Indice.

Pag.

INTRODUCCIÓN.

Las culturas desarrolladas en Egipto y Mesopotamia, ya habían perdido casi todo su impulso mucho antes de que comenzara la era cristiana, pero a la vez que se acentuaba este declive surgían con una fuerza indescriptible nuevas culturas a lo largo de todo el mediterráneo y entre ellas, la cultura helénica fue la principal abanderada en el terreno cultural.

El helenismo nunca logró la unidad, ni en su época de máximo apogeo ni cuando fue amenazado con la destrucción, ahora bien, en menos de cuatro siglos construyeron las bases de una nueva ciencia que aún perdura hasta nuestros días. Este logro insólito se llamó Matemáticas.

El estudio del problema de la duplicación del cubo ha estado siempre ligado a otros dos dilemas de la antigüedad. No se puede hablar de uno de ellos sin al menos comentar los otros dos. Juntos han pasado a la historia como los tres problemas clásicos o famosos.

- La cuadratura del circulo
- La duplicación del cubo.
- La trisección del ángulo.

Estos tres problemas fueron propuestos en Grecia aproximadamente en el siglo V a. C.

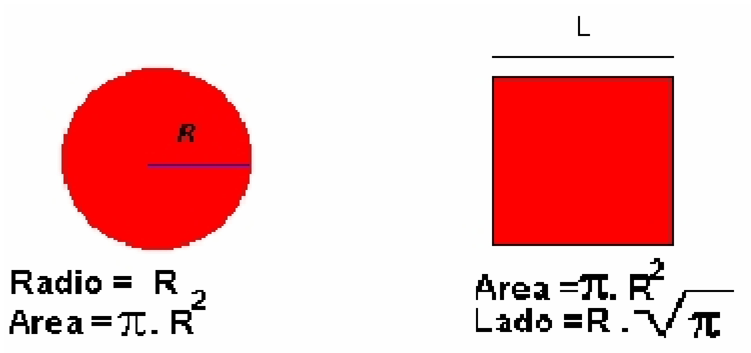
La demostración de que estos tres problemas no pueden ser construidos exactamente utilizando únicamente regla y compás no llegó hasta 2200 años más tarde.

No obstante la mejor parte de la matemática griega y también buena parte del pensamiento matemático muy posterior vino motivada por los esfuerzos para lograr su resolución respetando las reglas de la época heroica. Nos referimos con el nombre de “Época Heroica de la Matemática”, puesto que raramente antes ni después se ha enfrentado el hombre con problemas matemáticos de una importancia tan fundamental con tan pocas herramientas.

Las reglas de la época heroica consisten en la resolución de estos problemas utilizando solamente regla sin marcas y compás, instrumentos que, al parecer son los que utiliza Euclides en su obra. Son problemas sin solución exacta usando regla y compás, cosa que se ha probado mucho después, aunque tienen solución por otros métodos como el uso de las cónicas, ciertas curvas como la cisoide de Diocles o la concoide de Nicomedes.

LA CUADRATURA DEL CIRCULO

Consiste en construir un cuadrado de área igual a un círculo dado. Si tenemos un círculo de radio conocido R, su área es la que aparece en la figura y hay que buscar un cuadrado que tenga el área igual (como en la figura).



Este problema no tiene solución con regla y compás.

Lindenman (1852-1939), un matemático alemán, demostró que era imposible construirlo exactamente con regla y compás. El número π tuvo desconcertados a los matemáticos bastante más tiempo que el número *e*, tanto Lambert como Legendre habían demostrado que tanto π como π^2 eran irracionales, pero estas demostraciones no resolvían el viejo problema de la cuadratura del círculo. El asunto alcanzó al fin su solución definitiva en 1882, en un articulo de Lindenman, el articulo titulado “Über die Zahl π”.

Lo primero que hacía era demostrar que π era un número trascendente. Si los coeficientes de la ecuación:

$$ax^n + bx^{n-1} + ... + px + q = 0$$

son números enteros $a, b, ..., p, q,$ y $n > 2$, entonces las raíces de la ecuación no se pueden en general construir por métodos euclídeos. Las raíces de una ecuación algebraica de este tipo, siendo $n > 0$, reciben el nombre de “números algebraicos”. Y como todo número racional es raíz de una ecuación tal, con $n = 1$, surge de manera natural la cuestión de si todo número irracional será o no raíz de una ecuación de esta forma, para algún $n \geq 2$. La respuesta negativa a esta pregunta la dio finalmente Liouville en 1844, al construir una amplia clase de números reales no algebraicos. Este tipo de números se llamó “números trascendentes”

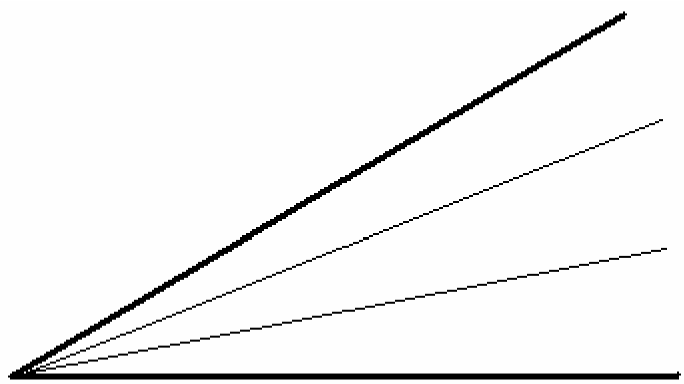
En su demostración continuaba con la demostración que la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$ no se verifica para x algebraico, ahora bien, como Euler había demostrado que $x = \pi$ satisface la ecuación, la única posibilidad es que π no sea algebraico. Aquí estaba por fin la respuesta definitiva al clásico problema de la cuadratura del círculo. Para que la cuadratura del círculo fuera posible con una raíz expresable por medio de raíces cuadradas. Dado que π no es algebraico, el círculo no es cuadrable con regla y compás según las reglas clásicas.

TRISECCIÓN DEL ANGULO

Consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales utilizando solamente regla y compás ya que eran las únicas herramientas utilizadas en esta época según las reglas de Euclides.

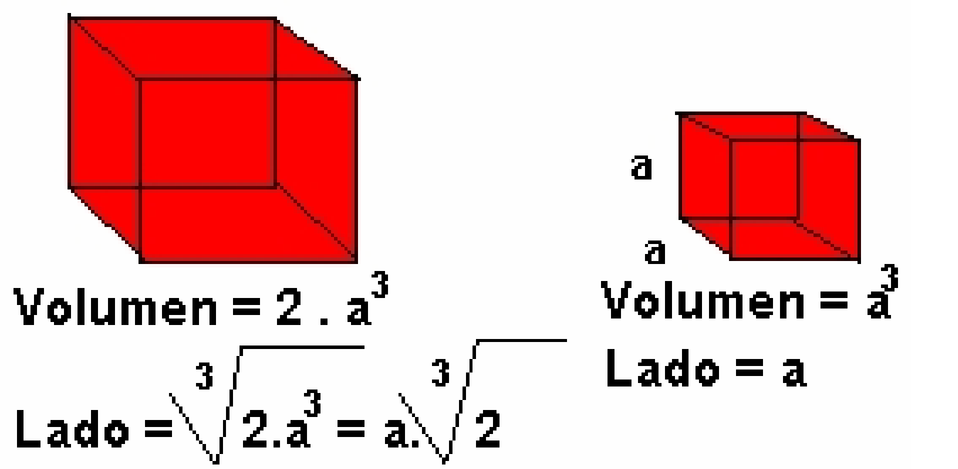
Pero esta construcción es imposible de realizar exactamente.

En la antigüedad era el problema clásico más complicado, ya que a veces se consiguió duplicar un cubo o cuadrar un circulo sin muchas complicaciones pero trisectar el ángulo es mucho más difícil.



LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo inicial. Para eso habría que construir un segmento de longitud igual a la raíz cúbica de 2. Y esto es imposible utilizando solamente regla y compás ya que se trata de un número inconmensurable después llamado irracional.



Ha sido considerado el problema más importante e influyente de la antigüedad, muchos de los intentos para su resolución han desembocado en la aparición de nuevas y útiles herramientas matemáticas.

2.-HISTORIA DEL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO.

2.1.-ORIGEN

El origen del problema de la duplicación del cubo se creé que comenzó en el oráculo de Delos.

Fuera del mito, la historia nos enseña que el primer templo de Delfos data de fines del II milenio antes de nuestra era. Construido en la ladera sur del monte Parnaso, está enmarcado por el acantilado rosado de Rhodini y el florido acantilado de Phlemboucos, entre los cuales brota la fuente sagrada de Castalia.

Los peregrinos llegan al lugar ya sea por mar, desembarcando en el pequeño puerto de Kirrha, o por tierra, franqueando el paso de Arachova. A partir del siglo VI, la cercana ciudad de Delfos comienza a obtener ganancias del paso de los peregrinos. En el 548, un incendio destruye el templo: es reconstruido, esta vez más grande y más hermoso, gracias a una suscripción panhelénica. Al comienzo, el oráculo se presenta una vez al año. Debido al éxito cada vez mayor, los sacerdotes adoptan un ritmo mensual y emplean dos, luego tres pitonisas, A pesar de todo, los que vienen a consultar esperan muchas veces varios días antes de que llegue su turno. Estas jornadas son consagradas a las ofrendas, a los sacrificios y a las purificaciones. La gente se refresca en la fuente de Castalia.

El oráculo cobra caro; la persona que consulta debe comprar un pastel muy costoso que ofrece sobre un altar, frente al santuario; luego, sobre otro altar, sacrifica una oveja o una cabra.

Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, que azotó Grecia en torno al año 433 a.C. y mató a un cuarto de la población, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo para ofrecerle mayor ofrenda. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; Sus artesanos cayeron en gran perplejidad en sus esfuerzos para descubrir como el altar había aumentado ocho veces su tamaño cuando se dobla el tamaño de su arista.

La plaga seguramente era un suceso importante en la historia de Grecia y muchos de sus intelectuales se dispusieron a descubrir el misterio que rodeaba aquel bloque de piedra. Este enigma ha seguido interesando a multitud de pensadores en el curso de la historia formándose así uno de los más importantes problemas.

2.2. DESARROLLO DEL ESTUDIO DEL PROBLEMA A TRAVES DE LA HISTORIA POR DISTINTOS AUTORES.

2.2.1.-HIPÓCRATES DE QUIOS

Nació en la isla de Quios, en la segunda mitad del siglo V a.C. Según Aristóteles, aunque destacado como geómetra, era estúpido y falto de sentido común en otros aspectos. Fue estafado por los piratas y para recuperar su fortuna se trasladó a Atenas donde debió dedicarse a la enseñanza para sobrevivir.

A Hipócrates debemos un primer tratado sobre geometría en el que se exponen teoremas a partir de unos axiomas y postulados. Aunque no nos ha llegado su obra directamente, sabemos de ella a través de los relatos de Eudemo, 335 a. C., resumidos por Simplicio en el 530 d. C También podemos encontrar parte del trabajo de Hipócrates entre los teoremas que aparecen en los "Elementos" de Euclides.

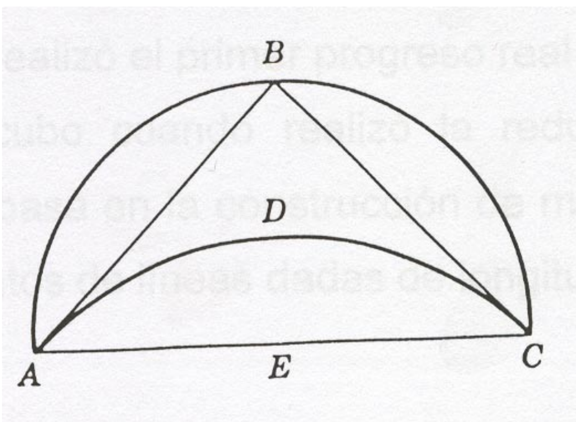
Entre los mayores logros de Hipócrates está el haber demostrado que las áreas de dos círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Es posible que llegara a esta conclusión considerando el círculo como el límite de un polígono regular. Presentándose aquí un primer ejemplo de lo que más tarde sería el método exhaustivo.

Hipócrates también estudió con muy buenos resultados la cuadratura del circulo.

Nadie había conseguido la cuadratura de una figura con líneas curva y empezaba a intuirse que resultaría imposible. Sin embargo, Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura con lados curvados, conocida como lúnula. Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos, parece evidente pues, que el problema de la cuadratura de las lúnulas debió surgir del de la cuadratura del círculo. Según Hipócrates:

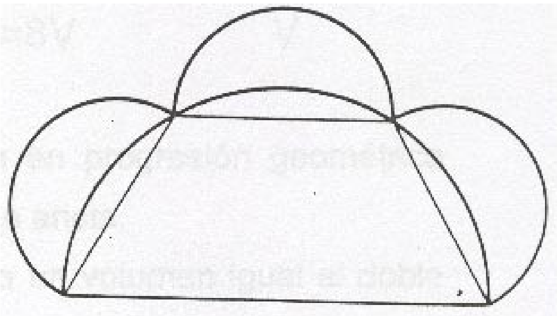
“Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases”

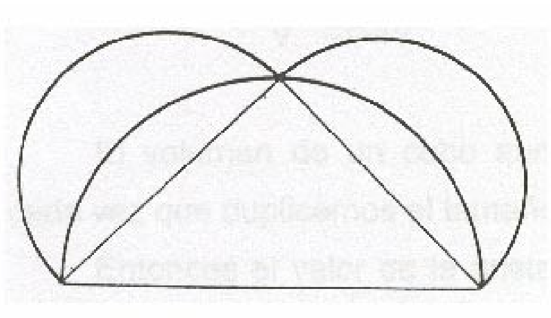
A partir de su teorema sobre los círculos consiguió fácilmente la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de la matemática. Pero la lúnula cuadrada por Hipócrates fue una especialmente construida por él, se trataba de un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles y sobre la base construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo. El centro del segmento circular inscrito tiene de centro el punto de unión de la circunferencia de centro E y radio la altura del triángulo con la línea BE, ese pequeño segmento circular es el lugar geométrico del incentro.



Como los segmentos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus bases, a partir del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo se obtiene que la suma de los dos segmentos circulares menores es igual al segmento circular mayor.

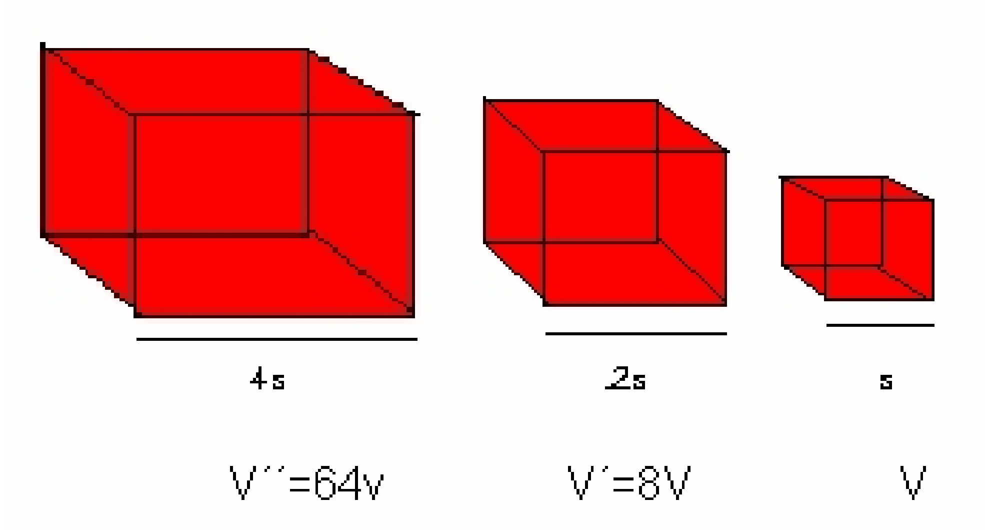
Más tarde Hipócrates consiguió cuadrar otros dos casos particulares de lúnula.





La primera intuición de los matemáticos griegos era cierta, y que la cuadratura de figuras curvilíneas con regla y compás era imposible salvo algunas excepciones como la de las lúnulas cuadrables de Hipócrates.

Hipócrates realizó el primer progreso real en el problema de la duplicación del cubo cuando realizó la reducción que lleva su nombre. Esta se basa en la construcción de medias proporcionales entre dos segmentos de líneas dadas de longitud s y 2s.



El volumen de un cubo aumenta en progresión geométrica cada vez que duplicamos el tamaño de la arista.

Entonces el valor de la arista para un volumen igual al doble del inicial, se debe de encontrar entre *s* y *2s*, como se encuentra en una progresión geométrica habrá que utilizar la media proporcional también llamada media geométrica.

Esto es lo que se llama reducción de Hipocrates, se trata en la simplificación del problema de la duplicación del cubo a una media proporcional.

Si denotamos las dos medias proporcionales por x e y entonces de estas proporciones tenemos:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$$

De modo que:

$$x^2 = sy$$
$$y^2 = 2sx$$

De donde:

$$y = \frac{x^2}{s}$$

Esto implica:

$$\left(\frac{x^2}{s}\right)^2 = 2xs$$

Así que:

$$\frac{x^4}{s^2} = 2xs$$

En consecuencia → $x^3 = 2s^3$

Así, x es el lado de un cubo que tiene el doble del volumen del cubo de lado s.

2.2.2.-ARQUITAS.

Nació aproximadamente en el 428 a.C.
Murió aproximadamente en el 350 a.C.

Uno de los últimos pitagóricos. No vivió en Atenas, sino en Tarento, en el sur de Italia. A pesar de ello estuvo en contacto con los filósofos de Atenas, siendo Platón uno de sus amigos.

Destacó por su dedicación a la vida pública y por su contribución a una educación liberal, estableciendo el cuadrivium de las ciencias formado por la aritmética, la música, la geometría y la astronomía. Unidas al trivium de Zenón (gramática, retórica y dialéctica), formaban las siete artes liberales.

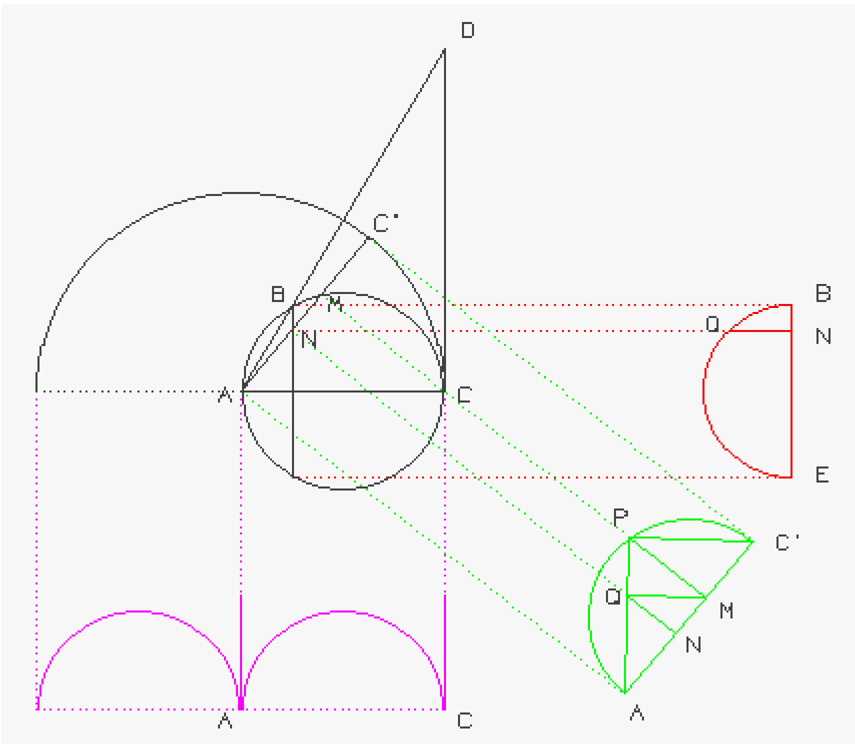
Es muy probable que Arquitas tuviera acceso a algún tratado anterior sobre los elementos de la matemática, y de hecho, el proceso iterativo para el calculo de raíces cuadradas que se conoce a veces con el nombre de Arquitas había sido utilizado mucho antes en Mesopotamia. No obstante, sabemos que a Arquitas se le deben también algunos resultados originales importantes.

La contribución fundamental de Arquitas a las matemáticas fue su resolución del problema de la duplicación del volumen del cubo, especialmente cuando se considera su fecha, porque no es una construcción en un plano sino que es una construcción en tres dimensiones.

Determinando punto por la intersección de tres superficies de revolución:

- Un cono.
- Un cilindro.
- Un toro.

Suponer dos segmentos AC, AB entre los cuales debemos encontrar las dos medias proporcionales y AC es el diámetro de un circulo y AB es una cuerda del círculo.



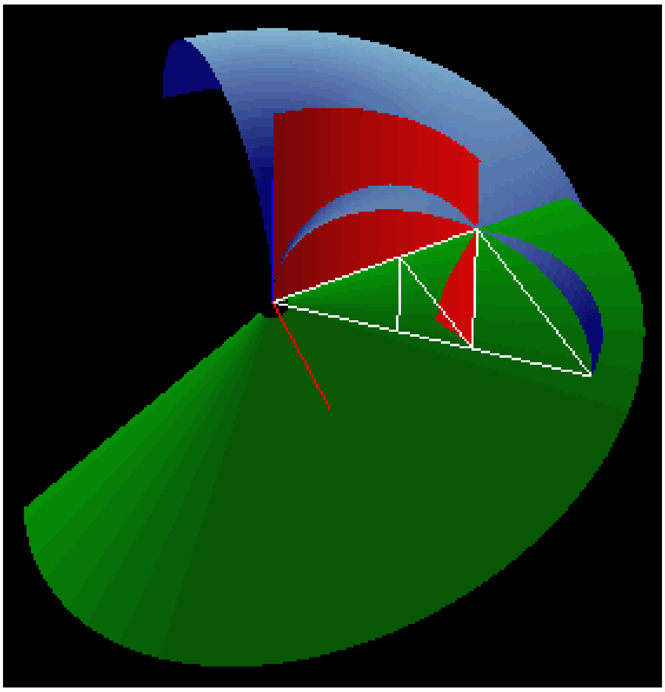
Se dibuja un semicírculo con AC como diámetro, pero en un plano perpendicular al plano formado por el circulo ABC

Se imagina este semicírculo girando a través de una línea perpendicular al plano formado por ABC y que pasa por A, con lo que describimos un medio toro.

A continuación dibujamos un medio cilindro con el semicírculo ABC como base, esta figura corta la superficie del toro formando una curva.

Ahora unir CD, que es la tangente al circulo ABC por el punto C, con AB con lo que hallamos otro punto de corte D. Y suponer que el triángulo ADC gira tomando AC como eje. Este generará un cono.

La superficie del cono de revolución se encontrará en algún punto P de la curva formada por la intersección del medio cilindro y el medio toro.



Siendo APC´ la correspondiente posición del semicírculo (triángulo blanco). Cuando la circunferencia ABC corte a la recta AC´ tenemos el punto M.

Dibujando PM que es perpendicular al plano formado por el triángulo ABC.

La línea AP se encuentra con el semicírculo BQE en Q, después aparece el punto N en la unión de AC´ con BE.

Entonces, desde ambos semicírculo que son perpendiculares al plano ABC, su línea de intersección es QN.(Euclides XI.19) Entonces QN es perpendicular a BE y AM.

Por lo tanto $QN.QN = BN.NE = AN.NM$ (Euclides III.35), el ángulo AQM es un ángulo recto. Pero el ángulo APC´ es también un ángulo recto, por lo tanto MQ es paralelo a C´P.

Por triángulos semejantes:

$$\frac{C'A}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AQ}$$

Lo que es lo mismo:

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AB}$$

Entonces AB, AM, AP, AC están en proporción continua y AM, AP son las dos medias proporcionales buscadas.

2.2.3.-MENECMO

Menecmo, hacia 350 a.de C., se ocupa del problema clásico de la duplicación del cubo.

Redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1. Si encontramos x e y tales que:

$$\frac{2}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{1}$$

Es decir, el cubo de lado X es de volumen doble que el de lado Y.

Si x, y son las dos medias proporcionales buscadas entre dos segmentos de línea recta a, b es decir:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

El descubrimiento de la elipse fue el primero, parece haber sido hecho como un mero subproducto de la investigación en la que lo que se buscaba realmente eran la parábola y la hipérbola, que presentaban las propiedades necesarias para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Menecmo fue probablemente el primero en usar las secciones cónicas y sus propiedades. Menecmo no podía prever la gran cantidad de bellas propiedades que el futuro se iba a encargar de descubrir en sus curvas. Él había dado con las cónicas como resultado de una afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema de la duplicación del cubo.

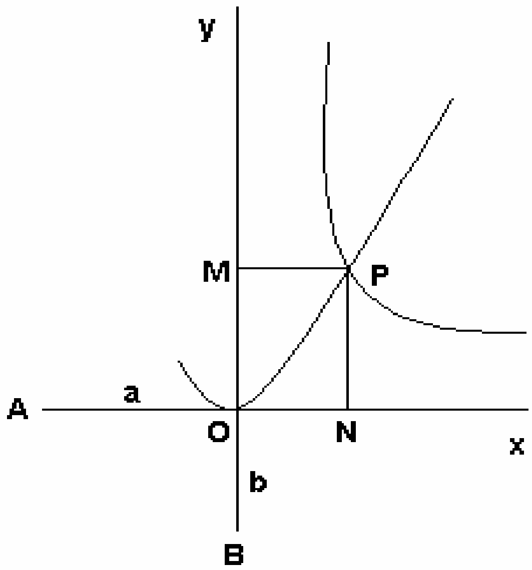
Menecmo introduce estas curvas como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz. Por eso la parábola fue llamada así, y con esta terminología aparece todavía en Arquímedes, sección de cono rectángulo (es decir sección de cono cuyo ángulo de apertura es recto por un plano perpendicular a una generatriz). La elipse era la sección de cono acutángulo y la hipérbola (hasta Apolonio solo se consideró una rama de ella) la sección de cono obtusángulo.

Menecmo encuentra dos soluciones distintas con las curvas. Para la primera solución utiliza las propiedades de la parábola y de la hipérbola. Para su segunda solución utiliza las propiedades de la parábola.

PRIMERA SOLUCIÓN.

Sean *AO,OB* dos líneas rectas situadas perpendicularmente, siendo *OA* la mayor.

Suponer que el problema esta resuelto y tenemos las dos medias proporcionales que son *OM* a lo largo de la línea *BO* y *ON* a lo largo de la línea *AO.* Completar el rectángulo formado por *OMPN.*



Entonces $\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OB}$ → $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

Ahora nuestro problema se reduce a buscar el punto *P*, encontrado el punto ya tendremos las medias que necesitamos para resolver el problema. Entonces utiliza las propiedades de las cónicas para hallar el punto *P.*

Tenemos que $OB.OM = ON^2 = PN^2$ por lo que dibuja una parábola de vértice *O,* con *OM* como eje y con coeficiente igual a *AB* .

También tenemos $AO.OB = OM.ON = PN.PM$

Dibujamos una hipérbola con *O* como centro y *OM , ON* como asíntotas.

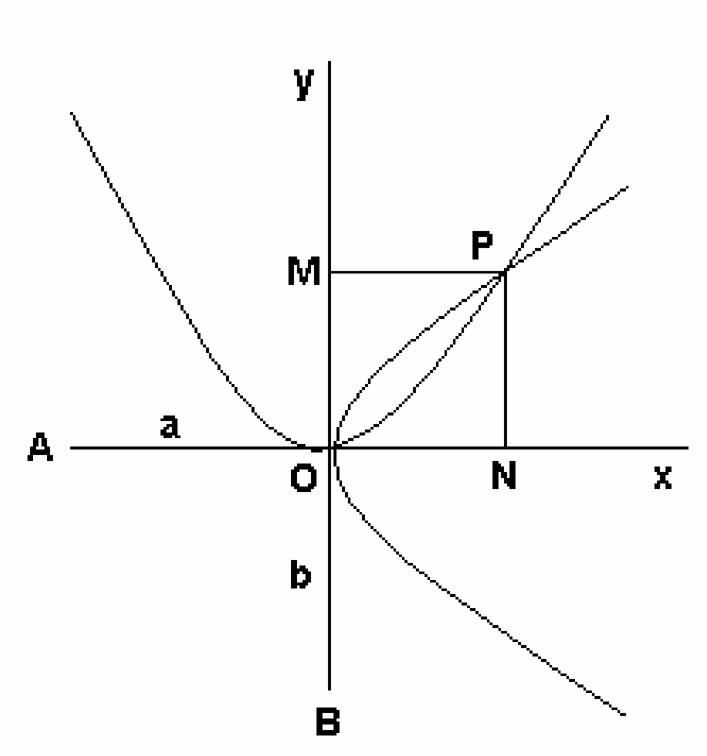
Si entonces dibujamos las dos curvas en concordancia con los datos, nosotros determinaremos el punto *P* y tendremos la media proporcional que necesitamos:

$$\frac{AO}{PN} = \frac{PN}{PM} = \frac{PM}{OB}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN.

En este caso usa dos parábolas para determinar el punto *P:*

1. La primera parábola con vértice en *O*, *ON* como eje y *OA* como coeficiente.(*latus rectum)*



2. La otra parábola con vértice en *O* , *OM* como eje y *OB* como coeficiente.(*latus rectum)*

Estas parábolas determinan por su intersección un punto *P* tal que:

$$(1) OA.ON = PN^2$$
$$(2) OB.OM = PM^2$$

Entonces: $PN = OM$
$PM = ON$

Por lo que: $\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OB}$

Y *OM, ON* son las dos medias proporcionales buscadas entre *OA, OB.*

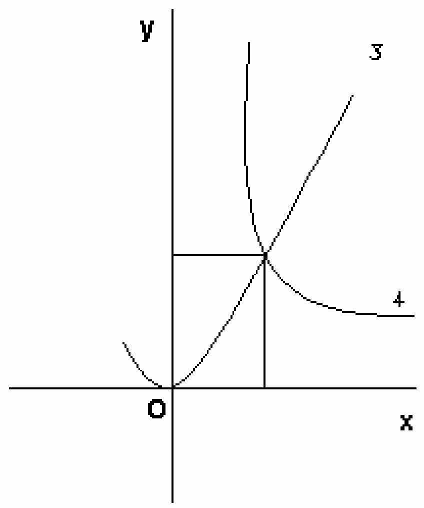
DEMOSTRACIÓN POR GEOMETRÍA ANALÍTICA.

PRIMERA SOLUCIÓN

Menecmo también utilizaba las propiedades de la hipérbola rectangular y la parábola para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Si situamos en un mismo sistema de coordenadas :

- La parábola → $y^2 = \frac{a}{2}x$ (3)
- La hipérbola → $xy = a^2$ (4)



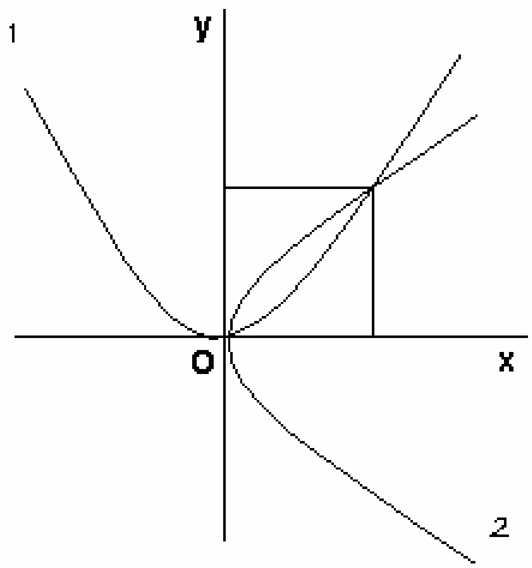
Entonces el punto de intersección tendrá por coordenadas:

- $x = a\sqrt[3]{2}$
- $y = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$

Luego la coordenada x será la arista del cubo de volumen doble buscado.

SEGUNDA SOLUCIÓN.

Si queremos duplicar un cubo de arista a construiremos dos parábolas como secciones del cono rectángulo una de coeficiente $a(1)$ y la otra de coeficiente $2a(2)$.



Si situamos entonces estas dos parábolas con vértices en el origen de coordenadas cartesianas O y con ejes los ejes de coordenadas cartesianas OY y OX.

El punto de intersección de las dos parábolas tendrá coordenadas (x, y).

Las coordenadas tienen que satisfacer la proporción continua:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Es decir:

- $x = a\sqrt[3]{2}$
- $y = a\sqrt[3]{4}$

Así pues, la abscisa x es la arista del cubo buscado.

2.2.4.-EUDOXO

Nacido en Cnido, vivió entre el 408 y el 355 a. C. Fue discípulo de Platón y se convirtió en el matemático y astrónomo más importante de su época. El descubrimiento de los números irracionales provocó una crisis en las matemáticas, al quedar sin sentido todas las demostraciones que se habían basado en el concepto de proporción hasta entonces utilizado. Con el descubrimiento por Eudoxo de la teoría de proporciones que encontramos en el libro V de "Los Elementos" de Euclides se salvó el obstáculo creado por los irracionales.

Esto quiere decir que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y sólo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n, si $ma \leq nb$ entonces $mc \leq nd$ o si $ma = nb$ entonces $mc = nd$, o bien si $ma \geq nb$ entonces $mc \geq nd \ldots$. A partir de este momento ya fue posible dar demostraciones que necesitaran de proporciones.

Otro problema importante que supo resolver Eudoxo fue el de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas. Que también uso en la solución del problema de la duplicación del cubo. Los matemáticos anteriores sabían que el procedimiento correcto consistía en inscribir o circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea, y repetir el proceso aumentando el número de lados o caras indefinidamente, de esta forma las figuras rectilíneas se aproximarían cada vez más a las curvilíneas, sin embargo, no sabían como cerrar el razonamiento.

Eudoxo dio un lema que ahora lleva el nombre "Axioma de Arquímedes", que constituye la base del método de exhausción

La solución del problema de la duplicación del cubo desgraciadamente se pierde. En una de las obras de Eratostenes aparece una explicación de tal solución. Eratostenes comenta de cómo Eudoxo utilizaba una especie de curvas que él llamó “líneas curvas” pero la versión que había caído en sus manos no era correcta.

Eratostenes nos da a entender que la solución del problema de la duplicación del cubo expuesta por Eudoxo es de alguna manera incorrecta. Pero parece inconcebible que un matemático del calibre de Eudoxo puede haber cometido tal equivocación. Donde realmente se pudo dar el error es cuando su solución fue copiada por alguien que no disponía de conocimientos suficientes y cometió algún error. Y este fue el manuscrito que nos ha llegado hasta nuestros días.

A Eudoxo se le atribuye generalmente el descubrimiento de que el año solar tiene 6 horas más de los 365 días. Eudoxo también intentó explicar los movimientos del Sol, la Luna y los planetas mediante un modelo del Sistema solar basado en una complicada combinación de esferas que giran. Su modelo tuvo un relativo éxito en la predicción de estos movimientos.

2.2.5.-ERATOSTENES

Nació en Cyrene (ahora Libia) el 276 a. C. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Estudió en Alejandría y Atenas con Zenón y Calímaco. Alrededor del año 255 a. C. fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría..

Trabajó con problemas matemáticos tales como la duplicación del cubo, números primos, escribió muchos libros casi todos perdidos y de los cuales se tienen noticias por referencias bibliográficas de otros autores. Dentro de sus obras más importantes se encuentran Platonicus y On means. Entre sus escritos se encuentra el poema Hermes inspirado en astronomía, como también trabajos literarios y sobre ética

Una de sus principales contribuciones a la ciencia y a la astronomía fue su trabajo sobre la medición de la tierra. Eratóstenes en sus múltiples estudios de los papiros en la biblioteca de Alejandría, encontró un informe de una observación en Siena (ahora Aswan), lugar localizado a unos 800 Km. al sudeste de Alejandría en Egipto en la que se decía que los rayos solares al caer sobre una vara el mediodía del 21 de junio (solsticio de verano) no producía sombra y que los rayos solares igualmente penetraban directamente en los pozos de agua.

Eratóstenes entonces realizó las mismas observaciones en Alejandría el mismo día a la misma hora, descubriendo que el fenómeno no se repetía y que en esta ciudad las columnas si dejaban una sombra de aproximadamente 7º con respecto a la vertical. Asumió entonces de manera correcta que si el Sol se encontraba a gran distancia, sus rayos al alcanzar la tierra debían llegaban en forma paralela y que si esta era plana como se creía en aquellas épocas no se deberían encontrar diferencias entre las sombras proyectadas por los objetos a la misma hora del mismo día, independientemente de donde se encontraran. Sin embargo al demostrarse que si lo hacían, dedujo que la tierra no era plana y utilizando la distancia conocida entre las dos ciudades y el ángulo medido de las sombras calculó la circunferencia de la tierra en aproximadamente 250 estadios (40.000 kilómetros).

También calculó la distancia al Sol en 804.000.000 estadios y la distancia a la Luna en 780.000 estadios. Midió casi con precisión la inclinación de la eclíptica en 23º`51´15´´. Otro trabajo astronómico fue una compilación en un catálogo de cerca de 675 estrellas.

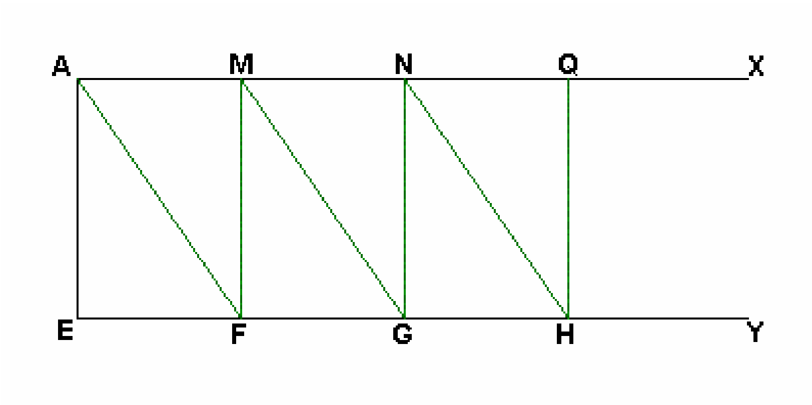
Creó uno de los calendarios más avanzados para su época y una historia cronológica del mundo desde la guerra de Troya. Realizó investigaciones en geografía dibujando mapas del mundo conocido, grandes extensiones del río Nilo y describió la región de Eudaimon (Actual Yemen) en Arabia

Eratóstenes al final de su vida fue afectado por la ceguera y murió de hambre por su propia voluntad en 194 a. C. en Alejandría.

Su contribución a la duplicación del cubo se basó en el empleo de un método de triángulos:

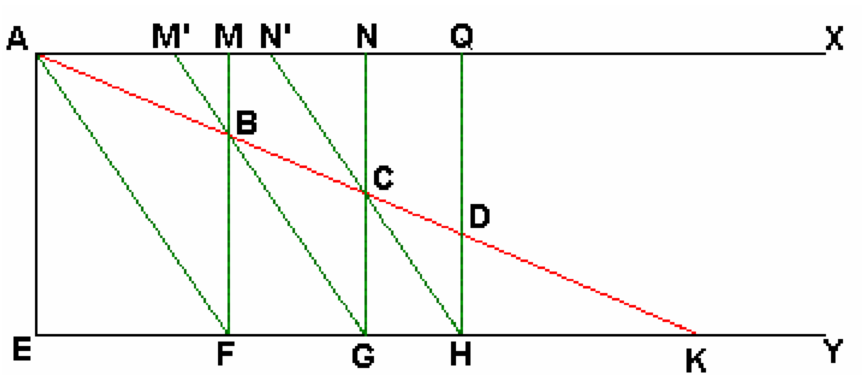
Es una construcción demasiado mecánica para la época. El dispositivo consiste en un marco rectangular a lo largo del cual deslizan tres paralelogramos o los triángulos en los cuales se dividen los paralelogramos. Los paralelogramos o los triángulos se mueven siempre de forma que sus bases describan una trayectoria recta.

La posición que ocupan los paralelogramos en el marco es esta:



AX, EY son los lados del marco; AMF, MNG, NQH son los triángulos que deslizan a lo largo del marco y son los obtenidos al dividir los paralelogramos ME, NF, QG.

La segunda figura muestra el resultado de deslizar todos los triángulos exceptuando el primero (que permanece estacionario)a lo largo de sus posiciones originales. Entonces lo que ocurre es la superposición de los 3 triángulos como AMF, M'NG, N'QH.



Entonces los tres triángulos se cortan en dos puntos B y C. Uniendo A con B, C nos da otro punto de corte con el tercer triángulo D. Esa recta corta a la base del marco EY en un punto al que llamamos K.

Entonces:

$$\frac{AE}{BF}=\frac{EF}{FK}=\frac{AK}{KB}=\frac{FK}{KG}=\frac{BF}{CG}$$

O similar:

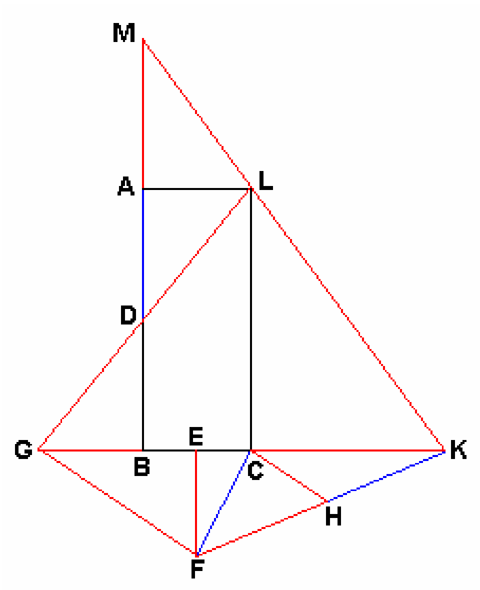
$$\frac{BF}{CG}=\frac{CG}{DH}$$

Por lo tanto → AE, BF, CG, DH están en proporción continua y BF, CG son las medias proporcionales buscadas.

2.2.6.-NICOMEDES

La forma con que Nicomedes resuelve el problema de la duplicación del cubo es por medio del uso de una curva llamada concoide.

Colocar AB, BC dos segmentos que formen un ángulo recto y completar el paralelogramo ABCL. (ver figura)



Divide los segmentos AB, BC en dos, obteniendo un punto medio D y E respectivamente. Une con una recta LD y cuando corte a la línea BC tendremos otro punto, G.

Hallar el punto F sabiendo que va a estar en la perpendicular a BC que pasa por E y que la distancia de CF=AD.

Une G y F y dibuja su paralela por C.

Ahora por el punto F une FHK cortando CH en H y en BC en K, el cual tiene que tener la propiedad HK=CF=AD

Esta es la construcción de la concoide en la cual F es el polo y la distancia de AD es igual a la de CF. La propiedad de la concoide es que HK es igual a la distancia.

Une KL y cuando corte con la recta BA tenemos el punto M. Entonces CK y MA son las medias proporcionales buscadas.

Ahora tenemos

$$BK.KC + CE^2 = EK^2$$

Añadiendo EF^2 tenemos

$$BK.KC + CE^2 = KF^2$$

Ahora por paralelas:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}$$

Pero:

$$AB = 2AD$$
$$GC = 2BC$$

Por lo tanto:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}$$

De aquí en adelante:

$$\frac{MD}{DA} = \frac{FK}{HK}$$

Pero por construcción vemos que:

$$HK = AD$$
$$MD = FK$$

Entonces → $MD^2 = FK$

Ahora:

$$MD^2 = BM.MA + DA^2$$
$$FK^2 = BK.KC + CF^2$$

Y por lo tanto:

$$\frac{CK}{MA} = \frac{BM}{BK} = \frac{LC}{CK}$$

Entonces:

$$\frac{LC}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{AL} \quad \text{o} \quad \frac{AB}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{BC}$$

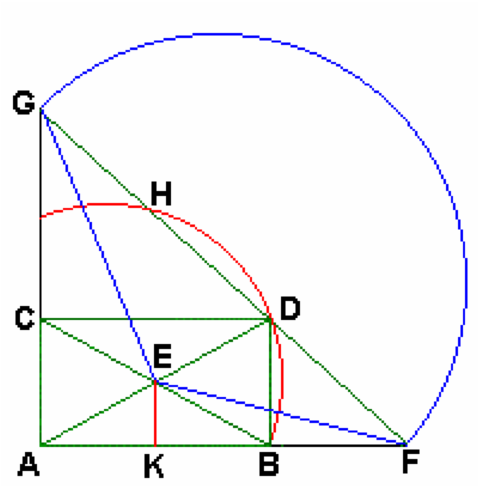
Según en que proporción se encuentren los segmentos AB y BC tendremos una media proporcional u otra.

2.2.7.- APOLONIO Y HERON.

Es conveniente agrupar estas soluciones ya que básicamente son equivalentes.

Tenemos dos segmentos de línea recta que forman ángulo recto, son AB y AC.

Completamos el rectángulo ABCD obtenemos E que es el punto en que se cruzan las diagonales del rectángulo.



Entonces traza un circulo de radio AB y de centro E el cual circunscribe el rectángulo ABCD. Este circulo corta a las líneas AB y produciendo dos puntos F y G respectivamente. Entonces podremos unir con una línea recta los puntos F, D, G.

Lo primero que tenemos que probar es que $AF.FB = AG.GC$

- Con la construcción de Apolonio nosotros tenemos que si K es la mita de AB:

$$AF.FB + BK = FK^{2}$$

Si añadimos KE^2 a ambos:

$$AF.FE + BE^2 = EF$$

Tenemos una expresión similar:

$$AG.GC + CE^2 = EG^2$$

Pero:

$$BE = CE$$
$$EG = EG$$

Entonces:

$$AF.FG = AG.GC$$

- Con la construcción de Heron → $GH = FD$

$$HF.FD = DG.GH$$

Pero el circulo BDHC pasa a través de A, entonces:

$$HF.FD = AF.FB$$
$$DG.GH = AG.GC$$

Por lo que:

$$AF.FB = AG.GC$$

El resto del desarrollo se halla por semejanza de triángulos:

$$\frac{FA}{AG} = \frac{DC}{CG} = \frac{FB}{BD}$$

Entonces:

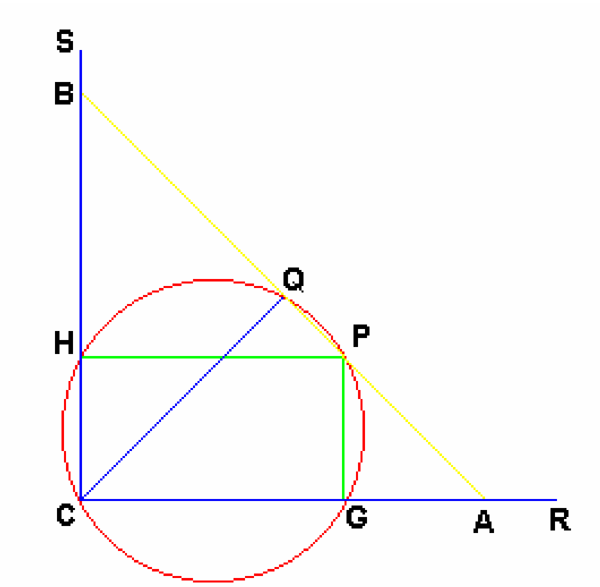
$$\frac{DC}{CG} = \frac{CG}{FB} = \frac{FB}{BD}$$

Por lo tanto:

$$\frac{AB}{CG} = \frac{CG}{FB} = \frac{FB}{AC}$$

2.2.8.-PHILON.(LA LINEA DE PHILON)

Esta línea transversal dependiente del ángulo y del punto elegido dentro del ángulo ha sido llamada línea de Philon y es un método mecánico para la solución del problema de la duplicación del cubo.



Dado un punto P y un ángulo RCS, tendremos una línea AB que pasa por P, siendo A el punto en que la línea corta al lado CR del ángulo y B el punto en que la línea corta al lado CS, esta línea será la línea de Philon cuando cumpla unas propiedades.

Exista un punto Q que sea la base de una perpendicular a AB que pase por C.

Que este punto Q tenga la cualidad de dividir la línea AB en unas determinadas proporciones:

$$AP = QB$$

Ahora considerar el rectángulo CGPH mostrado en el dibujo y suponer que la línea AP ha sido desplazada teniendo presente que → $AP = QB$

Donde Q es la intersección de AB con su perpendicular que pasa por C.

Se observa que C, G, P, Q y H están situados en la línea de un circulo y además:

$$AP.AQ = BQ.BP$$

Pero:

$$AP.AQ = AG.AC$$
$$BH.BC = BQ.BP$$

También:

$$AC.BC = BH.AG$$

Por semejanza de triángulos BCA, PGA y BHP:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{PH}{BH} = \frac{AG}{PG}$$

O también:

$$\frac{GC}{BH} = \frac{BH}{AG} = \frac{AG}{HC}$$

BH, AG son las dos medias proporcionales entre GC, HC.

Para el caso particular de la solución del problema de la duplicación del cubo:

$$GF = 2(HC)$$

Entonces:

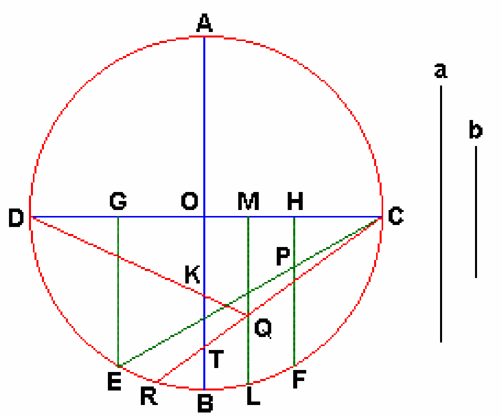
$$AG = 2(HC)^2$$

2.2.9.-DIOCLES Y SU CISOIDE.

La cisoide se va desarrollando como se indica a continuación:

AC, DC son los diámetros perpendiculares de un círculo. Coloco la misma distancia a un lado y a otro sobre el diámetro DC y obtengo los puntos G y H. Trazo la perpendicular a DC por esos puntos y obtengo otros dos puntos de corte cuando esas perpendiculares corten con el arco del circulo y obtendré E y F. Por lo tanto los arcos BE y BF son iguales.

Une con una recta CE y cuando esta recta corte con HF tendremos otro punto, el P.



Si P es algún punto de la cisoide esto quiere decir que FH, HC son dos medias proporcionales entre DH, HP o también:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP}$$

Queda claro en la construcción que:

$$EG = FH \qquad \text{Para que} \rightarrow \frac{CG}{GE} = \frac{DH}{HF}$$
$$DG = HC$$

Ahora FH es media proporcional entre DH, HC. Por lo tanto:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{CH}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{CG}{GE} = \frac{CH}{HP}$$

Entonces:

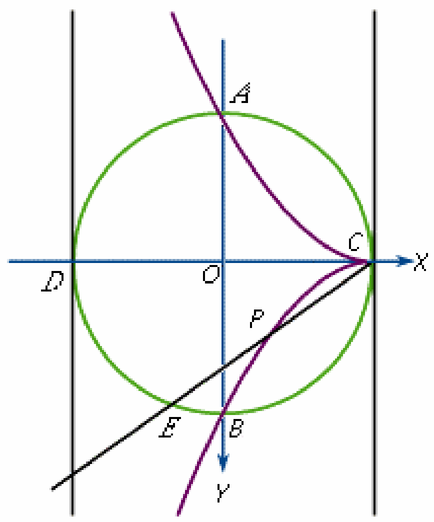
$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{CH} = \frac{CH}{HP}$$

Si nosotros miramos la cisoide desde un punto de vista de la geometría analítica a partir de: $DH.HP = HF.CH$, nosotros tendremos a que será el radio del circulo, hacemos: $OH = x, HP = y$.

Tomamos OC, OB como ejes de coordenadas.

$$(a+x)y=(a-x)\sqrt{a^2-x} \Rightarrow y^2(a+x)=(a-x)^3$$

Esta es la ecuación cartesiana de la cisoide. Tiene la cúspide en C y la tangente del circulo por el punto D es su asíntota.



La cisoide esta representada en la figura como la curva magenta. Diocles nos enseñó como encontrar dos medias proporcionales entre dos líneas a, b.

Tomamos K de OB estando en relación:

$$\frac{DO}{OK} = \frac{a}{b} \qquad \text{(Fig.1)}$$

Unir DK, lo que produce que aparezca la cisoide en Q. Por Q dibujar la ordenada LM perpendicular a DC. Entonces por la propiedad de la cisoide LM y MC son las dos medias proporcionales en proporción continua entre DM, MQ:

$$\frac{DM}{MQ} = \frac{DO}{OK} = \frac{a}{b}$$

A fin de encontrar las dos medias proporcionales entre a, b tomamos segmentos rectos x, y con la misma proporción que LM, MC respectivamente. Entonces x, y son las medias proporcionales buscadas entre a, b.

3.- CONSECUENCIAS DEL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO.

La historia sobre la resolución del problema de la duplicación del cubo está llena de anécdotas, pero lo cierto es que como consecuencia de ello surgió:

- ➪ Sección de cónicas.
- ➪ Descubrimiento de los inconmensurables. Números irracionales
- ➪ Método de exhausción. Cálculo aproximado del número π.

3.1.- SECCIÓN DE CÓNICAS.

El interés hacia las secciones cónicas creció a medida que aumentaban la cantidad de problemas resueltos con su ayuda. Sin duda, la obra más completa, general y sistemática de las secciones cónicas se debe a Apolonio de Perga.

La aparición de las cónicas se debe a una muy afortunada búsqueda que se realizó para encontrar curvas que sirviesen para resolver el problema de la duplicación del cubo (validas para hallar dos medias proporcionales entre dos segmentos).

El problema de la duplicación del cubo es un claro ejemplo de la contribución y enriquecimiento de las matemáticas. Muchos fueron los matemáticos que abordaron el problema. La influencia de éste en las matemáticas griegas contribuyó a que las secciones cónicas se convirtieran en un método de abordar problemas que podían ser resueltos con regla y compás.

Antes de que Apolonio escribiera su obra existieron autores precedentes. En el siglo IV a. C. Menecmo planteó problemas de intersección de superficies, secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz. Aplicó técnicas que no incluían todavía un sistema de coordenadas, pero que de cierta forma estaba implícito en su tratamiento conceptual. Reduce el problema de la duplicación del cubo al problema de la construcción de dos medias proporcionales entre 2 y 1:

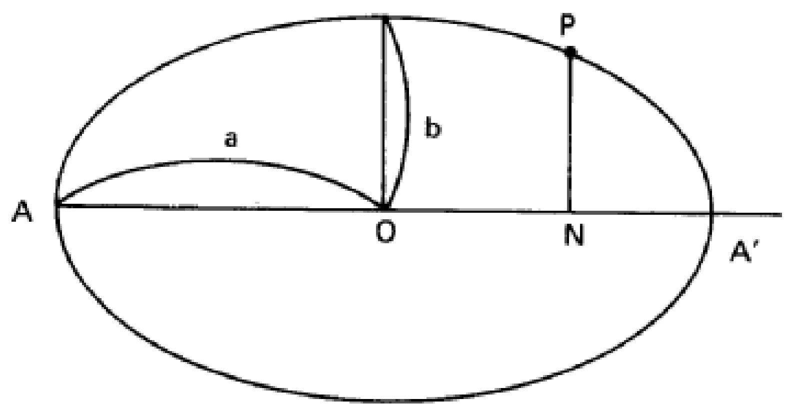
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \qquad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}$$

Menecmo introduce estas curvas como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz y con esta terminología aparece todavía en Arquímedes, sección de cono rectángulo (es decir sección de cono cuyo ángulo de apertura es recto por un plano perpendicular a una generatriz). La elipse era la sección de cono acutángulo y la hipérbola la sección de cono obtusángulo. Aplicó técnicas que no incluían todavía un sistema de coordenadas, pero que de cierta forma estaba implícito en su tratamiento conceptual.

Las secciones cónicas eran conocidas casi dos siglos antes pero un estudio sistemático y racional no comenzó hasta aproximadamente el primer siglo de la Época Helenista.

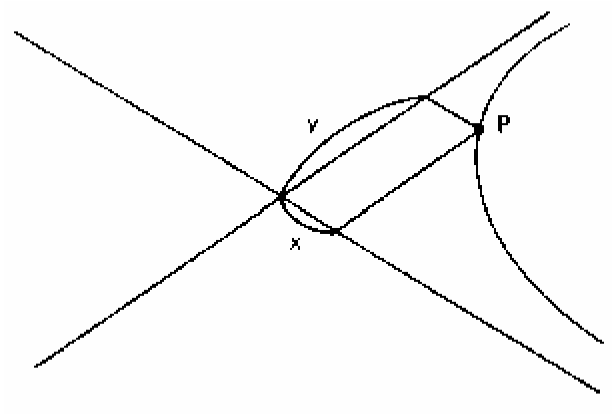
El desarrollo de la teoría de cónicas debió de ser muy rápido pues ya hacia fines del siglo IV existieron dos obras importantes. La primera es de Aristeo, el Libro de los lugares sólidos (lugares planos eran los que dan lugar a rectas y círculos; lugares sólidos son aquéllos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos; Lugares lineales eran otras curvas de orden superior no reducibles a las anteriores como la concoide. La segunda obra de interés, también perdida, fue de Euclides, en cuatro libros, cuyo contenido debió de ser en sus líneas fundamentales el que se encuentra en los cuatro primeros libros de las Cónicas de Apolonio, sí bien menos general y menos sistemático.

De este modo, al final del siglo IV, ya eran bien conocidas propiedades tales como la de la ordenada → $\frac{PN^2}{AN.NA'} = \frac{b^2}{a^2}$



Y también la de las asíntotas de la hipérbola

$$xy = constante$$



Este es el modo en que Menecmo llegó a la propiedad de la parábola.

Todas estas obras quedaron en un segundo plano, pasando algunas al olvido, después de la aparición de las Cónicas de Apolonio, magnífico compendio en ocho volúmenes que recogían todo el saber de la época sobre las secciones cónicas. Después de su aparición ningún otro matemático de la antigüedad realizó esfuerzo alguno por mejorarla.

3.1.1.-APOLONIO DE PERGA (247-205 a.C.)

El tercero de los grandes del período Alejandrino fue Apolonio, primer profesor en el museo de Alejandría durante un periodo prolongado y después en su ciudad natal.

Apolonio además fue uno de los fundadores de la astronomía matemática griega, utilizó modelos geométricos para la explicación de la teoría planetaria, modelando los complejos movimientos de los planetas mediante movimiento circulares. Como aritmético estudió las irracionalidades.

Su obra fundamental Cónicas, es una especie de complementos de los Elementos de Euclides. Con anterioridad se habían realizado algunos estudios de importancia sobre los lugares geométricos sólidos.

Apolonio mezcló desde premisas iniciales suficientemente generales con resultados propios en ocho libros.

Apolonio sabe mucho más de lo que hasta entonces se sabía y de modo mucho mejor organizado. Por ello se decide a publicarlo. El mismo, en este prólogo al libro primero, explica el contenido de la obra bien claramente. Los cuatro primeros libros constituyen una introducción elemental. Debían de constituir materia probablemente ya sabida, pero no organizada como la propone Apolonio. A partir del libro V se exponen los hallazgos más importantes del mismo Apolonio.

Su índice, con nuestras palabras, se puede proponer más o menos así:

I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
II. Diámetros, ejes y asíntotas.
III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.

VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII. (Se desconoce su contenido. Tal vez problemas sobre diámetros conjugados).

Ahora examinaremos por encima algunos de los detalles más importantes de los diferentes libros, adelantando solamente que se considera, de modo unánime, el libro V como el mejor y más original de todos.

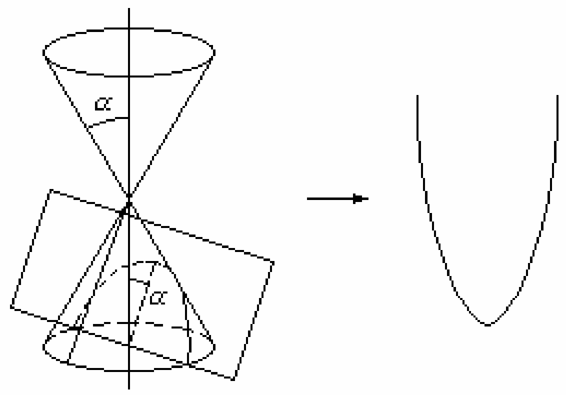
El libro I comienza con la generación del cono circular, oblicuo de dos hojas que, seccionado por un plano, dará lugar a los diferentes tipos de cónicas. Apolonio ha captado cómo esta consideración de un solo cono permite la obtención de las tres cónicas según la inclinación diversa del plano, al obtener todas las secciones cónicas a partir de un único cono circular oblicuo de dos hojas y darle unos nombres tan adecuados como los que les dio. Apolonio hizo una contribución notable a la geometría, pero aun así no consiguió llegar en el grado de generalidad todo lo lejos que podría haber ido. Apolonio podría haber comenzado de la misma manera con un cono elíptico, o bien con un cono cuadrático en general, y haber obtenido no obstante las mismas curvas.

Es decir, cualquier sección plana de un cono circular como los que utiliza Apolonio podría haber servido como curva generatriz o base en su definición, de manera que la particularización a un cono circular no es necesaria. Tal y como demuestra Apolonio, todo cono circular oblicuo tiene no sólo un sistema infinito de secciones circulares paralelas a la de la base sino también otro conjunto infinito de secciones circulares dadas por todas las que él llamó secciones subcontrarias o antiparalelas a las primeras. Además identificará la hipérbola como una curva con dos ramas. En estos puntos importantes se aparta de sus antecesores en el campo, logrando una visión más unitaria y mejor sistematizada del tema.

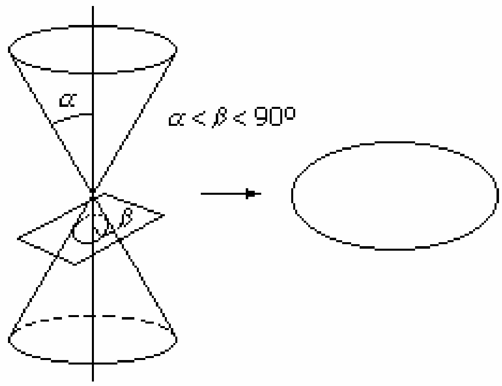
Estudia las secciones circulares del cono, paralelas y antiparalelas a la base, introduce un parámetro que llama lado recto(*Latus rectum)*, que será igual a $\frac{2b^2}{a}$ donde establece las propiedades de ordenada y abscisa de las cónicas, considera el centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes, y ataca el problema de construcción de la cónica dados diversos elementos.

Tipos de sección de cónicas:

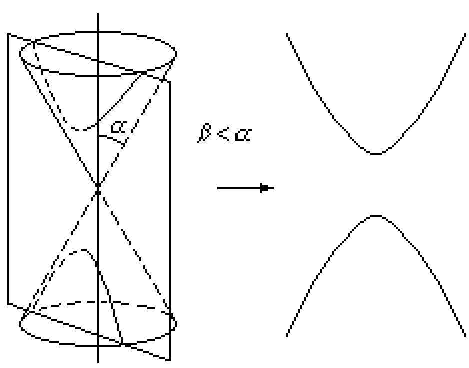
- Parábola:



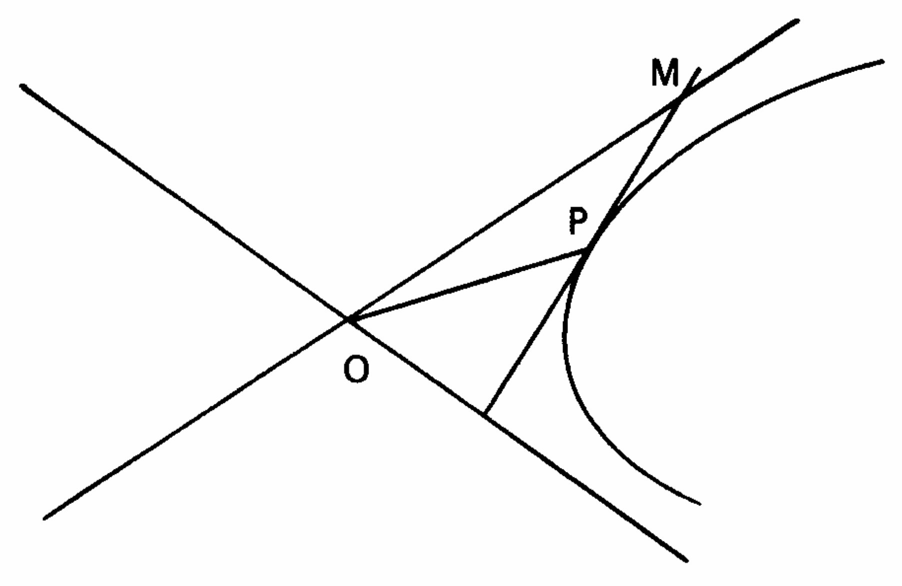
- Elipse:



- Hipérbola:



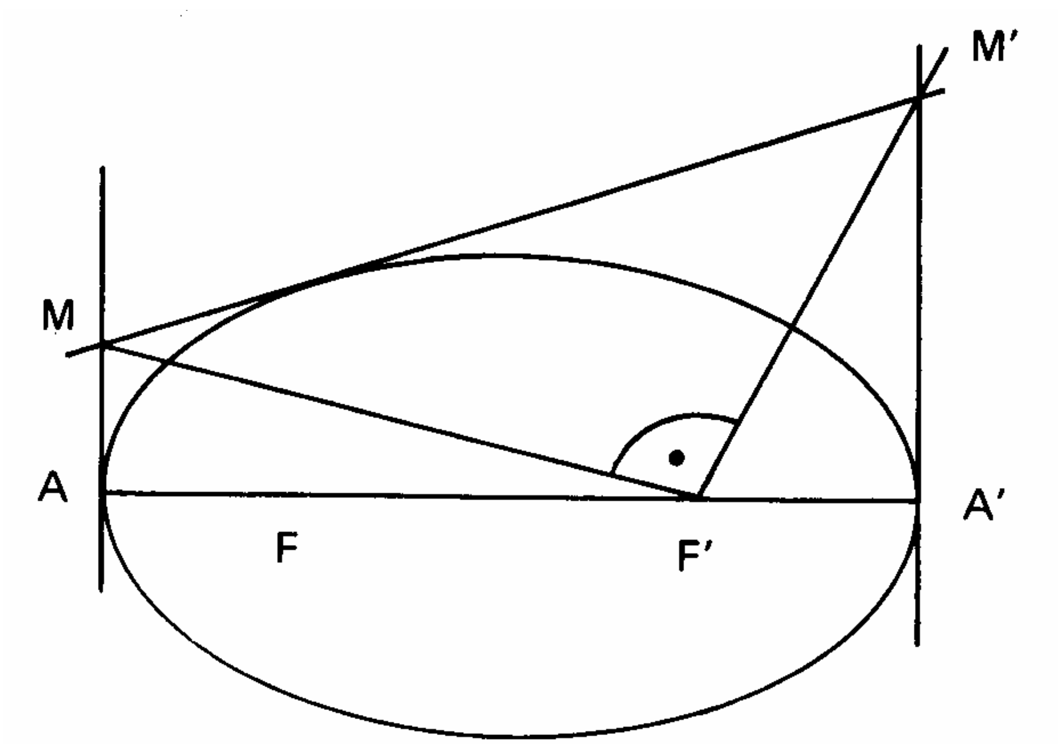
El libro II estudia fundamentalmente las propiedades de las asíntotas de la hipérbola. Caracteriza la asíntota por la distancia PM en función de OP y el parámetro correspondiente



Estudia al final el problema importante siguiente: Trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

El lenguaje de Apolonio es, por supuesto, un lenguaje sintético, utilizando a la perfección los viejos procedimientos pitagóricos de la aplicación de áreas. Los resultados sin embargo son fácilmente traducibles al lenguaje de la geometría analítica. Lo que resulta profundamente sorprendente y llamativo es que Apolonio sea capaz de llegar tan lejos sin asomo de utilización de los métodos avanzados de la geometría y del cálculo de los que nosotros disponemos.

El libro III se dedica primero a estudiar las relaciones de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados. Obtiene la relación armónica sobre los cuatro puntos determinados en una secante a la cónica que pasa por un punto, su polar y los dos de intersección de la secante con la cónica. En la proposición 41 se establece cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón y así resulta la parábola como envolvente de las rectas con esta propiedad. En la proposición 43 aparece la hipérbola como lugar de puntos tales que xy=constante, siendo x e y abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas. Desde la proposición 45 a la 52 aparecen propiedades interesantes sobre los focos. En la 45 se establece cómo desde un foco F se ve bajo un ángulo recto MFM´ el segmento determinado por una tangente cualquiera entre las tangentes en A y A´



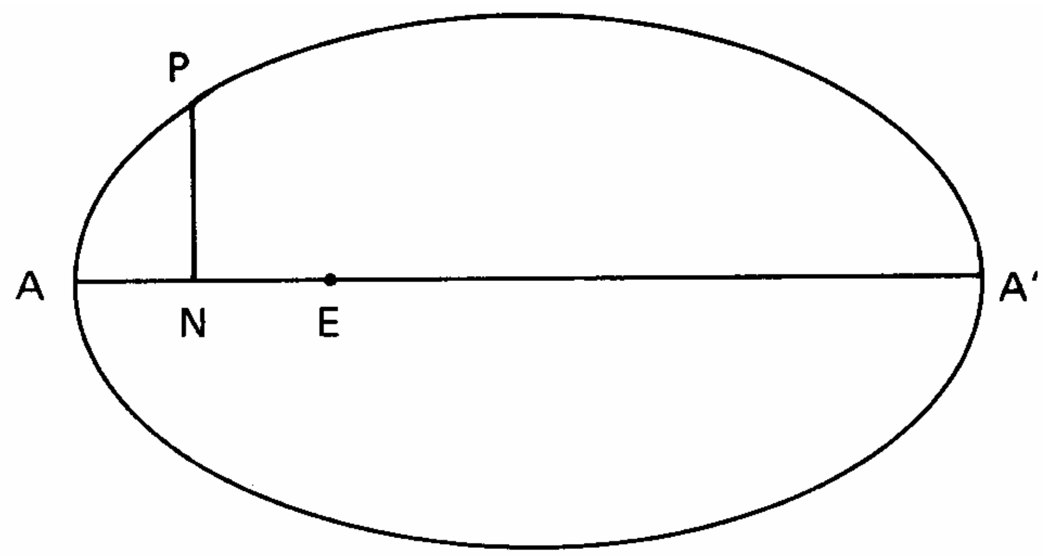
La 52 contiene lo que hoy solemos tomar a veces como definición de elipse (PF+PF´=2a). Los focos, en Apolonio, son los puntos que surgen de la aplicación de áreas. Las Cónicas de Apolonio constituyen un tratado de una amplitud y una profundidad tan extraordinaria que a veces nos sorprende precisamente el notar que se han omitido algunas de las propiedades que a nosotros nos parecen tan obviamente fundamentales. Tal como se definen las cónicas hoy en día en los libros de texto, los focos juegan un papel de primera importancia; sin embargo, Apolonio ni siquiera le da nombres especiales a estos puntos, y se refiere a ellos sólo de una manera indirecta. Se supone que él mismo, y quizá incluso ya Aristeo y Euclices, estaban bien familiarizados con las propiedades de estar curvar referidas al foco y a la directriz, pero el caso es que nada de esto se menciona ni siquiera en las Cónicas.

El libro IV es de bastante menos valor. En él estudia el número de puntos de intersección de las cónicas. El mismo autor lo describe como el que se ocupa del problema de cuántas maneras diferentes pueden cortarse unas a otras las secciones de conos, pero Apolonio se muestra especialmente orgulloso de los teoremas, ninguno de los cuales había sido tratado por los escritores anteriores, relativos al número de puntos en que una sección cónica corta a las ramas opuestas de una hipérbola. La idea de considerar a la hipérbola como una curva de dos ramas se debe a Apolonio. Es interesante desde un punto de vista lógico que de sus 57 proposiciones, las 23 primeras se demuestran por reducción al absurdo.

El libro V, que consta de 77 proposiciones es, con gran diferencia, el más sorprendente de todos. Se puede decir que en él Apolonio, 20 siglos antes que Huygens (en su Horologium Oscillatorium, 1673) introduce ya, a su modo, con instrumentos puramente sintéticos, nociones tales como normal a una curva, evoluta(la evoluta de una curva es el conjunto descrito por su centro de curvatura) centro de curvatura, etc.,.. y que logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.

Es interesante observar cómo Apolonio explica en el prólogo al libro V la novedad de sus consideraciones: "*En este libro quinto he expuesto proposiciones relativas a los segmentos de máxima y mínima distancia. Has de saber que mis predecesores y contemporáneos solo superficialmente han tratado la investigación de las líneas de distancia mínima y solamente han probado qué líneas rectas tocan a las secciones cónicas y qué propiedades tienen en virtud de ser tangentes. Por mi parte yo he probado estas propiedades en el libro primero (*sin hacer uso sin embargo en las demostraciones de la teoría de las líneas de distancia mínima*)......Las proposiciones en las que trato los segmentos de distancia mínima las he separado en clases y he tratado cada una con una demostración cuidadosa. También he puesto en conexión estas cuestiones con las relativas a los segmentos de distancia máxima que antes he mencionado, porque consideraba que los que cultivan esta ciencia las necesitan a fin de obtener un conocimiento del análisis y discusión de los problemas así como de su síntesis. Por otra parte, esta materia es una de esas que parecen dignas de estudio por sí mismas".*

En este libro Apolonio descubre que la normal desde un punto exterior viene definida a través de la propiedad de máxima o mínima distancia desde el punto a la curva. Apolonio comienza por considerar el punto E sobre el eje principal tal que AE=p/2.



Demuestra entonces que para cualquier punto P sobre la elipse se verifica:

$$PE^2 = AE^2 + AN^2\left[\frac{(AA'+p)}{AA'}\right]$$

Así que está a mayor distancia de E que A. Por tanto AE es para E el segmento de distancia mínima desde E a la elipse. Considera luego E en situaciones más generales y análogamente determina la normal desde E.

Las proposiciones más llamativas de toda la obra son ciertamente la 51 y 52 de este libro quinto. En ellas consigue por procedimientos puramente sintéticos obtener la evoluta de las cónicas como lugar de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Esto equivale a describir sintéticamente las curvas.

En las proposiciones 55-63 obtiene las normales desde un punto exterior reduciendo el problema a la determinación del pie de la normal sobre la cónica por intersección de ésta con una hipérbola equilátera asociada al punto exterior.

En el libro VI, dedicado fundamentalmente a la igualdad y semejanza de cónicas aparece el problema interesante siguiente: dada la cónica y dado un cono circular recto hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

Las proposiciones del libro VII, nuevas en su mayor parte, como Apolonio mismo señala, contienen numerosas relaciones métricas entre diámetros conjugados, áreas y también el conocido teorema que dice que sí trazamos las tangentes en los extremos de un par de diámetros conjugados de una elipse o de una hipérbola, entonces el paralelogramo formado por estas cuatro tangentes es equivalente al rectángulo construido sobre los ejes.

Los métodos que utiliza Apolonio en las Cónicas son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años. El uso de unas rectas de referencia en general y de un diámetro y una tangente en uno de sus extremos en particular no difiere esencialmente, desde luego, del uso de un sistema de coordenadas, sea rectangular u oblicuo, en general.

Las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Las relaciones que da Apolonio entre estas abscisas y las correspondientes ordenadas no son otra cosa que formas retóricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas. Sin embargo, en el álgebra geométrica de los griegos no había lugar para las magnitudes negativas y por otro lado, lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas venía siempre superpuesto “a posteriori” a una curva dada para estudiar sus propiedades. No parece presentarse ningún caso en la geometría antigua en el que se fije un sistema de coordenadas de referencia “a priori” con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica o retórica. Podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vienen determinadas por las ecuaciones Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues, conceptos subsidiarios derivados de una situación geométrica concreta, y se puede asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darlas de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfagan condiciones dadas sobre sus dos coordenadas.

No hay duda de que a lo largo de la historia de la matemática los conceptos han sido mucho más importantes que las terminología utilizada, pero no obstante el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio tiene una importancia mayor que la usual. Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombres específico más que descripciones triviales de la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo, rectángulo y obtuso. Arquímedes continuó utilizando estos nombres, aunque según parece también usó y el nombre de parábola como sinónimo para una sección de un cono rectángulo. Pero fue realmente Apolonio quien introdujo por primera vez los nombres de elipse y de hipérbola en conexión con estas curvas. Las palabras elipse, parábola e hipérbola no eran nuevas en absoluto y acuñadas para la ocasión, sino que fueron adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de área. La palabra *Ellipsis* que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado. Mientras que la palabra *hyperbola* se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra *Parábola* indicaba que no había ni deficiencia ni exceso. Apolonio aplicó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres para las secciones cónicas.

3.2.-APARICIÓN DE LOS INCONMENSURABLES. INICIO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES.

Uno de los principios fundamentales del pitagorismo era el de que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre es explicable en términos de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, los diálogos de Platón nos informan de que la comunidad matemática griega se vio grandemente sorprendida por un descubrimiento que prácticamente demolía las bases de la fe pitagórica en los números enteros. Este descubrimiento fue el de que incluso dentro de la geometría misma los números naturales y sus razones resultaban inadecuados para dar cuenta de algunas propiedades fundamentales, incluso muy sencillas; no bastaban, por ejemplo, para comparar la diagonal de un cuadrado, de un cubo o un pentágono regular con su lado o arista respectivamente. Tales parejas de segmentos son inconmensurables, por muy pequeña que sea la unidad de medida elegida. Existen distintas opiniones a cerca de cuando y como se hizo este descubrimiento. Unos lo atribuyen a la aparición de la $\sqrt[3]{2}$ en el problema de la duplicación del cubo y otros lo atribuyen con la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado comentada por Aristóteles. Esta última es una demostración bastante sencilla:

- Sean d y s la diagonal y el lado de un cuadrado y supongamos que son conmensurables, es decir, que la razón $\frac{d}{s}$ es racional e igual a $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros sin factores comunes.
- Ahora bien por el teorema de Pitagoras sabemos que:

$$d^2 = s^2 + s^2$$

- Luego: $\left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$
- O bien: $p^2 = 2q^2$.
- Por lo tanto p^2 debe ser un número par, luego p ha de ser par. En consecuencia q debe ser impar.
- Sea $p = 2r$, sustituyendo en la ecuación $p^2 = 2q^2$ tenemos que $4r^2 = 2q^2$
- Luego $q^2 = 2r^2$ y por lo tanto q^2 debe ser par, y así q ha de ser necesariamente par. Sin embargo, como se vio antes, q tenía que ser impar, y ningún entero puede ser a la vez par e impar.
- Siguiendo por lo tanto con el método de demostración indirecta llegamos a la hipótesis de que d y s eran inconmensurables.

Números inconmensurables famosos han sido y son la constante délica ($\sqrt[3]{2}$), el número pi (π=3´141…), la raíz cuadrada de dos($\sqrt{2}$).

3.3.-MÉTODO DE EXHAUCIÓN.

Uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por los inconmensurables quedaba resuelto con éxito gracias a la imaginación de Eudoxo, pero aún quedaba otro problema importante sin resolver: el de la comparación de las figuras curvilíneas y rectilíneas, y también aquí parece haber sido Eudoxo quien dio la clave de la solución. Los matemáticos anteriores habían sugerido ya que lo mejor que uno podía intentar era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la curvilínea, pero lo que no sabían era cómo cerrar el razonamiento, ya que la idea de límite les era desconocida y lo seguiría siendo durante más de dos milenios. Según Arquímedes, fue Eudoxo el que dio el lema que lleva ahora el nombre de Arquímedes, y que se suele conocer como Axioma de Arquímedes, que sirve de base al método de exhausción. Este axioma afirma que, dadas dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. Esta propiedad excluía totalmente un oscuro razonamiento que había aparecido a veces en el pensamiento griego, relativo a segmentos indivisibles o infinitésimos constantes. También excluía la comparación de los llamados “ángulos de contingencia” (formados por una curva C y su tangente en un punto P de C) con los ángulos rectilíneos usuales, ya que un ángulo corneado parecía ser una magnitud distinta de cero y que no satisfacía, sin embargo, el axioma de Eudoxo al compararlo con los ángulos rectilíneos.

A partir del axioma de Eudoxo es muy fácil demostrar la proposición que constituye la base del método de exhausción griego:

"*Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano"*

Esta proposición, a la que nos referiremos con el nombre de "propiedad de exhausción " es equivalente a la proposición moderna que dice que si M es una magnitud dada, ε es otra magnitud del mismo tipo arbitraria dada también, y r es un número tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, entonces podemos encontrar un entero positivo N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo número natural $n > N$. Es decir, la propiedad de exhausción es equivalente a la afirmación que, en términos modernos, nos asegura que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(M(1-r)^n = 0 \right)$$

3.3.1-MÉTODO DE EXHAUCIÓN. APROXIMACIÓN AL NÚMERO π.

Una de las mayores contribuciones que hizo Arquímedes a las matemáticas fue su método de aproximar el valor de π. Era por todos reconocido la relación que existía entre el radio de una circunferencia y su diámetro. En tiempos de los Babilonios, Egipcios y Chinos se habían realizado aproximaciones pero sin llegar a valores aceptables.

De todas formas, el método usado por Arquímedes difiere de los acercamientos anteriores en su planteamiento fundamental. Los intentos anteriores para obtener el valor de π simplemente dieron un valor aproximado, comúnmente comparando el área o perímetro de cierto polígono con el de un circulo. El método de Arquímedes es novedoso, es un proceso reiterativo, por medio del cual uno puede conseguir un acercamiento tan preciso como quiera repitiendo el proceso. Este es un nuevo aspecto de las matemáticas Griegas, aunque se conozca desde antiguo en la tradición China con la aproximación de raíces cuadradas. Este método se llamó método de exhuasción y se conoce como el método predecesor del cálculo de límites

Como Arquímedes realizó la aproximación, escasean pasos fáciles de seguir y muchos autores en la historia de las matemáticas han intentado hacer variaciones del método, para hacerlo más comprensible, sin haber obtenido un resultado aceptable

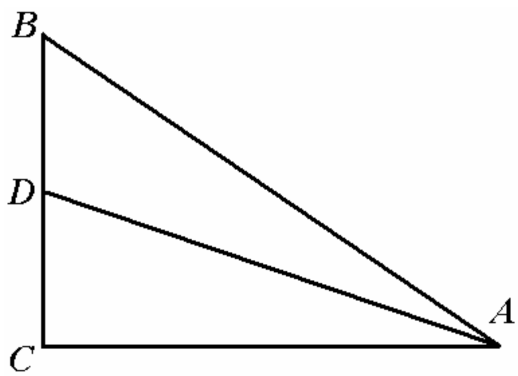
El método de Arquímedes obtiene un valor aproximado del número π a partir de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos sobre un círculo determinado. El número π aparece cuando ambos polígonos se aproximen al valor de la circunferencia, aunque nunca llegará (concepto de límite) a la circunferencia. Arquímedes usa un teorema de Euclides para desarrollar un procedimiento numérico para calcular el perímetro de un polígono circunscriptible de $2n$ lados. Una vez conocido este perímetro ya tenemos también el de n lados.

Entonces comienza con un hexágono circunscriptible y usa su formula para calcular el perímetro de polígonos de 12, 24, 48 y finalmente 96 lados. Ahora repite el proceso usando polígonos inscriptibles(después de calcular la fórmula correspondiente).

El procedimiento verdaderamente único del proceso de Arquímedes es que elimina totalmente la geometría y lo reduce a un proceso completamente aritmético, algo que habría horrorizado a Platón pero que era muy común en las culturas Chinas.

La clave del teorema usado por Arquímedes es la propuesta 3 del libro VI de los Elementos de Euclides:

“ La bisectriz interior de un ángulo cualquiera de un triángulo, divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes.”



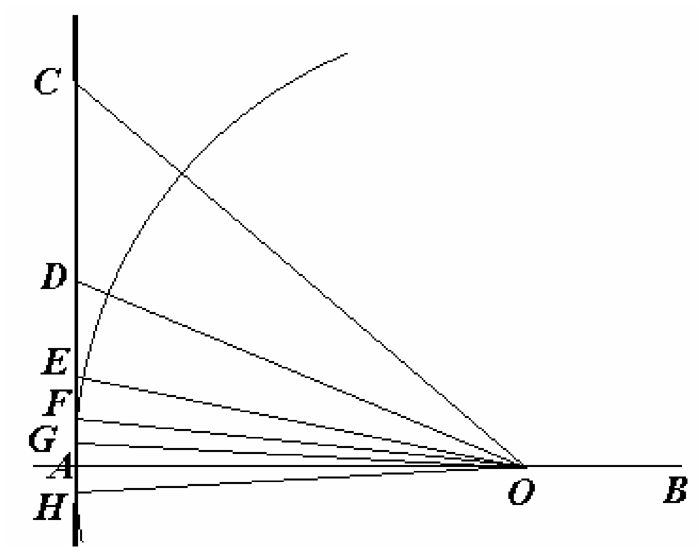
$$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{BA+CA}{BC} \qquad \rightarrow \quad CD=\frac{BC.CA}{BA+CA}$$

$$\rightarrow \quad BD=\frac{BC.BA}{BA+CA}$$

La afirmación específica de Arquimedes es la propuesta tres de su Medida del tratado de un Círculo:

"La relación de la longitud de la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menos de $3\,{}^{1}\!/_{7}$ pero mayor de $3\,{}^{10}\!/_{71}$."

DEMOSTRACIÓN



En este método de Aproximación Arquímedes utiliza un cálculo aproximado de raíces cuadradas. Nadie sabe como llego a una aproximación tan precisa para la época.

Aproximación por el exterior.

Siendo AB el diametro de un circulo, O su circulo, AC su tangente por A y siendo el ángulo AOC la tercera parte del ángulo recto.

Entonces:

(1) $\frac{OA}{AC} > \frac{265}{153}$ $\qquad \frac{OA}{OC} = \sqrt{3}$

Usaba la aproximación $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$

(2) $\frac{OC}{AC} > \frac{306}{153}$

1.- Dibuja OD con la bisectriz del ángulo AOC y encuentra el punto D cuando la bisectriz corte a AC.

Ahora:

$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$ (Proposición VI.3 de los Elementos de Euclides)

Para que:

$$\frac{CO + OA}{CA} = \frac{OA}{AD}$$

Por lo tanto:

$$(3)\frac{OA}{AD} = \frac{CO + OA}{CA} = \frac{CO}{CA} + \frac{OA}{CA} > \frac{306}{153} + \frac{265}{153} = \frac{571}{153} \to \frac{OA}{DA} > \frac{571}{153}$$

$$OD^{2=} = OA^2 + AD^2 \to \frac{OD^2}{AD^2} = \frac{OA^2}{AD^2} + 1 > \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349459}{23409} \to \frac{OD^2}{OD^2} > \frac{349450}{23409}$$

Entonces:

$$(4)\,\frac{OD}{DA} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153}$$ Usa otra aproximación $\sqrt{349450} > 591\,\frac{1}{8}$

2.- Habrá que trazar OE con la bisectriz del ángulo AOD y encuentra el punto E cuando la bisectriz corta con AD.

$$\frac{OD+OA}{DA} = \frac{OA}{AE} = \frac{DO}{DA} + \frac{OA}{DA} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153} + \frac{571}{153} = \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153}$$

$$(5)\,\frac{OA}{AE} > \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153}$$

$$OE^2 = OA^2 + EA^2$$

$$\frac{OE^2}{EA^2} = \frac{OA^2}{EA^2} + 1 > \frac{\left(1162\,\frac{1}{8}\right)^2 + 153^2}{153^2} = \frac{1373943\,\frac{33}{64}}{23409}$$

$$\sqrt{1373943\,\frac{33}{64}} > 1172\,\frac{1}{8}$$

$$(6)\,\frac{OE}{EA} > \frac{1172\,\frac{1}{8}}{153}$$

3.- Habrá que trazar OF con la bisectriz del ángulo AOE y encuentra el punto F cuando la bisectriz corta con AE.

$$\frac{EA}{FA} = \frac{EO+OA}{OA} \rightarrow \frac{OA}{FA} = \frac{EO}{EA}(6) + \frac{OA}{EA}(5) > \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153}$$

$$(7)\,\frac{OA}{AF} > \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{OF}{FA} = \sqrt{\frac{OA^2}{AF^2} + 1} > \sqrt{\left(\frac{2334\,\frac{1}{4}}{153}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5472132\,\frac{1}{16}}{23409}} > \frac{2339\,\frac{1}{4}}{153}$$

$$(8)\,\frac{OF}{FA} > \frac{2339\,\frac{1}{4}}{153}$$

4.- Trazar OG con la bisectriz del ángulo AOF, encontrar el punto G cuando la bisectriz corte a AF.

Entonces tenemos

$$\frac{FA}{GA}=\frac{FO+OA}{OA}\rightarrow\frac{OA}{GA}=\frac{FO}{FA}+\frac{OA}{FA}>\frac{4673\,{}^{1}\!/_{2}}{153}$$

$$\frac{OA}{AG}>\frac{4673\,{}^{1}\!/_{2}}{153}$$

Ahora el ángulo AOC, que es un tercio del ángulo recto, ha sido dividido cuatro veces por lo que el ángulo AOG= ${}^{1}\!/_{48}$ el ángulo recto. Si duplicamos el ángulo OAG entonces este formará el punto H y será ${}^{1}\!/_{24}$ veces el ángulo recto.

Así que GH es una cara de un polígono regular de 96 lados circunscrito a un círculo dado. Siempre y cuando:

- $AB=2.OA$
- $GH=2.AG$

Entonces esto sigue así:

$$\frac{longitud\_circunferencia}{diametr}<\frac{perímetro}{diametro}<\frac{14688}{4673\,{}^{1}\!/_{2}}<3\,{}^{1}\!/_{7}$$

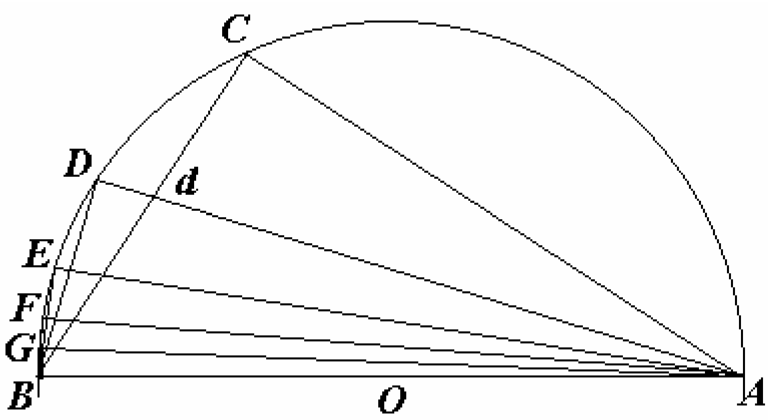
$$\frac{AB}{perímetro\_polígono\_96lados}>\frac{4673\,{}^{1}\!/_{2}}{14688}$$

Pero:

$$\frac{14688}{4673\,{}^{1}\!/_{2}}=3+\frac{667\,{}^{1}\!/_{2}}{4673\,{}^{1}\!/_{2}}<3\,{}^{1}\!/_{7}$$

Entonces la circunferencia será menor de $3\,{}^{1}\!/_{7}$ veces el diámetro de AB.

Aproximación por el interior.



Ahora tomar AB como el diámetro de un circulo, siendo el ángulo de A igual a una tercera parte del ángulo recto y obtenemos el punto C al cortar con la circunferencia. Unir C con B.

Entonces:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}$$

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

1.- Trazamos AD con la bisectriz del ángulo BAC y cuando corte con BC tendremos el punto d. Unir BD.

Entonces:

Ángulo BDA = ángulo dAC = ángulo dBD

Y como los ángulos D y C son ambos ángulos rectos llegamos a la conclusión de que ADB, BDd son semejantes.

Teniendo en cuenta que el triángulo ACd es semejante al ADB

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{Dd}=\frac{AB}{Bd}=\frac{(AB+AC)}{(Bd+Cd)}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AD}{DB}$$

Entonces:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BA+AC}{BC}=\frac{BA}{BC}+\frac{AC}{BC}<\frac{2}{1}+\frac{1351}{780}=\frac{2911}{780}$$

$$(1)\,\frac{AD}{DB}<\frac{2911}{780}$$

$$AB^2=AD^2+BD^2$$

$$\frac{AB^2}{DB^2}=\frac{AD^2}{BD^2}+1<\frac{2911^2}{780^2}+1=\frac{9082321}{608400}$$

$$\sqrt{9082321}<3013\,{}^{3}\!/_{4}$$

$$(2)\,\frac{AB}{BD}<\frac{3013\,{}^{3}\!/_{4}}{780}$$

2.- Trazar AE con la bisectriz del ángulo BAD, encontrar el punto E cuando la circunferencia corte con la bisectriz, unir B con E. Entonces probamos del mismo modo que antes que:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AB+AD}{BD}<\frac{3013\,{}^{3}\!/_{4}}{780}+\frac{2911}{780}=\frac{5924\,{}^{3}\!/_{4}}{780}$$

$$(3)\,\frac{AE}{EB}<\frac{5924\,{}^{3}\!/_{4}}{780}=\frac{1823}{240}$$

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$
$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{AE^2}{BE^2} + 1 < \frac{1823^2}{240^2} + 1 = \frac{3380929}{57600}$$
$$\sqrt{3380929} < 1838\, {}^{9}\!/\!{}_{11}$$
$$(4)\ \frac{AB}{BE} < \frac{1838\, {}^{9}\!/\!{}_{11}}{240}$$

3.- Trazar AF con la bisectriz del ángulo BAE, encontrar el punto F cuando la bisectriz corte con la circunferencia.

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AB + AE}{BE} = \frac{AB}{BE} + \frac{AE}{BE} < \frac{3661\, {}^{9}\!/\!{}_{11}}{240}$$
$$(5)\ \frac{AF}{FB} < \frac{3661\, {}^{9}\!/\!{}_{11}}{240}$$

$$AB^2 = AF^2 + BF^2$$
$$\frac{AB^2}{BF^2} = \frac{AF^2}{BF^2} + 1 < \frac{1007^2}{66^2} + 1 = \frac{1018405}{4356}$$
$$\sqrt{1018405} = 1009\, {}^{1}\!/\!{}_{6}$$
$$(6)\ \frac{AB}{BF} < \frac{1009\, {}^{1}\!/\!{}_{6}}{66}$$

4.- Trazar AG con la bisectriz del ángulo BAF, encontrar el punto G cuando la bisectriz corte con la circunferencia.

Con (5) y (6) $\frac{AG}{GB} < \frac{2016\, {}^{1}\!/\!{}_{6}}{66}$

Entonces:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2$$

$$\frac{AB^2}{BG^2} = \frac{AG^2}{BG^2} + 1 < \frac{\left(2016\ \frac{1}{6}\right)^2}{66^2} + 1 = \frac{4069284\ \frac{1}{36}}{4356}$$

$$(7)\ \frac{AB}{BG} = \frac{2017\ \frac{1}{4}}{66} (Expresado\_en\_raices)$$

Entonces BG es un lado de un polígono regular inscrito de 96 lados.

$$\frac{perimetro\_del\_poligono}{AB} > \frac{6336}{2017\ \frac{1}{4}} = \frac{perímetro}{diametro} = 96.\frac{BG}{AB} = 96.\frac{66}{2017\ \frac{1}{4}}$$

$$\frac{6336}{2017\ \frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

Entonces hemos encontrado con sucesivas aproximaciones que la relación que la longitud de la circunferencia tiene con su diámetro es:

$$3\ \frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$$

4.- BIBLIOGRAFIA.

Libros:

- Carl B. Boyer, Historia de las matemáticas, Alianza universidad textos, edición traducida al castellano en 1986, edición original publicada en 1986.

Material informático:

- Enciclopedia Encarta 2000.

Páginas web consultadas:

www.cs.mcgill.ca/~cs507/projects/1998/zafiroff/

www.csun.edu/~krs20354/duplication.html

En estas dos páginas se encuentra un buen y extenso documento acerca del problema de la duplicación del cubo, analiza los distintos matemáticos que han estudiado el problema y expone sus soluciones, la mayoría sin utilizar la geometría analítica aunque a veces la usa para comparar. Además de ofrecer una gran cantidad de enlaces hacia todo tipo de páginas relacionadas con el problema como bibliografías, enciclopedias …

www.multimania.com/villemingerard/Histoire/Duplcube.htm

Página bastante interesante y completa a cerca del problema de la duplicación del cubo. Su evolución a traves de la historia.

www.history.mcs.st-andews.ac.uk/history/Mathematicians/Archytas.html

Biografía de Arquitas y descripción de las matemáticas en el siglo V a. C.

www.groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/Doubling_the_cube.html

Buena y extensa descripción histórica del problema de la duplicación del cubo a lo largo de la historia con algunas de las soluciones más importantes, contiene abundantes enlaces hacia bibliografías de los matemáticos que han estudiado el problema

www.cenamec.org.ve/matemat/aqui_tor/aquitor4.html

Breve introducción acerca del problema de la duplicación del cubo en clave de conversación entre Aquiles y la tortuga ofrece una introducción y explicación adecuada para introducirte en el concepto.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html

El número π a lo largo de la historia con sus más famosas aproximaciones.

www.maseducativa.com/webs/riveron/art2pag2.htm

Corta introducción de las matemáticas en Grecia.

www.castillayleon.com/cultura/cientificos/eratostenes.htm

En esta página encontramos la vida de Eratostenes

www.mat.usach.cl/histmat/html/apol.html

www.interactiva.matem.unam.mx/apolonio/apolonio.html

En estas dos páginas se trata la biografía de Apolonio.

www.arrakis.es/~mcj/conicas.htm

www.lafacu.com/apuntes/matematica/conicas/default.htm

www.lafacu.com/apuntes/matematica/estu_coni/default.htm

En estas tres páginas encontramos documentos acerca de las cónicas en base a la geometría analítica, no son páginas de elevado nivel y utilidad para este trabajo, son páginas para dar una idea acerca del concepto de cónicas.

www.sectormatematica.cl/biografias/apolonio.htm

Encontramos la biografía de Apolonio y una descripción de sus obras, dando más interés a las cónicas.

www.oma.org.ar/invydoc/intro_parabola.htm

En esta página encontramos una introducción al concepto de parábola su aparición y un poco su historia. También comenta sus caracteristicas más destacables, en base a la geometría analítica.

www.lanzadera.com\elartedelalógica

En esta página encontramos buena información acerca del problema clásico de la cuadratura del circulo

www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/conic.htm
www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/apolonio.htm
www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/otraso.htm

En estas páginas encontramos un buen documento sobre las cónicas antes de Apolonio, su situación histórica, la obra de Apolonio Cónicas. Se trata de unas páginas bastante fiables y completas