 3] Stirling, Torrents, Zakyntthinaki and Balagué (2002) preprint UPC

## 201 Cómo se disipa la energía en un oscilador de Duffing con amortiguamiento no lineal

**Autor:** José Luis Trueba Santander

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
c/Tulipán, s/n  
28933 Móstoles, Madrid

**E-mail:** [jltrueba@escet.urjc.es](mailto:jltrueba@escet.urjc.es)

**WWW:** <http://www.escet.urjc.es/~jltrueba/>

**Colaboradores:** José Pablo Baltanás (Universidad Rey Juan Carlos), Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

Se estudia el efecto, sobre la pérdida de la energía del oscilador de Duffing, de la inclusión de un término de amortiguamiento no lineal. En particular, se presentan resultados acerca de cuánta energía se disipa en un ciclo del oscilador y cómo se disipa ésta en función del tiempo, para diferentes términos de amortiguamiento proporcional a una potencia de la velocidad. Se observa la presencia de una discontinuidad en estas funciones, y también de una inversión de comportamiento que depende del valor de la energía inicial. El valor del salto en la discontinuidad (para un cierto valor de la energía inicial) decrece a medida que crece el exponente de la fuerza disipativa, encontrándose una ley de escala.

## 202 Resultados sobre la anchura de la capa estocástica de un flujo periódico plano

**Autor:** José Luis Trueba Santander

**Afiliación:** Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
c/Tulipán, s/n  
28933 Móstoles, Madrid

**E-mail:** [jltrueba@escet.urjc.es](mailto:jltrueba@escet.urjc.es)

**WWW:** <http://www.escet.urjc.es/~jltrueba/>

**Colaboradores:** José Pablo Baltanás (Universidad Rey Juan Carlos), Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

Se considera el flujo plano obtenido a partir de una función de corriente analítica que captura gran parte de la dinámica de una sucesión de vórtices en un régimen periódico. En este modelo, se estudia la capa estocástica asociada a los puntos de silla caóticos. Para estimar la anchura de esta capa estocástica, se utilizan y comparan dos métodos: el analítico basado en la aplicación separatriz, y el numérico basado en resolver las ecuaciones de movimiento. Se encuentran rangos de validez del primero de estos métodos en función de los valores de los parámetros del sistema.

## 203 On solitary wave solutions of a nonlocal nonlinear equation.

**Autor:** David Usero

**Afiliación:** Universidad de Complutense de Madrid

Dpto. de Matemática Aplicada

Facultad de Informática,

Madrid, 28040

**E-mail:** [umdavid@fis.ucm.es](mailto:umdavid@fis.ucm.es)

**Colaboradores:** G. Alfimov (F.V. Lukin Research Institute of Physical problems), L. Vázquez (U. Complutense de Madrid)

We consider the equation

$$E : \quad \mathcal{H}[u_x] = f(u)$$

where  $\mathcal{H}$  denotes Hilbert transform  $\mathcal{H}[u] = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x') dx'}{x' - x}$

Equation (E) represents one of the simplest models which includes both nonlinearity and nonlocality and has been used to describe steady-states in numerous physical applications. As examples we note *hydrodynamical problems* where (E) appears as equation for travelling waves for Benjamin-type models, theory of *ferromagnets*, *nonlocal Josephson electrodynamics*, *chain models* with long-range interactions (see [1] for references), etc.

In some cases equation (E) can be considered as a nonlocal extension for equation  $u_{xx} = f(u)$ . For this equation it is possible to know all types of solutions from its phase-space portraits and obtain all of them by quadratures. On the other hand, solutions from eq. (E) are generically unknown but comparing with the local equation results quite fruitful.

We concentrate on an specific type of solutions named *localized solutions* satisfying  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$ . As far as these solutions appears in equations involving nonlinear terms, it can be more convenient to separate linear and nonlinear parts:  $f(u) = au - g(u)$  where  $a$  is a constant and  $g(u)$  represents the nonlinear part. Linear case with a more general nonlocal (time) derivative has been recently studied in [1]. We obtain localized solutions using numerical techniques and analyze them studying their extension to the complex plain [2], singular points, etc.

[ 1] G. Alfimov, D. Usero, L. Vázquez, *On Complex Singularities of Solutions of the Equation  $\mathcal{H}u_x - u + u^p = 0$* , Journal of Physics A: Mathematics and General, **33** (2000) pp.6707-6720.

[ 2] G. Turchetti, D. Usero, L. Vázquez, *Hamiltonian Systems with Fractional time derivative*, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Science, (in press)

## 204 Regiones caóticas y estructuras fractales en flujos magnéticos independientes del tiempo

**Autor:** Juan Carlos Vallejo Chavarino

**Afiliación:** Universidad Rey Juan Carlos,

Departamento de CC Experimentales e Ingeniería,

C. Tulipán, s/n

Móstoles, 28933

**E-mail:** [Juan.Carlos.Vallejo@esa.int](mailto:Juan.Carlos.Vallejo@esa.int)

**Colaboradores:** Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

La evolución del campo en un flujo magnético puede ser descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. Ignorando los efectos de la disipación, estas ecuaciones pueden ser escritas de modo canónico, como un Hamiltoniano de dos grados de libertad, donde el papel de la variable independiente (el tiempo) corresponde a una coordenada espacial. Se han aplicado herramientas de la Dinámica No Lineal al estudio de estos Hamiltonianos con el fin de estudiar la estocasticidad de tales sistemas, en un contexto de aplicación a problemas de interés astrofísico. En este trabajo se exponen algunos resultados como la identificación de las zonas de mayor caoticidad y el estudio de tales regiones, donde se observan estructuras fractales de alta complejidad.

