LAS MATEMÁTICAS DEL ISLAM.

Trabajo realizado por:

Esther Mora Meneses.

E.U.I.T.A Explotaciones.

Curso 2000 / 2001.

1.ANTECEDENTES HISTORICOS

Por la época en que Brahmagupta escribía sus tratados matemáticos ya se había derrumbado el imperio Sabeo de la Arabia Felix, y la península arábiga se encontraba sumida en una profunda crisis. Arabia estaba habitada entonces en su mayor parte por nómadas del desiertos, conocidos con el nombre de beduinos, que no sabían leer ni escribir, y en este marco sociopolítico surgió el profeta ***Mahoma***, nacido en la Meca en el año 570 d.c. Mahoma fué el fundador del Islam, religión que se extendió en poco tiempo por toda Arabia y que tiene como dogmas la creencia en un Dios único y en una vida futura, en la resurrección y en el juicio final.

La primera parte de su vida, fué la de un ciudadano medio que vive en una ciudad de 25.000 habitantes. A los 40 años empezó a predicar, primero en un pequeño grupo de fieles, después a la población en general, sentando así las bases de la religión islámica.

En el año 622 d.C, su vida se vió amenazada por un complot, lo que le obligó a trasladarse a Yatrib, más tarde denominada Medina. Esta "huida", conocida como la *Hégira*, señala el comienzo de la Era Mahometana, que iba a ejercer durante siglos una poderosa influencia en el desasrrollo de las **matemáticas.**

La unidad de la civilización islámica se basaba mucho en la religión de Mahoma y en las actividades económicas que en una hegemonía política real. No obstante, esta debilidad política no impidió a los arabes dominar grandes territorios durante siglos y tomar el relevo en la Escuela de Alejandría, mientras que el Occidente atravesaba siglos oscuros y poco propicios a la evolución de las matemáticas.

2 PRINCIPALES MATEMÁTICOS ÁRABES

2.1 *Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi*

Abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi, nació alrededor del 780 d.C. Su nombre sugiere que, o bien él, o bien su familia procedían de Khawarizmi, al este del mar Caspio en lo que es hoy Asia Central soviética.

Por el año 820, tras adquirir una reputación de científico dotado en Merv, capital de provincias orientales del califato abasí, fue invitado por el califa *Al-Mamun* a trasladarse a Bagdad, donde fue nombrado, primero astrónomo y después, jefe de la biblioteca de la ***Casa de la Sabiduría***.

Este matemático, escribió mas de media docena de obras astronómicas y matemáticas. Además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió dos libros sobre ***aritmética y álgebra*** que jugaron un papel muy importante en la historia de las matemáticas. En su obra aritmética, cuyo título en latín es *De numero Indorum* (el original árabe no ha llegado hasta nosotros), al-Khawarizmi presenta diversas reglas para el cálculo numérico, basadas en los algoritmos indios además de exponer detalladamente el sistema de numeración utilizado por los indios. En Europa, a finales de la Edad Media, atribuyeron al autor árabe la paternidad de la numeración utilizada. Y así el nuevo sistema de notación vino a ser conocido como “el de al-Khawarizmi” y , a través de deformaciones del nombre en la traducción y en la trasmisión, simplemente como ***“algorismi***”.

La obra principal de al-Khawarizmi es ***Hisab al-<abr wa'l muqqabala***, que significa "***ciencia de la trasposición y la reducción"***, donde el término "la-yabr" se convirtio en "***álgebra"***, sinónimo de la ciencia de las ecuaciones. A veces se le llama a Diofanto el padre del álgebra, pero ese título se le aplicaría a al-Khwarizmi. A los árabes en general les gusta extraordinariamente poder seguir una argumentación lógica correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática, aspectos ambos en los que ni Diofanto ni los hindues brillaban precisamente. Los hindues tenían muy desarrollada una capacidad de asociación y analogía, de intuición y de instinto estético unidos a una imaginación natural, mientras que los árabes tenían una mentalidad más práctica y más a ras de tierra en su enfoque de la matemática.

2.1.1 ﴿ ***Al-yabr***

El al-yabr nos ha llegado en dos versiones, la árabe y una traducción latina, pero en la traducción latina, que lleva por título *Liber algebrae et almucabola*, falta una parte considerable del manuscrito original árabe. Por ejemplo, la versión latina no tiene prólogo, probablemente por una razón elemental de precaución por parte del traductor, ya que en su prólogo en árabe el autor formula las alabanzas usuales al profeta Mahoma y a Al-Mamun.

La palabra al-yabr significa probablemente algo así como "restauración" o "completación", y parece querer referirse a la transposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación, sumándolos.

2.1.2 ☙ ***Las ecuaciones cuadráticas***

La traducción latina del Algebra de Al-Khwarizmi comienza con una breve introducción acerca el principio de notación posicional para los números, y a continuación se expone, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente en presencia los tres posibles tipos de cantidades: cuadrados, raices, números (es decir, x, y, y números). Tal como expresaba esta situación Abu-Kamil Shoja ben Aslam, un matemático posterior.

El capítulo I cubre, en tres breves párrafos, el caso de los cuadrados igual a raíces, que podemos expresar en notación moderna como $x^2 = 5x$, $x^2/3 = 4x$ y $5x^2 = 10x$, ecuaciones para las que se dan las soluciones $x = 5$, $x = 12$, $x = 2$, respectivamente (la raíz $x = 0$ no se reconoce como tal).

El capítulo II cubre el caso de los cuadrados igual a numeros, y el capítulo III resuelve el caso de las raíces igual a números, ofreciendo de nuevo tres ejemplos en cada capítulo para cubrir los casos en que el coeficiente del término variable es igual, mayor o menor que 1.

Los capítulos IV, V, VI son más interesantes, puesto que se ocupan de la resolución de los tres casos clásicos que presentan las ecuaciones cuadráticas completas:

1) Cuadrados y raíces igual a números
2) Cuadrados y números igual a raíces
3) Raíces y números igual a cuadrados

Las soluciones consisten en “recetas” para “completar el cuadrado”, aplicadas a ejemplos concretos.

Así, los seis tipos de ecuaciones diferentes de ecuación eran:

1. Raíces iguales a cuadrados: **bx = ax**
2. Raíces iguales a números: **bx = c**
3. Cuadrados iguales a números: **ax = c**
4. Cuadrados y raíces iguales a números: **ax + bx = c**
5. Raíces y números iguales a cuadrados: **bx + c = ax**
6. Cuadrados y números iguales a raíces: **ax + c = bx**

Donde a, b y c son números enteros positivos. Al-Khwarizmi dió reglas para resolver estas ecuaciones y en varios casos el fundamento lógico para estas soluciones. Veamos un ejemplo de una ecuación de tipo 4. [cuadrados (mal) y raíces iguales a números] que es interesante históricamente, ya que vuelve a aparecer en textos árabes y europeos medievales.

Ejemplo: Resolver *mal y 10 raíces igual a 39*.

(O en notación moderna, resolver $x^2 + 10x = 39$)

Solución sugerida:

Explicación de al- Khwarizmi:

1. Dividir por dos números el “número” de raíces: Resultado 5.
2. Multiplicar esto por sí mismo: Resultado 25
3. Sumar esto a 39: Resultado 64.
4. Extraer la raíz cuadrada a esto: Resultado 8
5. Restar a 8 el resultado del paso 1.: Resultado 3

Esta es la raíz del cuadrado (el cuadrado es 9)

Explicación en notación moderna:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$(x + 5) = 39 + 25 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

(La raíz negativa, x = -13, se ignora)

Se encuentran variantes de esta regla tanto en las matemáticas babilónicas como en las indias, y es muy probable que este algoritmo proceda o de una u otra o de ambas fuentes.

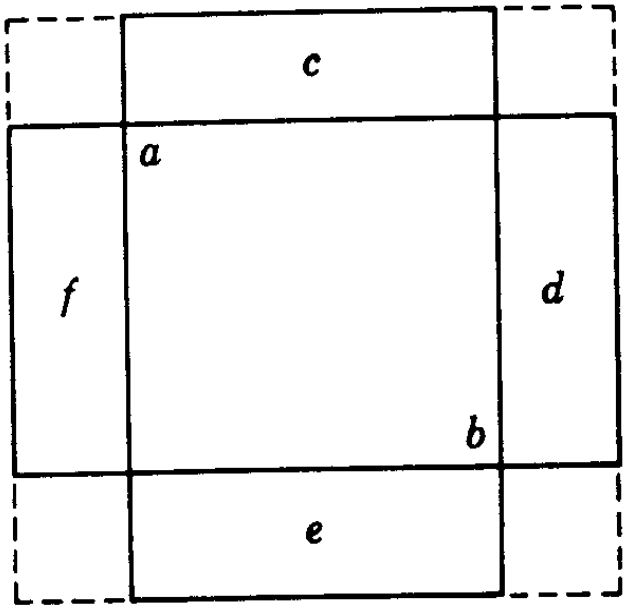
La auténtica novedad de la aproximación árabiga está contenida en el siguiente enunciado de al-khwarizmi. Tras dar soluciones numéricas para los seis tipos de ecuaciones, prosigue:

Hemos dicho bastante, por lo que se refiere a números, acerca de los seis tipos de ecuación. Ahora es necesario demostrar geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado en números.

2.1.3 ☙ ***La fundamentación geométrica***

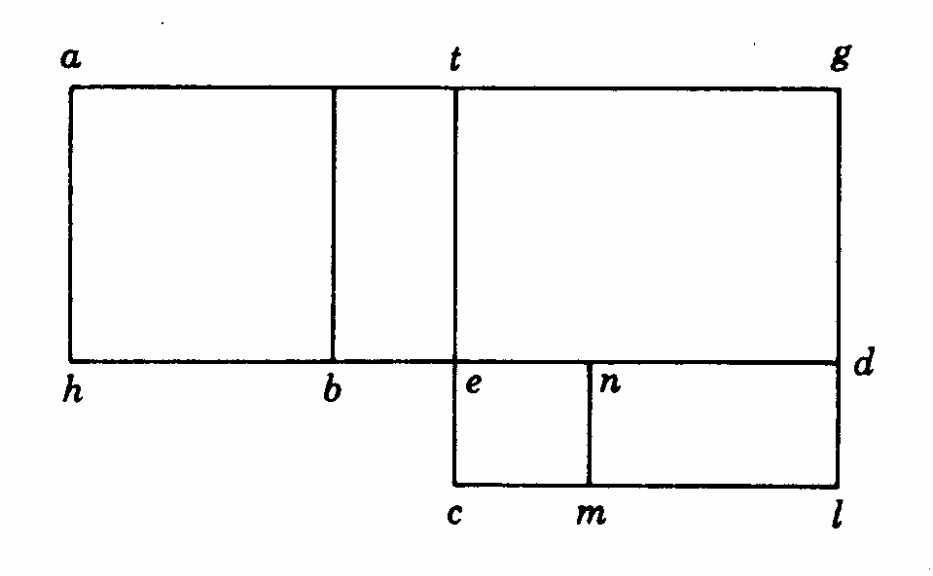
El Algebra de al-Khwarizmi revela en su contenido elementos griegos inconfundibles, pero la primera demostración geométrica con que nos encontramos en ella tiene poco que ver con la matemática clásica griega. Para resolver la ecuación $\mathbf{x^2 + 10x = 39}$ traza al-Khwarizmi un cuadrado ***ab*** para representar x, y sobre los cuatros lados de este cuadrado construye cuatro rectángulos ***c, d, e*** y ***f***, de 2 ½ unidades de ancho cada uno. Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados menores de las esquinas (que aparecen punteados en la figura siguiente), cada uno de los cuales tiene un área de 6 ¼ unidades. Por lo tanto, para "completar el cuadrado" añadimos cuatro veces 6 ¼ ó 25 unidades, obteniendo así un cuadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades, tal como resulta de la ecuación dada. Por lo tanto, el lado del cuadrado mayor debe ser igual a 8 unidades, del cual, restando dos veces 2 ½ ó

5 unidades, obtenemos x = 3 como solución, demostrando así que la solución hallada en la ecuación de tipo 4 era correcta.



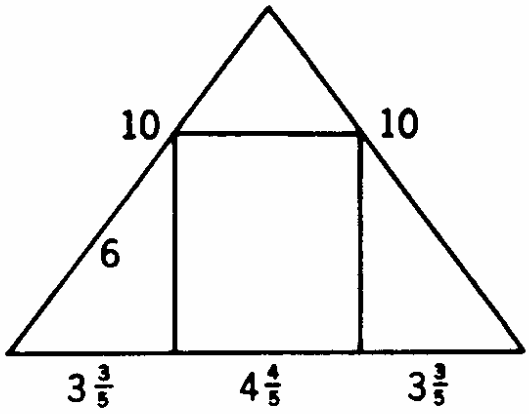
Las demostraciones geométricas correspondientes a los tipos 5 y 6 son algo más complicadas. Para la ecuación $x^2 + 21 = 10x$ al-Khwarizmi dibuja un cuadrado ***ab*** que representa x^2 y un rectángulo ***bg*** que representa 21 unidades. Entonces el rectángulo total que comprende el cuadrado ***ab*** y el rectángulo ***bg*** debe tener como área 10x, luego el lado ***ag*** o ***hd*** debe medir 10 unidades. Si trazamos entonces la mediatriz et de ***ag*** y de ***dh,*** la extendemos hasta ***c*** de manera que ***tc = tg*** y completamos los cuadrados ***tclg*** y ***cmne*** de la figura siguiente, entonces el área ***tb*** es igual al área ***md***; pero el cuadrado ***tl*** mide 25 y el gnomon ***tenmlg*** 21 (ya que es igual al rectángulo ***bg***). Por lo tanto, el cuadrado ***nc*** mide 4 y su lado ***ec*** 2; como ***ec = be*** y ***he*** = 5, tenemos que x = ***hb*** = 5 – 2 = 3, lo que demuestra que la solución aritmética dada en el tipo de ecuación 5 es correcta. Para la solución x = 5 + 2 = 7 se da una figura un poco modificada, y finalmente se utiliza una figura análoga para justificar

geométricamente el resultado obtenido algebraicamente en el tipo de ecuación 6.



2.1.4 ∽ ***Un problema de Herón***

Algunos de los problemas de al-Khwarizmi evidencian con toda claridad, su dependencia de la corriente matemática que proviene de los babilónicos pasando por *Herón*. Y uno de ellos al menos fue tomado directamente de Herón con gran probabilidad, ya que tanto la figura como las dimensiones son las mismas. Se trata de inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles de base 12 unidades y lados iguales de 10 unidades, preguntando el problema la medida del lado de dicho cuadrado. El autor del *Algebra* calcula en primer lugar, con ayuda del teorema de Pitágoras, la altura del triángulo, 8 unidades así que el área del triángulo es 48. Llamando al lado del cuadrado “la cosa”, se puede ver que se obtendrá el cuadrado de “la cosa” restándole al triángulo grande los tres triángulos pequeños que quedan fuera del cuadrado.



La suma de las áreas de los dos triángulos menores inferiores es evidentemente el producto de “la cosa” por seis menos la mitad de “la cosa” por la mitad de “la cosa”; de todo ello se obtiene facilmente la conclusión de que “la cosa” o lado del cuadrado es $4\frac{4}{5}$ unidades. La diferencia principal entre la forma de este problema en Herón y en Al-Khwarizmi es la de que Herón había expresado la solución en términos de fracciones unitarias como $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}$. Las analogías son tanto mayores que las diferencias, que podriamos tomar en este caso como una confirmación del principio general de que en la historia de la matemática la continuidad es la regla más que la excepción. Cuando parece presentarse una discontinuidad, lo primero que debemos pensar es que el aparente salto posiblemente se explique por la pérdida de documentos intermedios.

2.2 🕮 *Thabit ibn Qurra*

Abul Hassan Thabit ibn Qurra Marwan al-Harrani, nació en Harran en el norte de Mesopotamia, probablemente en el 836, y murió en el 901. Se sabe poco de sus primeros años. Thabit pertenecía a una secta religiosa de descendientes de babilonios adoradores de las estrellas que produjo eminentes eruditos tanto en astronomía como en matemáticas. La secta se llamaba a sí misma la de los Sabeos con el objeto de evitar ser perseguidos por politeístas. Bien por sus creencias religiosas heterodoxas o por sus disputas continuas con la comunidad, decidió abandonar Harran y dirigirse a Bagdad, bajo cuyo patronazgo entró a formar parte de un círculo de estudiosos y traductores.

Su dominio de las lenguas, entre ellas el árabe, el griego y el sirio, lo convirtieron pronto en uno de los primeros traductores de Bagdad. Sus notables traducciones de textos matemáticos griegos, incluyeron los *Elementos de Euclides*, varias obras de Arquímedes, partes de las *Cónicas* de Apolonio y el *Almagesto* de Tolomeo; muchas , a su vez, fueron traducidas al latín por Gerardo de Cremona en el siglo XII, en cuya forma iban a tener un impacto transcendental en la Europa medieval.

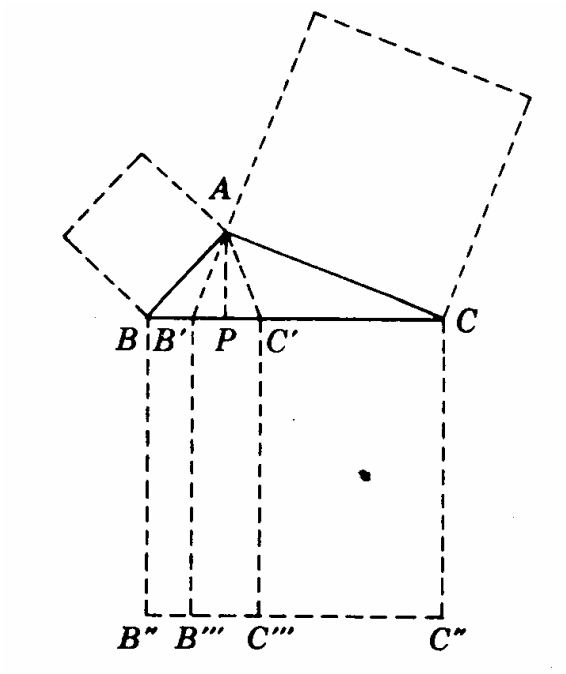
La pasión de Thabit por la traducción, le llevó a fundar una escuela de traductores de Bagdad, entre cuyos miembros estaban su hijo y algunos de los mejores traductores del momento. Dos de sus nietos siguieron la tradición familiar y fueron excelentes traductores y matemáticos.

El comentario de Thabit inb Qurra hacia la aplicación de la obra de Arquímedes sobre la cuadratura de la parábola, ha sido descrito como una de las aproximaciones más innovadoras conocidas antes de la aparición del cálculo integral.

Sus notables contribuciones en matemáticas incluyen una regla para descubrir pares de “números amigos”; una prueba de “disección” del teorema de Pitágoras; trabajos de trigonometría esférica; un intento de demostrar un postulado de las paralelas de Euclides, y su contribución a la medida de parábolas y parabolides, que algunos consideran que suministra en nexo esencial entre Arquímedes y matemáticos europeos posteriores como Kepler y Wallis. Como geómetra no tuvo rival en el mundo árabe, y es claro por la lista anterior que su potencial algebraica fue tambien considerable.

A èl se debe una fórmula notable para los “números amigos”: Si ***p, q*** y ***r*** son números primos, respectivamente de la forma $p = 3 \cdot 2 - 1$, $q = 3 \cdot 2 - 1$ y $r = 9 \cdot 2 - 1$, entonces $2pq$ y $2r$ son números amigos, es decir, cada uno de ellos es igual a la suma de todos los divisores propios del otro. Ibn-Qurra da una generalización del teorema de Pitágoras que se aplica a todos los triángulos, rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

Si trazamos desde el vértice A del triángulo abc rectas *AB’* y *AC’* tales que los ángulos *AB’ B* y *AC’ C* sean iguales al ángulo *A*, como se puede observar en la siguiente figura, entonces $AB^2 + AC^2 = BC\ (BB' + CC')$. Ibn Qurra no da ninguna demostración de este teorema, pero puede improvisarse una facilmente utilizando propiedades de triángulos semejantes. De hecho, este teorema nos ofrece una bella generalización del diagrama del “molino de viento” que usa Euclides en su demostración del teorema de Pitágoras. Si el triángulo *A* es obtuso, por ejemplo, entonces el cuadrado sobre el lado *AB* es



Equivalente al rectángulo *BB' B'' B'''* , y el cuadrado sobre *AC* al rectángulo *CC' C'' C''* , con *BB'' =CC'' = BC =B''C''* ; es decir, la suma de los cuadrados sobre *AB* y *AC* es igual al cuadrado sobre *BC* menos el rectángulo *B'C'B'''C'''.*

En cambio, si el ángulo *A* es agudo, entonces las posiciones de *B'* y *C*' están invertidas con respecto al punto *P* que es la proyección ortogonal de *A* sobre *BC*, y en este caso la suma de los cuadrados sobre *AB* y *AC* es igual al cuadrado sobre *BC más* el rectángulo *B'C'B'''C'''.* Y por último, si *A* es un ángulo recto, entonces *B'* y *C'* coinciden con *P*, Y en este caso el teorema de Ibn-Qurra se reduce al teorema de Pitágoras.

Otras contribuciones de Ibn-Qurra a la matemática incluyen demostraciones alternativas del teorema de Pitágoras, diversos resultados sobre segmentos de parábolas y de paraboloides, una discusión de los cuadrados mágicos, trisecciones de ángulos y nuevas teorias astronómicas. A veces acusa a los árabes de ser unos

imitadores serviles de los griegos en lo que se refiere a ciencia y filosofía, pero estas acusaciones no están justificadas; Thabit Ibn-Qurra, por ejemplo, añadió resueltamente una novena esfera a las ocho que se utilizan en las versiones simplificadas de las teorias astronómicas de Aristóteles y Ptolomeo, y en lugar de la procesión de los equinoccios de Hiparco en una dirección o en un sentido único, propuso una "trepidación de los equinocios" mediante un tipo de movimiento alternativo.

El hecho mismo de poner en cuestión puntos importantes de la astronomía griega pudo muy bien haber sido un factor decisivo que preparase el camino para la revolución astronómica inaugurada más tarde por Copérnico.

2.2.1 ***Los numerales árabes***

Los árabes asimilaron con gran rapidez la cultura de los pueblos vecinos conquistados por ellos; dentro de los confines del Imperio Arabe vivían pueblos de orígenes étnicos muy variados: aparte de los árabes puros había sirios, griegos, egipcios, persas, turcos, bereberes, andalusíes y muchos otros. De ellos la mayoría compartía una religión común, la fe en el Islam, aunque judíos y cristianos gozaban de una gran tolerancia; muchos compartían también un lenguaje común, el árabe, aunque también se utilizaban a veces el griego y el hebreo. A pesar de todo ello no sería lógico esperar un alto grado de uniformidad cultural, puesto que siempre hubo en el mundo árabe una división de facciones muy sensible, y esta división desembocaba a veces en conflictos declarados; el mismo Thabit inb Qurra vivía en una comunidad de caracteres marcadamente griegos, la cual se oponía a sus tendencias proárabes. Estas diferencias culturales se manifestaron ocasionalmente de una manera muy clara en la

matemática árabe, tal como ocurre en las obras de los matemáticos de los siglos X y XI Abu'l – Wefa (940-998) y Al – Karkhi o Al – Karagi (ca.1029). En algunas de sus obras ambos utilizaron los numerales hindúes que habían llegado a Arabia junto con la obra astronómica del ***Sindhind***, mientras que otras veces adoptaron el sistema de numeración griego alfabético (con las letras árabes sustituyendo a las equivalentes griegas, desde luego). Finalmente los numerales hindúes, muy superiores, ganaron la partida, pero incluso en el círculo de los que usaban la numeración india, la forma de los numerales difería considerablemente.

Variaciones en la forma habían sido muy corrientes en la India, desde luego, pero la variantes con que nos encontamos en el mundo árabe son tan sorprendentes que hay teorías que sugieren orígenes completamente distintos para las formas utilizadas en la mitad oriental y en la mitad occidental del mundo árabe.Quizá los numerales de los sarracenos del este, provenían directamente de la India, mientras que los numerales de los moros del oeste se derivaron de formas griegas o romanas más antiguas. Sin embargo, lo mas probable es que estas variantes hayan sido resultado de cambios paulatinos que tuvieron lugar en el espacio y en el tiempo puesto que los numerales árabes actuales son completamente distintos de los numerales *Devanagari* modernos (o "divinos")que aún se usan en la India; a fin de cuentas lo importante en un sistema de numeración son los principios en los que se basa y no la forma concreta de los numerales. Nuestros numerales se suelen llamar árabes a pesar de que se parecen bien poco a los que usan ahora en Egipto, Irak, Siria, Arabis, Irán y otros paises de cultura islámica, es decir, los signos **١٢٣٤٥٦٧٨٩** y esta denominación de numerales árabes sólo se debe a los principios en que se basan los dos sistemas son los mismos, y a que los signos que utilizamos pueden haberse derivado de los árabes. Sin embargo, estos principios en los que se basa el sistema de numeración árabe provenían casi con toda seguridad de la India, y por lo tanto sería correcto llamar a nuestro propio sistema, sitema *hindú* o *hindú-árabe*.

2.3 🕮 ***Omar Khayyam***

Abdul-Fath Umar ibn Ibrahim al-Khayyami nació alrededor del año 1040, en Nishapur de Khurasan, ahora territorio de Irán.

Omar Khayyam escribió el ***Rubaiyat***, un cierto número de cuartetos traducidos libremente al inglés por Edward Fitzgerald, a mediados del siglo pasado, es uno de los libros más conocidos y más traducidos de la literatura universal. Pero lo que no es tan conocido fuera del mundo islámico, es que el poeta fue tambien un distinguido matemático, astrónomo y filósofo.

En 1074 escribió su gran obra de álgebra. Clasificó las ecuaciones según su grado y daba reglas para resolver las ecuaciones cuadráticas, muy similares a las que utilizamos actualmente. También dio un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas con raíces reales y escribió acerca de la disposición en triángulo de los coeficientes del binomio conocida como triángulo de Pascal.

En 1077, Omar escribió *Sharh ma ashkala min musadarat kitab Uqlidis* (Explicaciones de las dificultades de los postulados de Euclides). Este libro trata del famoso postulado de las paralelas que había atraído tambien la atención de Thabit ibn Qurra.

Otra obra notable de Omar, en geometría, fue sobre la teoría de la proporción de Euclides, tal y como está expresada en los *Elementos*, poseía dos dimensiones, una aritmética y otra geométrica. La definición aritmética de Euclides de la igualdad de razones es que dos razones a/b y c/d son iguales si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. Si ma > nb entonces mc > nd.
2. Si ma = nb entonces mc = nd.
3. Si ma < nb entonces mc < nd.

Omar sugirió que dos o más razones se podían definir como iguales si podían reducirse a una razón de números enteros hasta un alto grado de exactitud.

El carácter inductivo de Omar, le hizo tener sus reservas respecto a esta definición. Omar sugirió que dos o más razones se podían definir como iguales, si podían reducirse a una razón de números enteros hasta un alto grado de exactitud. Así la razón de la diagonal de un cuadrado a su longitud (que es la raíz cuadrada de 2) o la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro (que es π) no puede nunca igualarse a ninguna otra razón.

Para Omar, tales números no quedan excluidos en la definición de Euclides de razones iguales, y así la definición no es correcta. Euclides consideró números racionales en su interpretación aritmética de las razones; la contribución de Omar consistió en ampliar el concepto de número hasta incluir en él los números irracionales positivos.

Omar Khayyam murió en Nishapur en 1123. Fue un intelectual retraído, y un poeta. En definitiva, fue esa rara combinación de un poeta extraordinario y un matemático.

"Quienquiera que piense que el álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de incógnitas, piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el álgebra y la geometría son en aparencia diferentes. Los hechos del álgebra son hechos geométricos que están demostrados".

3. ***OTROS SABIOS DE ISLAM***

Alrrededor de 500 matemáticos, contribuyeron a la evolución de las matemáticas y de la astronomía. Los más destacados fueron:

3.1 🕮 *Ibn Sina* (980-1037). Más conocido en occidente como Avicena. Erudito en casi todos los campos relacionados con las ciencias; sin embargo, las matemáticas sólo desempeñaron un papel secundario en su vida. Tradujo a Euclides y explicó la prueba del nueve, además de aplicar las matemáticas a la física y a la astronomía. Gran influyente en la filosofía de la Edad Media.

3.2 🕮 *Al-Biruni* (973-1048). Nacido en Jiva. Durante su estancia en la India, escribió un importante obra titulada *Tarih al-Hind*. En este libro realiza una amplia descripción geográfica de la India, sus creencias religiosas y los conocimientos científicos del pueblo hindú. Describe con mucho detalle el principio posicional de numeración; y presenta pasajes de distintos autores, entre ellos Brahmagupta. En geometría demuestra originalmente la fórmula de Herón relativa al area de un triángulo, y nos cuenta que Arquímedes conocía esta fórmula.

3.3 🕮 *Ibn-al-Haytam* (965-1039). Conocido tambien como el Alhazén de los occidentales. Respetado médico y matemático. Se conocen más de 92 títulos de sus obras, 25 de las cuales tratan de matemáticas. Su tratado más importante*, Los tesoros de la óptica*, hace una contribución original al sustituir los rayos visuales de los ópticos de los griegos, que parten el ojo, por los rayos luminosos que van del objeto hacia el ojo.

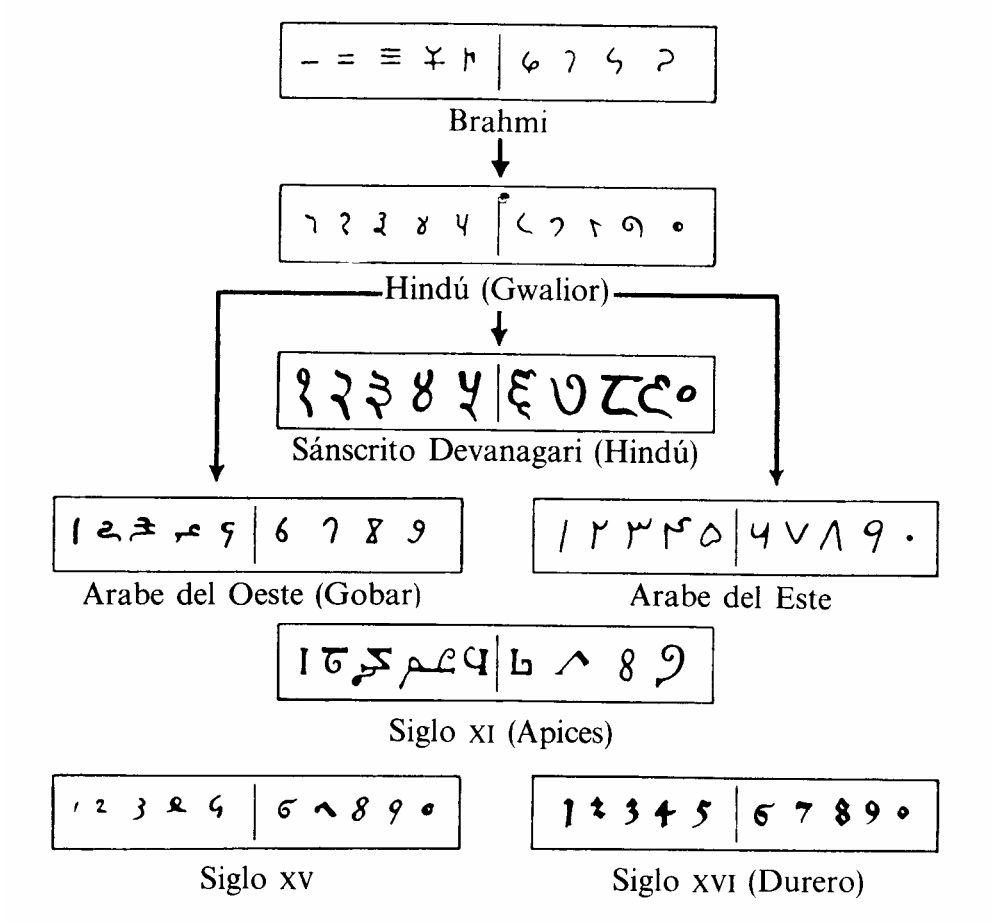
3.4 🕮 *Abul`l-Wefa y Al-Karkhi*. Abu´l-Wefa, trabajo en los campos de la trigonometría y del álgebra. Escribió un comentario sobre el Algebra de al-Khwarizmi, y sobre todo, realizó una traducción del griego, de la *Arithmética* de Diofanto. Su sucesor AL-Karkhi debió utilizar sin duda esta traducción, para convertirse en discípulo árabe de Diofanto. Se interesó más por el álgebra de al-Khwarizmi, que por el análisis indeterminado de los hindúes. En cambio no se preocupó de las ecuaciones cuadráticas, aunque si siguió la costumbre árabe de dar demostraciones geométricas, para la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

A este matemático, se le atribuye, la primera resolución numérica de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = c$ (considerando como siempre las raíces positivas). Y es aquí, donde darían comienzo, los primeros desarrollos de la matemática del Renacimiento.

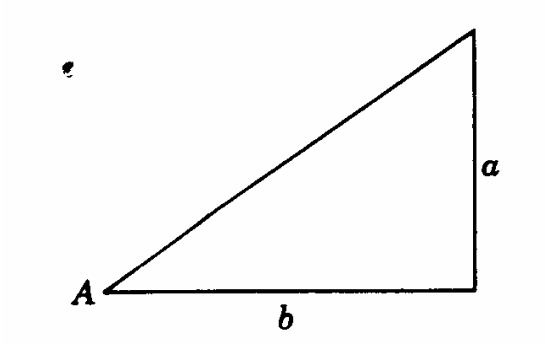
4. ***LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE.***

De la misma manera que se dio una competencia entre los sistemas de numeración de origen griego e hindú, también en los cálculos astronómicos hubo en Arabia al principio dos tipos de trigonometría; una la geometría de las cuerdas griegas, tal como se encuentra en *Almagesto,* y la otra basada en las tablas de senos hindúes, tales como las que aparecen en el *Sindhind.*

Y también en este caso, el conflicto se resolvió con el triunfo de la postura hindú, por lo que en última instancia la mayor parte de la trigonometría árabe se construyó basada en la función seno. De hecho, además, fue a traves de los árabes y no directamente de los hindúes como pasó a Europa la trigonometría del seno.



El vehículo de transmisión primario fue la astronomía de ***Al-Battani*** (ca. 850- 929), más conocido en Europa como Albategnius, aunque Thabit ibn-Qurra parece haber utilizado el seno algo antes. En su libro con el título *Sobre el movimiento de las estrellas* da Albategnius fórmulas tales como $b = a$ sen (90º - A)/sen A , como indica la figura, en la que aparecen las funciones seno y seno verso, pero por la época de Abu'l-Wefa, un siglo más tarde, la función tangente ya era bien conocida, y así se podía expresar la relación anterior, por ejemplo, de una manera más sencilla como $a = b$ tg A.



Aquí nos encontramos ya más en contacto con las ideas básicas de la trigonometría moderna, puesto que la función tangente árabe se daba generalmente para el círculo unidad, lo que no ocurría con la función seno hindúes. Además, con Abu'l – Wefa la trigonometría adopta una forma más sistemática, en la que se demuestran ya teoremas como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad; aunque la función seno de origen hindú había desplazado el uso de la cuerda de los griegos, no obstante era el Almagesto de Ptolomeo lo que motivaba la ordenación lógica de los resultados trigonométricos.

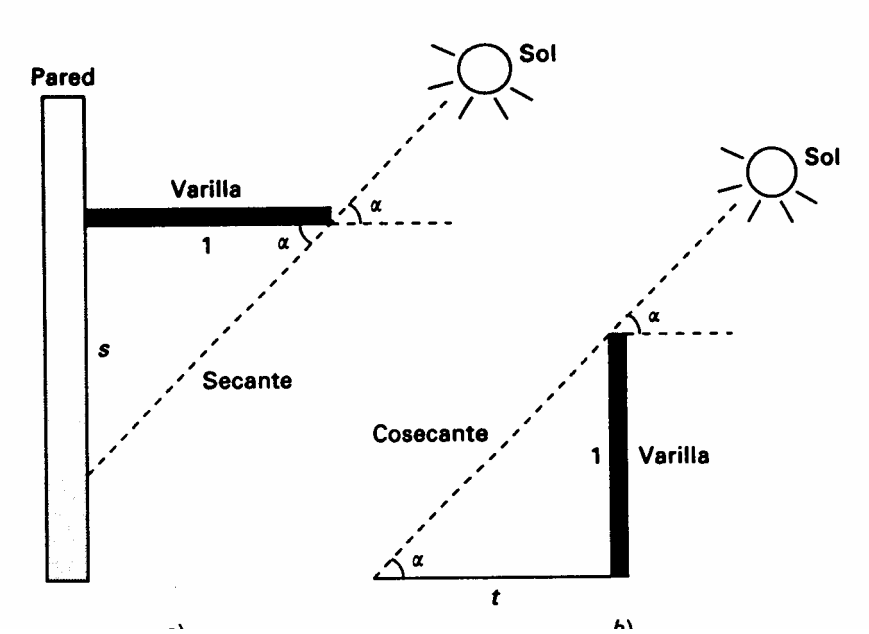
El teorema de los senos ya lo conocía esencialmente Ptolomeo, y también aparece implícitamente en la obra de Brahmagupta, pero se suele atribuir a Abu'l – Wefa construyó también una nueva tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto de grado con ocho cifras decimales, una tabla de tangentes, e hizo uso en sus cálculos de todas las seis funciones trigonométricas usuales junto con diversas relaciones entre ellas, pero esta utilización de las nuevas funciones no parece haber sido muy seguida durante el período medieval.

A veces han intentado los historiadores atribuir las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante a épocas e incluso a

matemáticos concretos, pero lo cierto es que no se ha conseguido ningún tipo de seguridad que apoye estas conjeturas. En la India y también en Arabia se utilizaba una teoría general de longitudes de sombras con respecto a una unidad determinada de longitud o ***gnomon***, para alturas variables del sol sobre el horizonte; no había ninguna unidad de longitud estándar para la varilla o gnomon, aunque a menudo se adoptaba o bien un palmo o la altura media de un hombre. Entoces la sombra horizontal proyectada por el gnomon vertical de longitud fija era lo que nosotros llamamos la cotangente del ángulo de elevación el sol sobre el horizonte. La "sombra invertida", es decir, la sombra proyectada sobre una pared vertical por una varilla o gnomon de longitud unidad fijado perpendicularmente a la pared, sería en cambio lo que nosotros llamamos la tangente del ángulo de elevación del sol.

La "*hipotenusa de la sombra*", es decir, la distancia del extremo del gomon vertical unidad al extremo de su sombre era lo equivalente a nuestra función cosecante, y la "hipotenusa de la sombra invertida" jugaba el mismo papel que nuestra secante.

Parece ser que esta tradición relativa a la medida de las sombras estaba ya bien establecida en Asia por la época de Thabit ibn-Qurra, pero que los valores de estas dos hipotenusas (cosecante y secante) raramente se tabulaban.



4.1 ☙ ***Deducción de las relaciones trigonométricas***

La obra de Abu'l – Wefa sobre trigonometría contiene más que un tratamiento sistemático de las seis funciones. En su ***Zij almagesti*** da una regla para calcular el seno de la suma de dos arcos y el seno de su diferencia cuando se conoce cada uno de ellos:

Multiplicar el seno de uno por el seno del otro, expresados en sexagésimos, y sumar los dos productos si buscamos el seno de la suma de los dos arcos, o restar si buscamos el seno de su diferencia.

Expresada en notación moderna, esta regla se convierte en el familiar

$$\text{Sen}\ (\alpha \pm \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta \pm \cos\ \alpha\, \text{sen}\ \beta$$

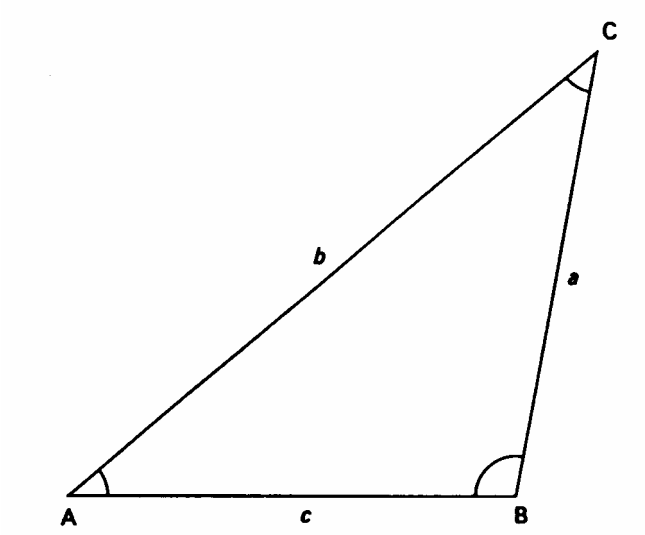
La referencia a las funciones seno y coseno expresadas en sexagésimos indica que los cálculos se efectuaban en fracciones sexagesimales. Abu'l – Wefa proporciona una prueba de este resultado en términos de arcos de un círculo de radio unidad.

La regla del seno en su versión moderna se atribuye a Nasir al Din al-Tusi. La regla puede formularse de la manera siguiente:

Dado un triángulo cualquiera ABC (véase la figura)

$$\frac{b}{c} = \frac{r.senB}{r.senC}$$

Donde se considera que *r* tiene 60 unidades. Al-Tusi proporciona una prueba para esta regla y pasa a considerar como se puede utilizar el resultado para calcular las dimensiones de un triángulo, conocidas diferentes combinaciones de ángulos y lados. Por ejemplo, conociendo los valores de un ángulo (por ejemplo, *B*) y los lados (*b* y *c*), se puede calcular el otro ángulo (*C*) usando primero la regla dada anteriormente y mirando luego el ángulo en una tabla de senos. Esto daría inmediatamente el otro ángulo (*A*), y se podría utilizar a continuación la regla del seno para obtener la longitud del lado *a*. La seguridad con que Al- Tusi aborda una diversidad de problemas utilizando la regla del seno es una indicación de la inmadurez de la trigonometría árabe del siglo XIII.



4.2 ***Construcción de las tablas trigonométricas***

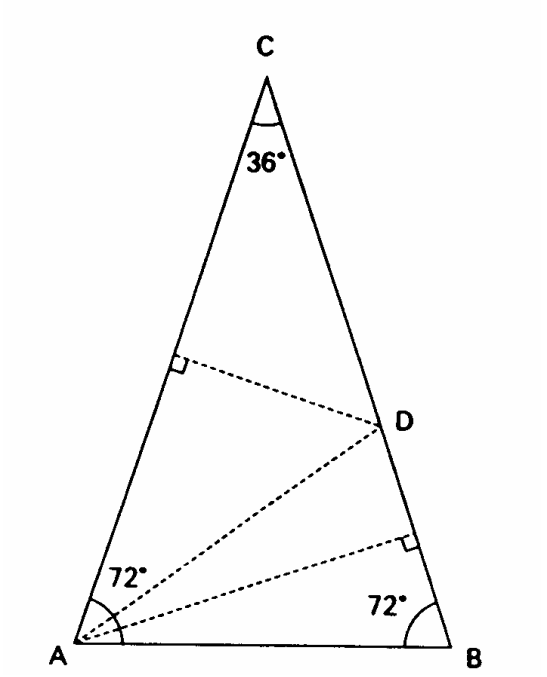
El primitivo interés de los árabes por la trigonometría se disparó con su descubrimiento de las tablas de senos en los *Siddhantas* indios.

Pronto descubrieron que los cálculos trigonométricos, bien se aplicaran a la astronomía, bien a la geometría, requerían tablas detalladas y precisas, y procediendo a construir tablas más precisas que ninguna otra anterior.

Al – Hasib (ca.850) construyó las primeras tablas de senos y tangentes a intervalos de 1º, exactas hasta tres cifras sexagesimales (cinco decimales). El trabajo subsiguiente se concretó en reducir los intervalos y en aumentar la exactitud de estas tablas. Así, en las obras del rey astrónomo Ulugh Beg en 1440, hay tablas para las dos funciones a intervalos de 1/60 de un grado con valores correctos hasta cinco cifras sexagesimales (nueve decimales). Los cálculos necesarios para confeccionar tales tablas son impresionantemente laboriosos. Por

cada uno de los 90 grados habría 60 valores, lo que hace un total de 5.400 valores.

El cálculo del seno suponiendo de 1º (suponiendo, por sencillez, un radio unidad) era en sí mismo una empressa considerable. Sabemos por la obra de Abu'l –Wefa en el siglo X que el procedimiento consistía en aplicar la fórmula del seno de la diferencia de dos arcos, a saber, sen (72º - 60º), lo que daba el sen 12º. La elección de 72º y 60º era intencionada y muy reveladora del nivel de refinada complejidad de la trigonometría árabe, ya que a partir de los lados de un pentágono regular y de un triángulo equilátero inscrito en un círculo es posible calcular los valores requeridos de los senos de los ángulos mencionados hasta cualquier grado de exactitud.



Para ilustrar esto, la figura de arriba muestra un triángulo ABC cuyos ángulos de la base tienen 72º cada uno y cuyo tercer ángulo es por consiguiente 36º. Se puede demostrar que

$$2 \cos 36º = 2 \cos 72º + 1$$

A partir del desarrollo familiar de cos (A + B) y la igualdad sen² A + sen² B=1, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$2c = 2\,(2c^2 - 1) + 1, \quad \text{donde } c = \cos 36º$$

Por tanto, $4c^2 - 2c - 1 = 0$, cuya solución es

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}; \; para \;\; c < 0$$

O cos 36º = ¼ (1 +🕒). Ahora, para calcular el sen 72º, puesto que sen 72º = cos 18º, hacemos c = cos 18º. Entonces,

$$2c^2 - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

y

$$c^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Por tanto,

$$\text{Cos } 18^{\circ} = \text{sen } 72^{\circ} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

El hecho de que el sen 60º = ☆3/2 lo conocieran los indios ya en el año 500 d.C probablemente explica la temprana familiaridad de los árabes con este resultado. La diferencia entre los valores calculados de sen 72º y sen 60º se toma y se usa con el desarrollo

Sen(72º - 60º) = sen 72º cos 60º - sen 60º cos 72º

Para obtener el valor de sen 12º. A continuación, la fórmula del semiángulo se aplica para obtener, sucesivamente, sen 6º, sen 3º, sen ½º y sen ¾º, y entonces se aplica algún procedimiento de interpolación lineal a los dos últimos valores para obtener una estimación de sen 1º.

Se probaron diferentes tipos de procedimientos de interpolación, particularmente cuando se cayó en la cuenta que, aunque la interpolación lineal podía funcionar bien para pequeños intervalos en los que el crecimiento era uniforme, no era apropiada para intervalos grandes, o para los límites superiores de una función tangente, en los que el valor de la tangente de un ángulo tiende a infinito cuando el ángulo tiende a 90º (esto es, la función tiene una asíntota vertical a 90º). Este reconocimiento estaba ya implícito en las matemáticas indias antes de que entraran en contacto con las matemáticas árabes.

Uno de los máximos astrónomos árabes, Ibn Yunus, que vivió durante la primera mitad del siglo X, había diseñado un procedimiento de interpolación de segundo orden y lo había utilizado para construir tablas de senos.

Al-Kashi, en su libro *Risala al-watar wa'l-jaib* (Tratado sobre la cuerda y el seno), estudia el problema de obtener una estimación exacta de sen1º de una manera diferente, diseñando un procedimiento iterativo que implicaba la resolución de ecuaciones cúbicas. Su método tiene semejanzas con los métodos numéricos utilizados con este fin por los chinos y los árabes.

La aproximación al sen1º se basaba en dos fragmentos de información conocidos por los matemáticos árabes, al menos, unos trescientos años antes de la época de Al- kashi. Por simplicidad usaremos aquí base 10, no la base sexagesimal con la que trabajo Al-Kashi; tambien usaremos la función seno moderna, ya que la función seno de Al- Kashi es 60 veces la función seno moderna.

Las dos relaciones son, primero, que para un ángulo dado cualquiera, α,

$$\text{Sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha \qquad \text{(I)}$$

De modo que

$$\text{Sen } 3^o = 3 \text{ sen } 1^o - 4 \text{ sen}^3 1^o \qquad \text{(II)}$$

Segundo, por el método anteriormente discutido, podemos calcular que

$$\text{Sen } 3^o = 0{,}052335956$$

Combinando las ecuaciones (I) y (II), y llamando *x* al valor desconocido de sen 1º, obtenemos la ecuación cúbica

$$X^3 - 0{,}75 + 0{,}013083989 = 0$$

Para resolver esta ecuación cúbica de Al- Kashi utilizó un procedimiento iterativo que, expresado en términos modernos, es como sigue. Para resolver la ecuación de la forma $x = f(x)$, escoger un valor arbitriairo x_0, como una primera aproximación a la raíz.

Luego, usando la relación $x_n = f(x_{n-1})$ para $n = 1, 2, 3,...$ se obtiene una secuencia de valores x_1, x_2 ...que se aproximan cada vez más a la solución, independientemente de lo que se escogío para x_0, siempre que exista lím x_n. En el moderno análisis numérico este procedimiento se conoce como iteración del «punto fijado » o iteración « directa ».

Mediante este método Al- Kashi calculó el valor de 60 sen 1º correcto hasta cifras sexagesimales (dieciséis decimales) – una demostración notable de la capacidad de cálculo, incluso con los estándares actuales.

5. ***LA ARITMÉTICA ÁRABE.***

5.1 *Las operaciones aritméticas*.

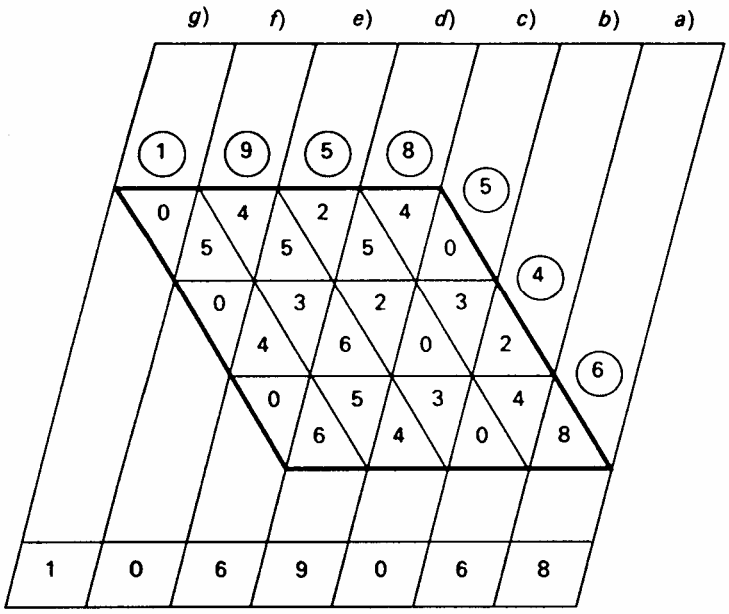
El primer tratamiento sistemático de las operaciones ariméticas se encuentra en la aritmética de al- Khwarizmi, en la cual se discute el sistema de valor posicional y las reglas para efectuar las cuatro operaciones aritméticas.En obras posteriores, notablemente en las de Ibn Labban y Al – Uqlidisi, hay esquemas de cálculo para efectuar operaciones, como una multiplicación larga.

La clave del calculista de Al- Kashi presenta un tratamiento exhaustivo de los métodos aritméticos, incluyendo las operaciones con fracciones decimales.

El método no era muy diferente del nuestro. Examinaremos el método de la «criba» o de la «reja», que tiene una importancia histórica.

Sus orígenes son probablemente indios; y se encuentran trazas del mismo en los métodos de «enrejados» explicados en la Aritmética de Treviso de el año 1478 (este año no entra dentro del estudio del presente trabajo) en el dispositivo mecánico conocido como «varillas de Napier», por su inventor, John Napier (1550-1617) natural de Escocia.

Este método aún hoy, puede llegar a ser un método divertido para aprender largas multiplicaciones.



Como podemos observar en el ejemplo de arriba, se ha utilizado el método de la reja para multiplicar 1958 por 546.Los números que se van a multiplicar se introducen como se indica. El número de carriles de *a*) a *g*) es 7, el número de dígitos de los dos números que se van a multiplicar.El producto que se va a introducir en cada celdilla se obtiene multiplicando los números de

la fila y de la columna en que se están y poniendo el resultado con el dígito de las «unidades» debajo y el dígito de las «decenas» encima de la diagonal de la celdilla.Por ejemplo en la celdilla de la parte superior derecha del cuadrado se introduce 40, el producto de 8 por 5, dispuesto de manera que el 4 esté por encima de la diagonal y 0 por debajo de ella. Después que se han llenado todas las celdillas, se efectúan las sumas a lo largo de la diagonal de los carriles *a*) a *g*),comenzando en *a*) y siguiendo hasta *g*),arrastrando si fuera preciso, y los resultados se escriben abajo del todo. Por ejemplo, la suma de los números en el carril *c*) da 0 + 3 + 0 + 3 + 4 = 10, de modo que se escribe 0 en el fondo del carril y se arrastra 1 hasta *d*). La solución aparece en la parte baja de la figura como 1.069.068.

5.2 ॐ *Fracciones decimales*

Las fracciones decimales aparecieron por vez primera en la matemáticas arábigas en *El libro de los capítulos sobre aritmética india*, escrito en Damasco en el año 952 ó 953 por Abul Hassan al- Uqlidisi. Sabemos poco del autor, excepto que se ganaba la vida copiando las obras de Euclides (de ahí el nombre de Uqlidisi). No está claro si fue él u otro estudioso anterior el responsable del descubrimiento, ya que al comienzo de su libro afirma que ha intentado incorporar al mismo los mejores métodos del pasado. El libro de Al-Uqlidisi tiene cuatro partes, de las que las dos primeras tratan de métodos de cálculo utilizando los números indios. En la segunda parte aparecen por vez primera las fracciones decimales.

Considera el problema de dividir sucesivamente por la mitad 19 cinco veces, y da la respuesta de 059375, en la que la señal vertical sobre 0 indica que la parte de la fracción decimal del número comienza con el dígito a la derecha. Esta notación es perfectamente general, de modo que nuestro

0,059375 se denotaría 0059375.

Existen pruebas de que Al- Uqlidisi conocía el método de multiplicaión de fracciones decimales por números enteros. Sin embargo, hasta dos siglos después no encontramos en Al- Samawal (1172) manejando comodamente las fracciones decimales en problemas de división y extracción de raices.

Otra contribución de Al- Uqlidisi fue adaptar las técnicas indias del tablero de arena de cálculo a métodos adecuados para la pluma y el papel. Era práctica corriente, tanto en la India como en el mundo árabe, realizar los cálculos aritméticos escribiendo los símbolos en arena o polvo, borrando los pasos intermedios conforme se iba avanzando en la operación. Al- Uqlidisi desconfiaba abiertamente de este procedimiento, no por ningún defecto del método en sí, sino porque los cálculos de esa forma los realizaban los astrólogos callejeros para ganarse al vida.

Sugirió el uso de la pluma y el papel a aquellos que no querían que se les identificase con semejante compañía. Ciertamente, los métodos de «pluma y papel» para efectuar multiplicaciones y divisiones que acabaron en las obras medievales latinas deben más a Al- Uqlidisi que a al- Khwarizmi.

5.3 ॐ *La teoría de números*

En la teoría de números, como en otros campos, los árabes consiguieron producir una síntesis creativa de las ideas que obtuvieron de diferentes tradicionales matemáticas – notablemente de la India y del mundo helenístico -. Esto de ejemplificar de la mejor manera en la obra de Ibn Sina (o Avicena, como se le conoció en Europa). Aunque es muy conocido por su obra en medicina, su obra matemática es poco apreciada fuera del mundo islámico. Pero su otra obra importante, titulada *Alai* en persa y *Kitab al – Shifa* en árabe (Libro de física), contiene secciones sobre la aritmética.Comienza con una discusión, basada en fuentes griegas e indias , de los diferentes tipos de números (por ejemplo, impares, pares, deficientes, perfectos y abundantes).

Ejemplo:

- 6 es perfecto, ya que la suma de sus divisores propios es 1+2+3 = 6
- 8 es deficiente, ya que la suma de sus divisores propios es 1+2+4+ < 8
- 12 es abundante, ya que la suma de sus divisores propios es 1+2+3+4+6 > 12.

Y una explicación de las diferentes operaciones aritméticas, incluyendo la regla para «expulsar los nueves». Esta regla es un método originalmente indio de comprobar la suma y la multiplicación. Utiliza la propiedad bien conocida de que la suma de los dígitos de cualquier número natural cuando se divide por 9 da el mismo resto que cuando el mismo número se divide por 9. Por ejemplo, para comprobar que el producto de 436 por 659 es 287.324:

1. Sumar los dígitos de 436 para obtener 13, cuyos dígitos suman 4.
2. Sumar los dígitos de 659 para obtener 20, cuyos dígitos suman 2.
3. Sumar los dígitos del producto 287.324 para obtener 26, cuyos dígitos suman 8.

Por tanto, al «expulsar los nueves» quedan restos de 4, 2 y 8, respectivamente, y como 4 x 2 = 8, la multiplicación probablemente es correcta.

Formula dos reglas que no se encuentran en textos anteriores. La primera es una regla para sumar un conjunto dispuesto en forma de cuadrado de números impares:

«Si se colocan números impares sucesivos en una tabla cuadrada, la suma de los números de la diagonal será igual al cubo del lado; la suma de los números que llenan el cuadrado será la cuarta potencia del lado.»

Ibn Shina ilustra esta regla mediante el cuadrado que se muestra a continuación. Las diagonales del cuadrado suman

9 + 17 + 25 +33 + 41 = 125 = 1 + 13 + 25 + 37 + 49

que es igual al cubo del «lado», 5^3. La suma total de lso números del cuadrado es 625 = 5, la cuarta potencia del «lado».

9	7	5	3	1
19	17	15	13	11
29	27	25	23	21
39	37	35	33	31
49	47	45	43	41

Existe la clara implicación de que Ibn Shina sabía que la suma de números impares sucesivos comenzado por 1 es igual al cuadrado de los números impares que se suman. Por ejemplo,

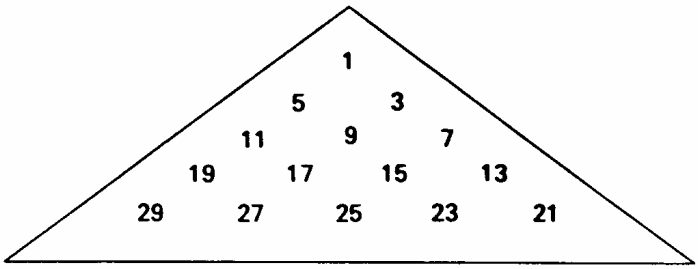
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36

que es el cuadrado de 6, número de números impares que se suman.

La segunda regla es para sumar un conjunto en triángulo de números impares:

«Si se colocan números impares sucesivos en forma de triángulo, la suma de los números de una fila es igual al cubo del número [de números] de la fila.»

La disposición triangular de los números impares del 1 al 30 se muestra en la figura siguiente. Se ve claramente que la suma de los números, por ejemplo, de la tercera fila es 27, el cubo de 3, número de números de la fila.



Los números figurados fueron estudiados por varios matemáticos árabes, particularmente por los que eran más partidarios de una aproximación al tema de los números más geométrica que algorítmica; al- Khwarizmi representaba la última tendencia y Thabit ibn Qurra la primera. Thabit fue uno de los primeros matemáticos árabes en percibir el valor de una interpretación geométrica de un problema algebraico. Sin embargo, su más notable contribución a la teoría de los números no tuvo aparentemente una motivación geométrica – fue su deducción de una fórmula para generar pares de números amigos.

Un par de **números naturales**, *M* y *N,* se definen como **amigos** si cada uno de ellos es igual a la suma de los divisores propios (esto es, todos los divisores de un número, incluyendo 1, pero no a sí mismo) del otro. El par de números amigos emnor es 220 y 284. Los divisores propios de 220 son:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

cuya suma es 284.Similarmente, los divisores propios de 284 son

1, 2, 4, 71, 142

cuya suma es 220.

En su *Maqala fi istikhraj al-adad al-mutahabba bi-suhulat al-maslak ila dhalika* (Libro sobre la determinación de números amigos), Thabit suministra la fórmula siguiente para deducir pares de números amigos. Sean ***p, q*** y ***r*** números primos diferentes dados por

$$p = 3 \times 2 - 1, \qquad q = 3 \times 2 - 1, \qquad r = 9 \times 2 - 1$$

donde *n* es mayor que 1. Entonces, *M* y *N* serán un par de números amigos dados por

$$M = 2^n pq, \quad N = 2^n r$$

Para *n* = 2

$$p = 3 \times 2 - 1 = 5, \quad q = 3 \times 2^2 - 1 = 11, \quad r = 9 \times 2^3 - 1 = 71$$

Como p, q y r son los tres primos, pueden utilizarse para dar *M* y *N* como

$$M = 2^2 \times 5 \times 11 = 220, \quad N = 2^2 \times 71 = 284$$

que es el menor par de números amigos que existe.Para *n* = 3, *q* = 287, el cual no es primo (ya que es divisible por 7), de modo que no se puede aplicar la fórmula. Para n = 4 se halla que *p* = 23, *q* = 47 y *r* = 1151.Todos ellos son primos y así el próximo par de números amigos generados mediante la fórmula de Thabit es

$$M = 2 \times 23 \times 47 = 17.296 \quad N = 2 \times 1.151 = 18.416$$

Thabit obtuvo solo el primer par de números amigos con su fórmula. Un matemático árabe posterior, ibn al-Banna (1256 – 1321) fue quien calculó el par anterior correspondiente a *n* = 4. Resulta que la regla de Thabit genera pares de números amigos para n = 2, 4 y 7, pero para ningún otro valor de *n* por debajo de 20.000.

Afortunadamente existen otras reglas. Euler encontró más de 60 pares. Actualmente se conocen más de un millar de pares.

5.4 ॐ Extracción de raíces

La palabra árabe raíz, ***jadhir***, fué el término que propuso al- Khwarizmi para denotar la incógnita en una ecuación. Utilizó los términos ***mal*** (segunda potencia) y ***kab*** (cubo) pudo describir ecuaciones de grados distintos, de este modo:

mal mal = x , mal kab = x , kab kab = x

y así sucesivamente. Existen estrechos paralelismos entre la forma como los árabes extraían la raices cuadradas y cúbicas (buscando soluciones numéricas a ecuaciones cuadráticas y cúbicas) y los métodos utilizados en otras tradiciones matemáticas.

Los matemáticos árabes posteriores trabajaron con métodos muy similares a los utilizados por los chinos para extraer raíces cuadradas y de un orden superior.

Las matemáticas árabes deben recordarse por ser muy sintéticas en geometría (Euclides) y álgebra del Oriente, que comenzó con la solución geométrica de ecuaciones cuadráticas por al- Khwarizmi y culminó en la solución geométrica de ecuaciones cúbicas a cargo de Omar Khayyam.

6. ☙ ***EL ÁLGEBRA ÁRABE.***

La palabra *al- jabr* aparece frecuentemente en los textos matemáticos árabes. Hay dos significados de la palabra *al-jabr*. El más corriente es «restauración», cuando se aplica a la operación de sumar términos iguales a los dos miembros de un a ecuación para eliminar cantidades negativas, o para «restaurar» una cantidad que se resta de un miembro para sumarla al otro.

Por ejemplo, una operación en la ecuación $2x + 5 = 8 – 3x$ que produce $5x + 5 = 8$, sería una ilustración de *al- jabr*.

Otro significado, menos corriente, sería el siguiente: multiplicar los dos miembros de una ecuación por un cierto número para eliminar las fracciones. Así si ambos miembros de la ecuación $(9/4)x + 1/8 = 3 + (5/8)x$ se multipicarán por 8 para dar la nueva ecuación $18x + 1 = 24 + 15x$, este también sería un caso de *al-jabr*.

El significado corriente de *al-muqabala* es la «reducción» de cantidades positivas en una ecuación por resta de cantidades iguales en los dos miembros de la misma. Así, para las dos ecuaciones anteriores, al aplicar la *al-muqabala* daría

$$5x + 5 = 8$$

$$5x + 5 – 5 = 8 – 5$$

$$5x = 3$$

y

$$18x + 1 = 24 + 15x$$

$$18x – 15x + 1 – 1 =24 – 1 + 15x – 15x$$

$$3x = 23$$

Las palabras *al-jabr* y *al-muqabala*, unidas por *wa*, que significa «y», se utilizaron para cualquier operación algebraica y, finalmente, para el tema en sí. Puesto que el álgebra de la época estaba casi por completo dedicada a la resolución de ecuaciones.

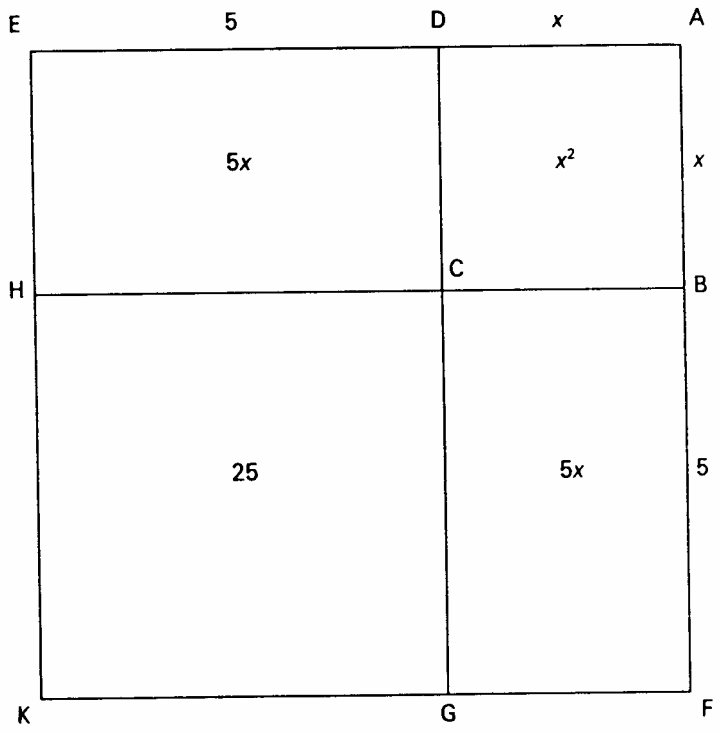
6.1 ॐ *Aproximación geométrica a la resolución de ecuaciones.*

Podemos ilustrar la aproximación geométrica de al-Khwarizmi volviendo al ejercicio, propuesto en el apartado dedicado a la resolución de ecuaciones de al-Khwarizmi. Recordemos cual era dicha ecuación:

$$\mathbf{x^2 + 10x = 39}$$

En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado x. AD y AB se amplían hasta E y F de tal manera que DE = BF = 5. El cuadrado AFKE se completa, y DC se extiende hasta G y BC hasta H. A partir del diagrama es claro que el área de AFKE es igual a

$$x^2 + 10x + 25 \quad \text{ó} \quad (x + 5)^2$$



Sumando 25 a ambos miembros de la ecuación $x^2 + 10x = 39$, tenemos

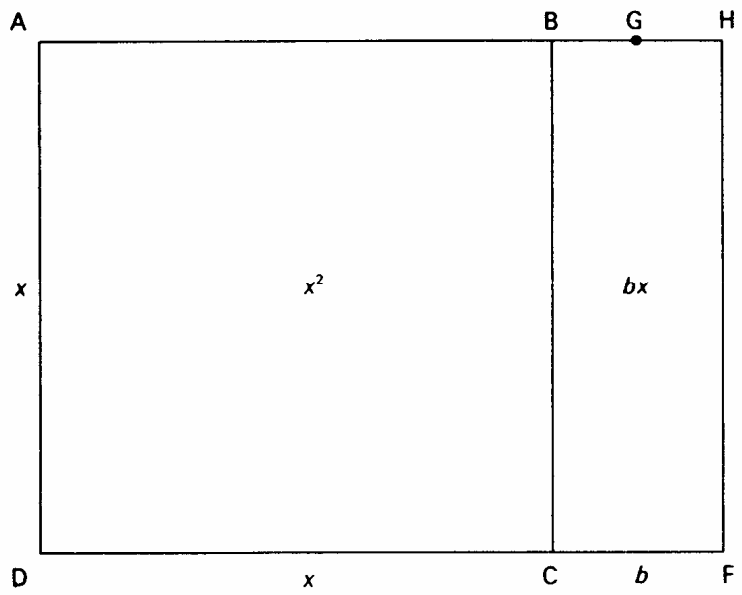
$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$

a partir de la cual se halla que uno de los lados de AFKE, por ejemplo, EK, es $x + 5 = 8$, y por tanto $EH = x = 3$.

Para cada tipo de ecuación al-Khwarizmi se basa en un ejemplo único.

Sin embargo, Thabit ibn Qurra presentó la primera demostración, utilizando dos de los teoremas de Euclides, en una obra titulada *Kitab filtatli listikhrag amal al-masail handasiya* (Sobre la correcta resolución de problemas algebraicos mediante métodos geométricos), de la que sólo ha sobrevivido un manuscrito. Podemos ilustrar esta demostración para el tipo de ecuación (4) visto anteriormente – cuadrados y raíces iguales a números, $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$.

En la siguiente figura



$$ABCD + BHFC = AHFD = x^2 + bx$$

La aplicación de un resultado de los elementos de Euclides, a la equivalencia de áreas da

$$AHFD + BG^2 = AG^2$$

Si G es el punto medio de BH. Ahora bien,

$AHFD = x^2 + bx = c$, $BG^2 = (\frac{1}{2} b)^2$, $AG^2 = c + (\frac{1}{2} b)^2$

Y, por consiguiente,

$$x^2 + bx + (\tfrac{1}{2} b)^2 = c + (\tfrac{1}{2} b)^2$$

6.2 ॐ *La resolución geométrica de las ecuaciones cúbicas de Omar Khayyam.*

Omar Khayyam, culminó la aproximación geométrica a la resolución de ecuaciones, en particular de las ecuaciones cúbicas generales. Exploró la posibilidad de utilizar métodos geométricos, en particular si se podían usar partes de cónicas que se cortan para resolver ecuaciones cúbicas.

Omar observó, que para cantidades *a, b, c y d*

$$B/c = c/d = d/a$$

Entonces

$(b/c)^2 = c/d\ d/a = c/a$

Ahora bien, si b= 1 la raíz cúbica de a puede calcularse siempre que c y d existan, de modo que

$$c^2 = d \quad y \quad d^2 = ac$$

La gran contribución de Omar Khayyam fue descubrir la lógica geométrica implícita en este álgebra.

Consideremos *c* y *d* variables y *a* constante, entonces en la siguiente figura, son las ecuaciones de dos parábolas con ejes perpendiculares y el mismo vértice. Las dos parábolas, con mismo vértice B, con los ejes AB (*a*) y CB (*b* = 1), se cortan en E. En el rectángulo BDEF, BF = DE = *c* y BD = FE = *d*.

Puesto que AB es un segmento lineal y el punto E está sobre la parábola con vértice B y eje AB, el rectángulo BDEF tiene la propiedad que

$$(EF)^2 = AB \bullet BF \quad \text{o} \quad d^2 = ac$$

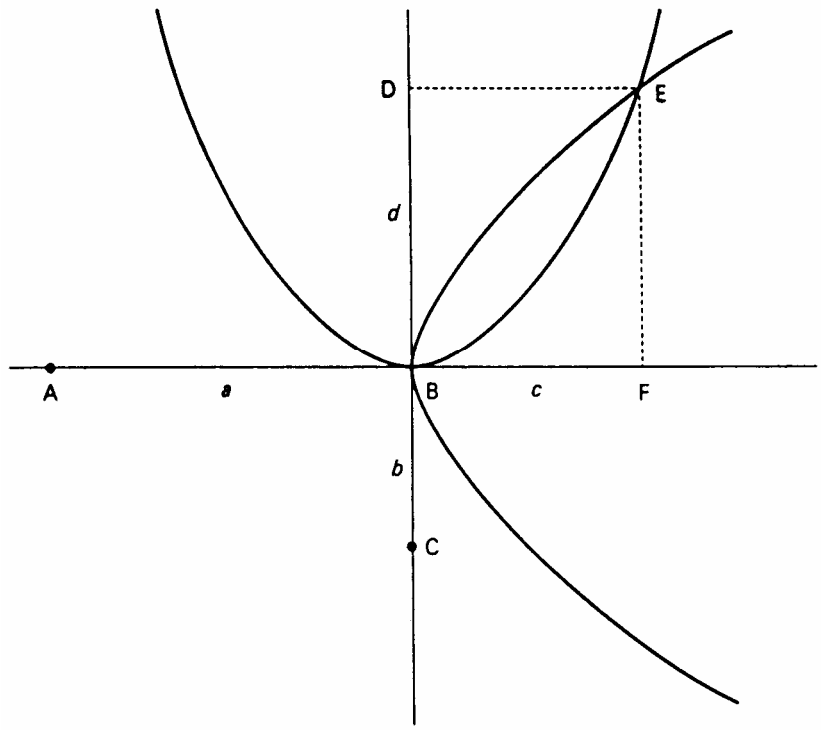
Similarmente, para la otra parábola con vértice B y eje BC,

$$(BF)^2 = CB \bullet BD \quad \text{o} \quad c^2 = bd = d$$

Por consiguiente, DE= BF es una raíz de la ecuación anterior.

Aplicando un razonamiento semejante, Omar amplió este método a la resolución de cualquier ecuación de tercer grado, con raíces positivas. Discutió 19 tipos de ecuaciones cúbicas (expresadas solamente con coeficientes positivos). Cinco de estos se podían reducir facilmente a ecuaciones cuadráticas. Cada una de las catorce ecuaciones restantes las resolció por

medio de secciones cónicas. Es posible clasificar estas catorce ecuaciones cúbicas utilizando la notación moderna, en cinco tipos principales.



Para ilustrar esta reducción, tómese una ecuación cúbica de la forma

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

donde los coeficientes *p*, *q* y *r* pueden ser positivos, negativos o cero. Haciendo z = x – p/3 en la ecuación anterior se obtiene una ecuaición de la forma

$$x^3 + gx + h = 0$$

donde los coeficientes *g* y *h* son de nuevo positivos, negativos o cero.

También fue importante la clasificación sistemática de Omar de las ecuaciones cúbicas y su demostración de una solución geométrica para cada tipo de ecuación. A pesar de las restricciones impuestas por el carácter del lenguaje matemático de la época (utilizó, o magnitudes geométricas, o números capaces de ser interpretados geométricamente), la claridad de la presentación de Omar es llamativa y los casos que no pudo demostrar fueron relativamente escasos.

Sabía que a veces había más de una solución positiva y a veces ninguna en absoluto (para secciones cónicas que no se cortan). Su descuido de las raíces negativas e imaginarias es perfectamente comprensible dado el clima matemático de la época. Pero esto no implica que los métodos por él usados no fueran adecuados para extraer raíces negativas.

7. ***LA GEOMETRÍA ÁRABE.***

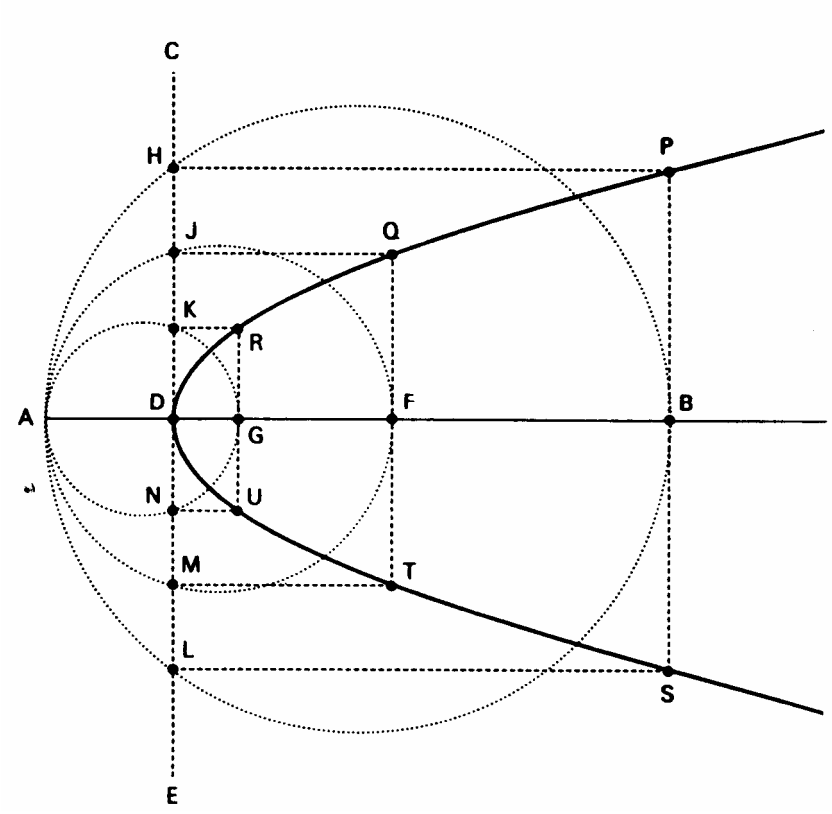
Si visitamos cualquier país árabe, poedemos observar como muchos de los edificios islámicos, están decorados con dibujos geométricos. Estos son rasgos característicos del arte islámico, que tiene una tradición ornamental, ya que la religión islámica representa generalmente a seres vivos. Esta habilidad artesanal, en materiales como la madera, el azulejo y los mosaicos, tuvo que requerir una destreza geométrica considerable en la construcción.

Por el año 950, Abul Wefa escribió un libro titulado *Kitab fi ma yahtaj ilayh al-sani min al-amal al-handasiyya* (Sobre las partes de la geometría que necesitan artesanos), que suministra diversas clases de construcciones, muchas de las cuales se pueden realizar solo con regla y compás. Sin embargo, los árabes realizaron su construcción de secciones cónicas con estos utensilios básicos.

Ejemplo 1: *Construir una parábola*.

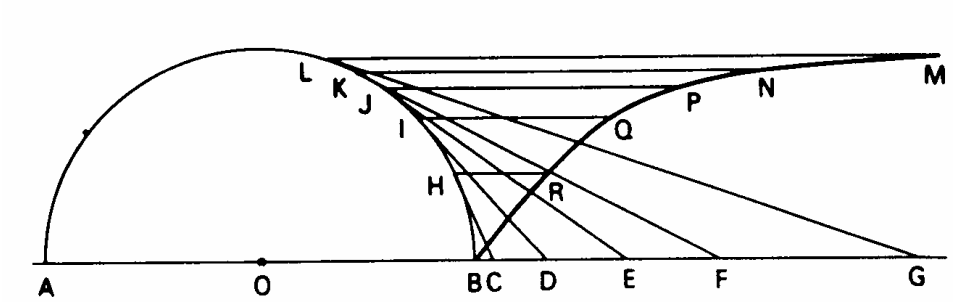
Método: Viendo la siguiente figura. Trácese una línea AB y constrúyase una perpendicular CE que corta a AB en D. Sobre el segmento lineal DB, márquense diversos puntos G, F,...Seguidamente, construimos círculos con diámetros AB, AF, AG,...que cortan CE en H y L, J y M, K y N, respectivamente. Por H y L, trazamos líneas paralelas a AB, y por B trazamos una línea paralela a CE. Hacemos que estas líneas por H, L y B se encuentren en P y S. Líneas similares trazadas por J, M y F, y por K, N y G, se cortan en los puntos Q y T, y R y U, respectivamente. Ibn Sina proporciona una prueba

de que todos esos puntos de intersección caen en una parábola. La parábola tiene un punto de inflexión en D, eje AB y parámetro AD.



Ejemplo 2: *Construir una hipérbola.*

Método: AB es un segmento lineal que es también el diámetro de un semicírculo, con centro en O. Prolongaremos AB en dirección de B. Escoger los puntos C, D, E,... y por elos construiremos tangentes al semicírculo: CH, DI, EJ. Desde los puntos H, I, J construiremos líneas paralelas a AB de manera que HR = HC, IQ = ID, JP = JE. Ibn Sina demuestra que los puntos M, N, P, Q, R,... B caen en una hipérbola.



Resulta dificil establecer los orígenes del matemático considerado por muchos como sucesor natural de al – Khwarizmi. La dificultad viene porque a veces las letras se distinguen no por sus formas diferentes, sino por la localización de un punto próximo a la letra. Lo llamaremos Al- Karaji. Sus numerosas contribuciones incluyen reglas de operaciones con exponentes, la resolución de ecuaciones de grado superior y una elaboración del "cálculo indio". También tradujo los primeros cinco libros del matemático alejandrino Diofanto.

7.1 ॐ Generalización de Thabit ibn Qurra del teorema de Pitágoras.

Thabit ibn Qurra no estaba deacuerdo en que la prueba llamada socrática, se utilizase unicamente en triángulos isósceles. Procedió a dar tres resultados, de los cuales el tercero, es una generalización del teorema de Pitágoras aplicable a todos los triángulos, rectángulos o no.

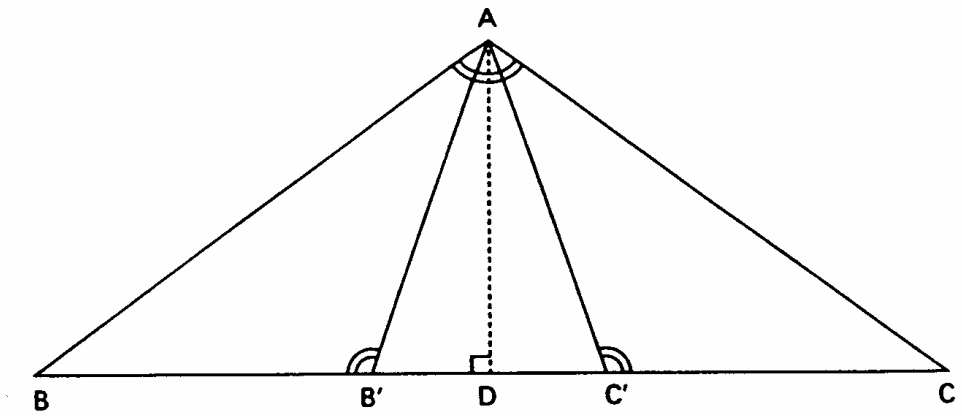
Consideremos un triángulo como el de la figura, que se construye de la manera siguiente. Desde el vértice A del triángulo ABC trazamos hacia abajo líneas que cortan la base BC en B' y C' y que forman los ángulos AB'B y AC'C, respectivamente, cada uno de los cuales es igual al ángulo BAC. Queremos demostrar que

$$AB^2 + AC^2 = BC\ (\ BB' + CC'\ )$$

Thabit ibn Qurra no da ninguna prueba, excepto decir que se sigue de Euclides.

Una reconstrucción de la prueba que utiliza triángulos semejantes es como sigue. Se puede demostrar facilmente que BAC, BAB' y CAC' son triángulos semejantes. Por lo que,

BC: AC: AB = AC: CC': AC' = AB: AB': BB'



Entonces

AB/BB' = BC/AB, por tanto $AB^2 = (BC)(BB')$

Y

AC/CC' = BC/AC , por tanto $AC^2 = (BC)(CC')$

Sumando las ecuaciones anteriores tenemos la generalización del teorema de Pitágoras de Thabit:

$$AC^2 + AB^2 = BC\,(BB' + CC')$$

La figura anterior nos muestra un triángulo obtusángulo, con el ángulo A mayor que un ángulo recto. Thabit tambien considera un triángulo acutángulo, en el que B' y C' caen fuera de BC, pero al que la prueba anterior todavía se aplica, y el triángulo rectángulo pitagórico, en el que B' y C' coinciden en D.

Todo esto de descubrió tardiamente, hacia el año 1953 en la biblioteca del museo Aya Sofia en Turquía. Sin embargo apareció por primera vez en las matemáticas europeas en 1685 cuando la prueba de John Wallis del teorema se publicó en su *Tratado sobre las secciones angulares*.

8. ***ACONTECIMIENTOS HISTÓRICOS EN LA CIENCIA DESDE EL AÑO 720 HASTA EL 1200 d.c.***

720. Los árabes franquean los Pirineos y penetran en el reino de los francos. Primera colonia árabe en Cerdeña.
732. Los árabes son vencidos en Poitiers por Carlos Marlet; es el fin del avance árabe en Europa.

Cultura, Ciencia y Técnica:

- Es la época de:
- El médico cristiano Yuhanna ibn Masawayh (Llamado Mesuyé el Viejo).
- Los Poetas Al Farazdaq. Al Akhtal y Jarïr.

- El pensador místico Hasan al Basri.
- La versión árabe de las fábulas de *Calila y Dimna* de Ibn al Muqafa (cuentos en persa antiguo inspirados en el *Panchatantra* indio).
- Las primeras pinturas del arte islámico.

SEGUNDA MITAD DEL SIGLO VIII

750. Abu'l Abbas funda la dinastía que llevaría su nombre (Abasí)
750-1258. Dinastía Abasí. Capital: Bagdad (desde el año 772). En esa época, el *hecho islámico* va distinguiéndose progresivamente del *hecho coránico*, convirtiendose el islam desde entonces en una "suma de ritos, instituciones, valores morales y culturales sistemizados bajo la influencia de fuerzas socioculturales muy complejas".
751.Batalla de Talas en el actual Kirguizistán, en la que el ejécito chino es derrotado por las tropas árabes. Pero los contraataques chinos detuvieron después los avances árabes en los límites de la Sogdiana.
754-775. Reinado del califa abasí Al Mansur.
756-1031. Dinastía de los Omeyas en España. Capital: Córdoba.
760. Expedición árabe contra Kabul (Afganistán).
761-911. Dinástía de los Rustamies en Tiaret.

762. El califa Al Mansur funda la ciudad de Bagdad.

768. El Sind, gobernado por los árabes.

786. Los árabes se apoderan de Kabul.

786-809. Reinado del califa abasí Harun ar Rashid.

786-922. Dinastía de los Idrisíes en el Magreb. Capital: Fez

795. Desórdenes en Egipto.

Cultura, Ciencia y Técnica:

Es la época de:

- La introducción de la ciencia, de las cifras y del cálculo indios en las tierras islámicas.
- Los astrónomos persas Abu Ishaq Ibrahim al Fazzari y Muhammad al Fazzari (su hijo), y el astrónomo judío Ya'qub ibn Tariq, que tradujeron el Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta. Y estudiaron, sin duda por primera vez en el Islam, la astronomía, la Aritmética y las Matemáticas indias.
- El astrólogo persa Al-Nawabakht y su hijo Al Fadl, jefe de la biblioteca del califda Harun ar Rashid.
- El astrónomo judío Mashallah.
- El cristiano Abu Yahya, traductor del *Tetrabiblos* de Ptolomeo.
- El persa cristiano Ibn Bakhtyashu', primero de una gran familia de médicos, jefe del hospital de Yundishapur.
- El alquimista sabeo Jabir ibn Hayyan (el Yeber de la Edad Media latina), que estudío las reacciones químicas y los enlaces entre sustancias químicas.
- El alquimista Abu Musa Ja' far al Sufi, que señaló en uno de sus escritos que hay dos tipos de destilación, según se opere con o sin fuego.
- El astrólogo crisitiano Teófilo de Edesa, traductor de obras griegas.
- El filólogo y naturalista Al Asmai'i.
- Abu Nuwas, uno de los más grandes poetas árabes.
- El poeta Abu al 'Atahiya.
- El pensador místico Abu Shu'ayb al Muqafa'.
- Los primeros fabricantes de papel de los países del islam.

FINALES DEL SIGLO VIII

Desde esa época se liberaron las provincias de Ifriqiyya (Africa), el Magred y Al-Andalus de los lazos que las unían al califato de Bagdad.

SIGLOS IX-XI

Epoca del desarrollo de los movimientos religiosos sunnitas (hanbalitas, malekitas, hanafitas, mutazilitas, zahiritas, etc.) y chiítas (immamitas, zayiditas, ismalaelitas, etc) y de las filosofía místicas sufí; las interpretaciones populares del Islam desplazan al Islam clásico, que queda reducido a un cierto número de signos rituales y culturales comunes. Es una época marcada también por el auge de la civilización arábido-islámica en todos los ámbitos. Fue entonces cuando se elaboraron las *Alf laila ua laila (Las mil y una noches),* obra maesta anónima de la literatura árabe, constituida por un conjunto de cuentos y leyendas, como los de Sherezade, Alí Babá, Simbad el Marino, la lámpara maravillosa, etc., que pasarían a formar parte del patrimonio mítico universal.

PRIMERA MITAD DEL SIGLO IX

800.Carlomagno es nombrado emperador de Occidente.
800-809. Dinastía Aghlabí en Ifriqiyya (territorio que comprendía Tunicia y una parte de la actual Argelia).
813-833. Reinado del califa abasí Al Ma'mun, gran mecenas que favoreció las traducciones y las obras culturales y cientificas.
826. Conquista de Creta por los árabes.
827-832. Conquista de Sicilia.
846. Saqueo de Roma por los sarracenos.

Cultura, Ciencia y Técnica

Es la época de:

- La fundación en Bagdad de la Casa de la Sabiduría *(Bayt al Hikma),* una especie de Academia de Ciencias, en la que se recibía con atención y entusiasmo la herencia cultural de la Antigüedad, y en la que comenzó el desarrollo de la ciencia arábigo-islámica.
- El astrónomo y matemático persa al- Khwarizmi, originario de Jiva, en el Juwarizm (o Jorezm). Su tratado sobre la numeración decimal posicional india y su tratado de álgreba sobre las ecuaciones cuadráticas contribuyeron en gran medida al conocimiento y la propagación de las cifras, de los métodos de cálculo y de los procedimiento algebraicos de origen indio, tanto en el mundo musulmán como en el Occidente cristiano. A él se debe también una interesante serie de problemas extraidos de la práctica de los mercaderes y de los ejecutores testamentarios, que requieren una gran habilidad matemática, debido a la compleja estructura de las herencias tal como se prescriben en el Corán.
- El matemático ‘Abd al Hamid ibn Wasi ibn Turk.
- El traductor cristiano Yahya ibn Batriq.
- Al Hajjaj ibn Yusuf, traductor de los *Elementos* de Euclides.
- El astrónomo y matemático Al Jauhari, que llevó a cabo uno de los primeros trabajos sobre la teoría de las paralelas.
- El astrónomo judío converso Sanad ibn ‘Ali, que hizo construir el observatorio de Bagdad.
- El filósofo mutazilita Al Nazzam.
- El gran filósofo y físico Al Kindi, que se interesó por la lógica y las matemáticas, tratando de analizar la esencia de la definición y de la demostración; a él se deben, además, tratados de óptica geométrica y de fisiología.
- El filósofo Al Jahiz, autor del célebre *Libro de los animales.*
- El astrónomo cristiano persa Yahya ibn Abi Mansur, autor de las *Tablas astronómicas comprobadas (Az zij al muntahan).*
- El astrónomo Abu Sa’id ad Darir, originario de las región del Caspio, autor de un tratado sobre el trazado del meridiano.
- El astrónomo Al ‘ Abbas, que introdujo la función tangente.

- El astrónomo Ahmad al Nahawandi de Yundishapur.
- El astrónomo Hasbah al Hasib, originario de Merv, que elaboró una tabla de tangentes.
- El astrónomo Al Farhani, originario de la Trasoxania, autor de una versión árabe del *Almagesto* de Ptolomeo.
- El astrónomo Al Marwarradhi, originario de Jorasán.
- El astrónomo Omar ibn al Farrukhan, originario del Tabaristán.
- El astrónomo judío Sahl Al Tabari, originario de Jorasán.
- El astrónomo judío Sahl ibn Bishr, originario de Jorasán.
- El astrólogo Abu Ma'shar, originario de Balkh (Jorasán).
- 'Ali ibn 'Isa al Asturlabi, renombrado fabricante de instrumentos astronómicos. – Al Himsi, que estudió la obra de Apolonio.
- Los hermanos Banu Musa idn Sahkir, traductores, matemáticos y mecánicos, autores de un tratado sobre los autómatas.
- Idn Sahda, traductor de obras de medicina.
- El médico cristiano Jibril ibn Bakhtyashu'.
- El médico cristiano Salmawayh ibn Bunan.
- El Cirujano Abu'l Qasim az Zahrawi (el Abul Kassim de la Edad Media Latina), originario de Córdoba.
- El farmacólogo cristiano Ibn Massawayh, autor de uno de los *aforismos.*
- El Escritor As Suli.
- El médico y filósofo 'Ali Rabban al Tabari, autor del *Paraiso de la sabiduría*, inspirado en los *Aforismos* del brahman herético indio Chanakya, del siglo III antes de Cristo.
- Los pensadores místicos Dhu 'an Nun Misri, Al Muhasibi, Ibn Karram y Bistami.
- Los poetas Abu Tammam y Buhturi.

SEGUNDA MITAD DEL SIGLO IX

868-905. Dinastía de los Tulunies en Egipto y Siria.

869. Conquista de Malta por los árabes.

875-999. Dinastía Samaní en el norte y este del actual Irán, Tayikistan y Afganistan, Capital: Bujara.

880. Italia es arrebatada a los árabes por Basilio I.

Cultura, Ciencia y Técnica

Es la época de:

- El Geómetra y Astrónomo Al Mahani, originario de la región de Kirman, que estudió los problemas de la división de la esfera según la ecuación cúbica que lleva su nombre.
- El astrónomo y matemático Al Nayrizi (el Anaritius de la Edad Media latina), originario de la región de Shiraz, que escreibio comentarios sobre Euclides y Ptolomeo.
- El matemático egipcio Ahmad ibn Yusuf, autor de una obra sobre proporciones.
- El matemático Thabit ibn Qurra, traductor del tratado de Arquímedes sobre la esfera y el cilindro, que llevó a cabo importantes trabajos sobre las secciones cónicas; aportó también una demostración especialmente clara del teorema de Pitágoras, la primera regla general para obtener pares de números amigos y un método para la construcción de cuadrados mágicos.
- Los aritméticos Abu Hanifa Ahmad y Al Kilwadhi.
- El astrónomo Al Battani (el Alabatenius de la Edad Media Latina), que acompoñó su teoría acerca de los planetas con numerosas anotaciones sobre trigronometría, cuidadosamente estudiadas más tardes por los astrónomos occidentales; determinó la inclinación de la ecliptica y la precisión de los equinoccios con gran precisión, utilizando las cotangentes de los ángulos.
- El astrónomo Hamid ibn ‘Ali.
- El astrólogo persa Abu Bark.
- El matemático y mecánico cristiano, de origen griego, Qusta ibn Luqa al Ba’albakki, que tradujo Las Mecanicas de Heron de Alejandría, acerca de la tracción de cuerpos pesados, y obras de Autolicos, Teodosio, Hipsicles y Diofanto.

- El médico cristiano Hunayn ibn Ishaq, que tradujo al árabe obras de medicina griegas, así como trabajos de Arquímedes, Teodosio y Menelao.
- El cristiano Yahya ibn Sarafyun, autor de una enciclopedia médica escrita en sirio.
- El farmacólogo Sabur ibn Sahl, originario de Yundishapur, autor de un recetario de antídotos.
- El gran clínico, alquimista y físico persa Muhammad Abu Bakr Ben Zakariyya al Razi (el Rhazés de la Edad Media Latina), considerado como el mejor médico de su tiempo; fue el primero en establecer una diferencia entre la rubéola y el sarampión; indicó cómo equipar un Laboratorio de química y se distinguiió también por sus trabajos sobre la destilación, en su *Sirr al asrar (Secreto de los secretos)*.
- El Filósofo Abu'l Hasan 'Ali ibn Isma'il Ash'ari, fundador de la escolástica musulmana y de la escuela de los Mutaqalimin. Expuso un sistema teologico en el que encontró cabida un automismo semejante al de Epicuro.
- El geógrafo Al Ya'qubi.
- El geógrafo persa Ibn Khurdadbeh, alias Ibn Hauqal, autor del Libro de los caminos y de las Provincias.
- El pensador místico Tirmidhi, llamado El Filósofo.
- Los poetas Mutanabbi e Ibn Sa'ad.

PRIMERA MITAD DEL SIGLO X

905. Fin de la dinastia Tuluní en Egipto y asunción del poder por los gobernadores de los califas.

909. Comienzo de la dinastía Fatimí en Ifriqiyya.

932-1055. La dinastía Buyí unifica Persia Oriental y la Media.

935. Muhammad ibn Tughaj reconquista Alejandría y el sur de Siria.

943. El califato de Bagdad confía el gobierno de Egipto a Ibn Tghaj por treinta años.

945. Los Buyies de apoderan de Bagdad. El califato ya no será, a partir de entonces, más que una “ficción jurídica”.

Cultura. Ciencia y Técnica.

Es la época de:

- El gran algebrista Abu Kamil, originario de Egipto, continuador de los trabajos de al-Khwarizmi, cuyos avances serán puestos al día, hacia 1206, por el matemático italiano Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci; también se deben a él interesantes fórmulas que conciernen al pentágono y al decágono.
- El geómetra Abu Ozman, traductor del libro X de los *Elementos* de Euclides y del *Comentario* de Pappus.
- Los traductores cristianos Matta ibn Yunus y Yahya ibn ‘Adi.
- El matemático, físico, astrónomo y médico Sinan ibn Tahbit.
- El matemático Ibrahim ibn Sinan ibn Thabit, que se interesó por problemas de construcción de las secciones cónicas y estudió el área de la parábola y los conoides.
- El matemático Abu Nasr Muhammad, autor de un interesante descubrimiento sobre el teorema del seno en trigonometría plana y esférica.

- El matemático Abu Ja’far al Khazini, originario de Jorasán, que se ocu´po de cuestiones de álgebra y geometría y resolvió la ecuación cúbica de Al Mahani mediante secciones cónicas.
- El astrónomo Al Husayn Ben Muhammad Ben Hamid, conocido bajo el nombre de Ibn al Adami.

- El Astrólogo y matemático Al ‘Imrani, autor de un comentario sobre el álgebra de Abu Kamil.
- Los aritméticos ‘Ali ibn Ahmad y Nazif ibn Yumm al Qass.
- Bastulus, renombrado fabricante de instrumentos astronómicos.
- El gran geografo y matemático Al Mas’udi.
- El geógrafo Qudama.
- El geógrafo Abu Dulaf.

- El geógrafo Ibn Rusta de Ispahán.
- El geógrafo persa Ibn al Faqih, originario de Hamadan.
- El geógrafo Abu Zayd de Siraf (Golfo Pérsico).
- El geógrafo Al Hamdani, de origen yemení.
- El gran filósofo Al Farabi (el Alfarabius de la Edad Media latina), originario del Turquestán, creador de una metafísica inspirada en Aristóteles, Platón y Plotino. Propuso en su Ihsa al ulum una "Clasificación de la ciencias" en cinco ramas: lingüística y filología, lógica, ciencias matemáticas (aritmética, geometría, perspectiva, astronomía, mecánica y "ciencia del peso"), física y metafísica, y por último, ciencias políticas, jurídicas y teológicas.
- El alquimísta y agrónomo conocido bajo el seudónimo de Ibn Wahshiya.

SEGUNDA MITAD DEL SIGLO X.

957. Los bizantinos ocupan el norte de Siria.

961-969. Los bizantinos reconquistan Creta y Chipre, así como Antioquía y Alepo (Siria).

962. Una tribu turca se apodera del reino afgano de Ghazna.

969. Los famitíes tunecinos ocupan Egipto, sin encontrar resistencia, e instalan allí su Corte.

973. Fundación de la ciudad de Al Kahira (El Cairo).

998-1030. Reinado de Mahmud el Ghaznaví, sobre el actual Afganistán, Jorasán y diversas regiones conquistadas en el norte de la India.

Cultura, ciencia y técnica.

Es la época de:

- La fundación en El Cairo de la ***Dar al Hikma*** (Casa de la Sabiduría), especie de Academia de ciencias semejante a la de Bagdad.
- La fundación de la universidad Al Azhar en El Cairo.
- El pleno desarrollo de las ciencias en el califato de Córdoba, gracias a la protección del califa Al Hakam II, que reunió una inmensa biblioteca.
- El matemático Abu´l Wafa, originario de Quistán, que escribió comentarios sobre las obras de Euclides, Diofanto y al-Khwarizmi, y

cuyos trabajos sobre trigonometría mejoraron los métodos de cálculo triángulos esféricos utilizando la tangente y reemplazando la "regla de los seis segmentos" de Melenao sobre el cuadrilátero por la de dos de los lados; gracias a ël conocieron los árabes la *Aritmética* de Diofanto, con sus estudios de álgebra y de teoría de números.

- El matemático Al Uqlidisi (El Euclidiano), que publicó una importante exposición sobre las fracciones decimales.
- El astrónomo y matemático persa Abderramán al Sufin, autro de un catálogo de estrellas que contenía la primera observación conocida de la nebulosa de Andrómeda.
- El matemático As Sijzi, originario del Sisystán, que estudio problemas de intersecciones de cónicas y la trisección del ángulo.
- El matemático Al Khujandi, originario de la región de Sir Daria, que estableció su teorema del seno relativo a triángulos esféricos y probó que la suma de dos cubos no puede ser igual a un cubo.

PRIMERA MITAD DEL SIGLO XI.

1000. Primeros enfrentamientos en Jorasán entre los ghaznavíes y los selyucidas (turcomanos desplazados de Asia central por los ejércitos chinos).
1001-1018. Mahmud el Ghaznaví se apodera de Peshawar, tras lo cual aplasta una coalición hindú y saquea Mathura, ciudad sagrada de la India.
1030. Los ghaznavíes son aplastados por os selyúcidas.
1030-1050. Los selyúcidas toman posesión de las diversas ciudades de la Persia oriental y más tarde de la Persia occidental (enfrentándose allí a los buyíes), antes de emprender sus conquistas hacia Siria y Asia Menor.

Cultura, ciencia y técnica.

Es la época de:

- El matemático, astrónomo, físico y geógrafo Al Biruni, originario de Jiva, en el Jorezm, que hizo un largo viaje a la India, donde aprendió sánscrito y se inició en las ciencias indias, tras lo cual redactó un largo texto sobre esa

civilización y numerosas obras de astronomía, aritmética y matemáticas; procedió a un nuevo cálculo de las tablas trigonométricas utilizando conceptos de Arquímedes equivalentes al teorema de Ptolomeo.

- El matemático Kushiyar ibn Labban al Gili, originario d ela región al sur del Caspio, que trabajó la matemática india y el cálculo sexagesimal.
- El matemático persa An Nisawi, originario de Jorasán, continuador de la aritmética y el álgebra de al- Khwarizmi.
- El filósofo cristiano Miskawayh, precursor de Ibn Khaldún en cuanto a su pensamiento racionalista.

SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XI.

1050. Período de agitación en Egipto. Badr al Jamali restablece el orden y dirige el país en nombre de los Fatimíes hasta 1121.

1055. El selyúcida Tughril Beg entra en Bagdad como protector del califato.

1055-1147. Dinastía almorávide en el Magreb.

1076. Los selyúcidas conquistan Damásco y Jerusalén.

1085. Los cristianos se apoderan deToledo.

1096. Comienzo de la primera Cruzada («Cruzada del pueblo»). Los cruzados, mal organizados, son masacrados en Asia Menor.

1097-1099. Los cruzados se apoderan de Nicea, derrotando a los turcos en Dorileo, y conquistan Jerusalén.

Cultura, ciencia y técnica.

Es la época de:

- El gran poeta y matemático Omar Khayyam, nacido en Nishapur, autor de las *Rubbayat*, importante colección de poemas; escribió también comentarios sobre la teoría d elas proporciones y las ecuaciones de tercer grado, proponiendo soluciones geométricas para alguna de ellas.
- El astrónomo andalusí Al Zarqali, de Córdoba, autor de la remodelación del *Planisphaerium* de Ptolomeo.
- El filósofo místico Abu Hamid al Ghazali (el Algazel de la Edad Media latina), cuyas enseñanzas se oponían al progreso en el Islam.

PRIMERA MITAD DEL SIGLO XII

1100. Fundación de un reino feudal cristiano de Jerusalén.
1125. Rebelión de los masmudas del Atlas bajo la dirección de Ibn Tumert, iniciador de la doctrina almohade.
1136. Córdoba, capital cultural del Occidente musulmán, es conquistada poe Fernando III, rey de Castilla y León.
1147. ‘ Abd al Mu´min, sucesor de Ibn tumert, vence a los almorávides y se proclama califa, después de haberse apoderado de Fez (en 1146) y Marrakech (en 1147). A continuación, extienden sus conquistas a Ifriqiyya y Al-Andalus.
1148. Los cruzados son derrotados en Damasco.

Cultura, ciencia y técnica.
Es la época de:

- El matemático andalusí Jabir ibn Aflah, de Sevilla, que se distinguió sobre todo por sus trabajos de trigonometría.
- El gran geógrafo andalusí Al Idrisi, contribuyo de forma importante al desarrollo de la cartografía matemática.
- El matemático judio español Abraham ibn Ezra (más conocido como Rabbi Ben Ezra).

SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XII.

1150. Allah ud din Huayn, sultán de Ghur, aniquila el Imperio ghaznaví.
1169-1171. Salah ad din (Saladino), musulmán de origen kurdo, sucede a su tío como visir de Egipto, poniendo fin al reino fatimí, y reconociendo como soberanos únicamente a Nur ad din, unificador de Siria, y al califa abasí de Bagdad.
1174. Saladino sucede a Nur ad din y funda la dinastía Ayyubí, que dominaría a partir de entonces Egipto y Siria. Apoyandose en los medios árabes “tradicionalistas”, proclama la «Guerra Santa» contra los cristianos

occidentales, reforzando consiguientemente la vinculación de las poblaciones orientales a las tradiciones árabes e islámicas.

1187. Saladino reconquista Jerusalén a los cristianos. Victoria de los almohades en Gafsa, bajo la dirección del sultán magrebí Abu yusuf Ya qub al Mansur (Almanzor).

1188.Gengis Kan unifica a los mongoles.

1191. Conducidas por Muhammad de Ghur derrota a Prithiviraj y se apoderan de Delhi.

1193. Los musulmanes se apoderan de Bihar y de Bengala, en la India.

1195. Victoria d elos almohades en Alarcos.

Cultura, ciencia y técnica.

Es la época de:

- El matemático Al ‘ Amuni Saraf ad din al Meqi.
- El matemático, filosofo y médico judeoconverso, originario del Magreb, As Samaw ‘ al ibn Yahya al Maghribí,continuador de la obra de Al Karaji.
- El enciclopedista y matemático persa Fakhr ad din al Razi.
- El gran filósofo judío Maimónides (Rabbi Moseh ibn Maimon), originario de Córdoba, cuyo interés enciclopédico abarcó la astronomía, las matemáticas y la medicina.
- El gran filósofo andalusí Ibn Rushd (Averroes; Córdoba, 1126-Marrakech, 1198), a quien debe la filosofía árabe su más pleno desarrollo. Además de importantes obras en defensa del estudio filosófico de la religión y contra los teólogos, escribió comentarios sobre muchas obras de Aristóteles y sobre la *República* de Platón, que ejercieron una profunda influencia en la Europa occidental.
- El filósofo y médico andalusí Ibn Tufayl (Abentofail; Guadix, 1109/1110 – Marrakech, 1185/1186).
- El pensador místico Ruzbehan Baqli.
- El poeta místico persa Nizami.
- El poeta persa Khaqani.

9. ☙ ***EVALUACIÓN FINAL DE LA CONTRIBUCIÓN ÁRABE.***

Las matemáticas del Islam, asimilaron los descubrimientos griegos e indios, prescindiendo de algunos aspectos demasiado teóricos para desarrollar con preferencia temas más conformes con su enfoque práctico.

Reunieron con sumo cuidado las obras matemáticas de origen griego e indio que llegaron hasta ellos.

En sus contribuciones al álgebra y a la trigonometría, combinaron dos líneas matemáticas diferentes – las tradiciones algebraicas y ariméticas tan evidentes en las culturas de Babilonia, la India y la China, y las tradiciones geométricas de Grecia y del mundo helenístico -. Nos dieron un eficaz sistema de numeración, en el que los cálculos estuvieron más ligados a dispositivos mecánicos, un álgebra práctica y rigurosa al mismo tiempo, una geometría que dejo de ser un pasatiempo intelectual y una trigonometría liberada de la astronomía, convirtiéndose así, en algo indispensable para la óptica y la topografía.

Como ya hemos visto, el representante más detacado del álgebra fue al – Khwarizmi, y en el campo de la geometría, Thabit ibn Qurra. Cada uno permaneció abierto a las influencias del otro, como se ven en las aproximaciones geométricas de al-Khwarizmi a la resolución de las ecuaciones cuadráticas y el descubrimiento de Thabit de una regla para generar números amigos.

La historia junto con la religión, conspiraron en Europa para refrenar el flujo de ideas procedente del mundo árabe en una época en que Europa estaba saliendo de su prolongado letargo y dando los primeros pasos.

LAS MATEMÁTICAS DEL ISLAM.

1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

2. PRINCIPALES MATEMÁTICOS ÁRABES.

2.1 *Al – Khwarizmi*.

2.1.1 al- Jabr: Álgebra.

2.1.2. Las ecuaciones cuadráticas.

2.1.3. La fundamentación geométrica.

2.1.4 Un problema de Herón.

2.2 *Thabit ibn Qurra*.

2.2.1 Los numerales árabes.

2.3 Omar Khayyam.

3 OTROS SABIOS DEL ISLAM.

3.1 Ibn Sina (980-1037)

3.2 Al- Biruni (973-1048)

3.3 Ibn- al- Haytan (965-1039)

3.4 Abul Wefa y Al-Karkhi.

4. LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE.

4.1 Deducción de las relaciones trigonométricas.

4.2 Construcción de las tablas trigonométricas.

5. ☙ LA ARITMÉTICA ÁRABE.

5.1 ॐ Las operaciones aritméticas.

5.2 ॐ Las fracciones decimales.

5.3 ॐ La teoría de los números.

5.4 ॐ La extracción de raíces.

6. ☙ EL ÁLGEBRA ÁRABE.

6.1 ॐ Aproximación geométrica a la resolución de ecuaciones.

6.2 ॐ La resolución geométrica de las ecuaciones cúbicas de Omar Khayyam.

7. ☙ LA GEOMETRÍA ÁRABE.

7.1 ॐ Generalización del Teorema de Pitágoras de Thabit ibn Qurra.

8. ☙ ACONTECIMIENTOS HISTÓRICOS EN LA CIENCIA DESDE EL AÑO 720 AL 1200D.C

9. ☙ EVALUACIÓN FINAL DE LA CONTRIBUCIÓN ÁRABE.

***BIBLIOGRAFÍA*.**

- George Ghererghese Joseph.

  " LA CRESTA DEL PAVO REAL. *Las matemáticas y sus raíces europeas*."

  Editorial: Pirámide.

- Jean Paul Collette.

  "HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS I ".

  Editorial: Siglo XXI de España editores S.A.

- Georges Ifrah.

  "HISTORIA UNIVERSAL DE LAS CIFRAS. *Ensayo y pensamiento*".

  Editorial: Espasa (e) Fórum.

- Carl B. Boyer.

  "HISTORIA DE LA MATEMÁTICA".

  Editorial: Ciencia y Tecnología de Alianza Editorial.