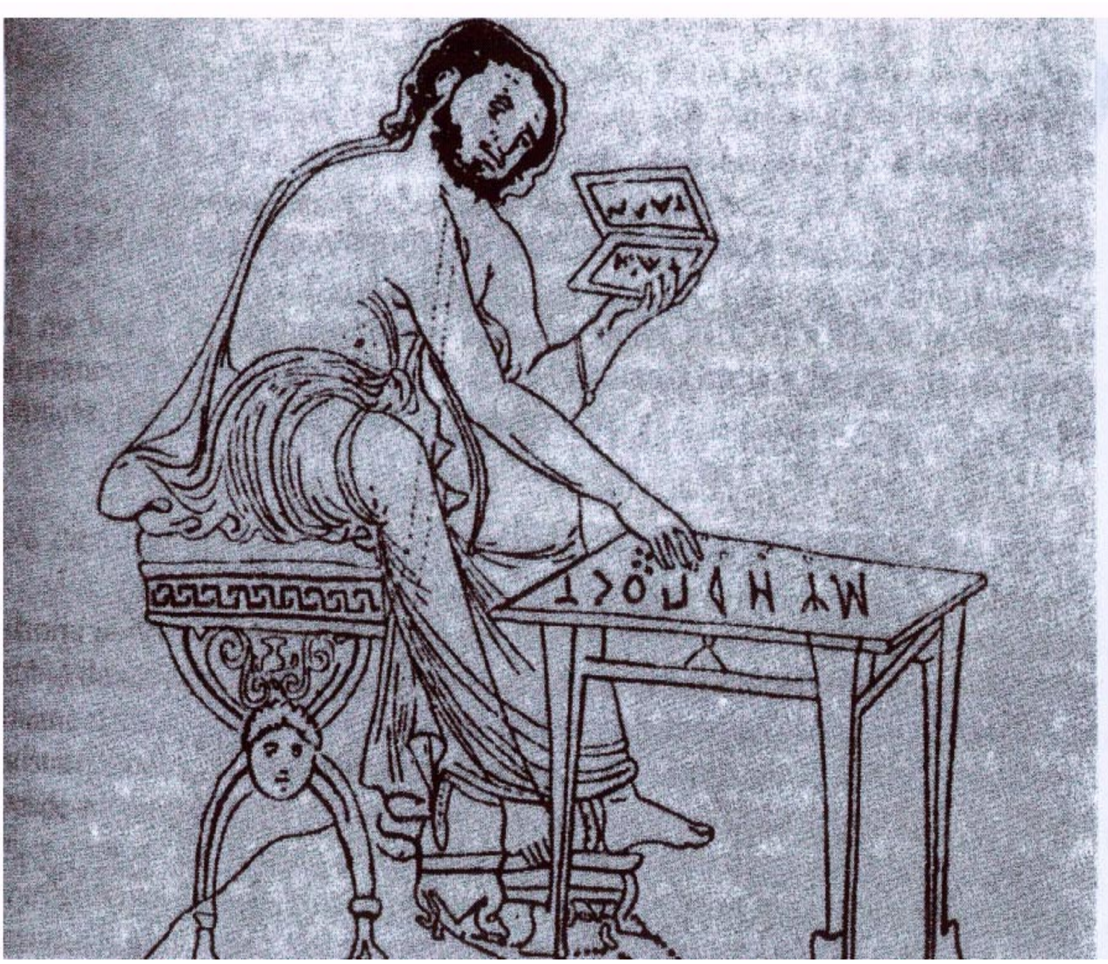
LAS MATEMATICAS EN GRECIA

DURANTE LOS AÑOS

800 a.C- 600 d.C.



Este trabajo ha sido realizado por el alumno:

Iván Sánchez Menor.
Industrias Agraria y Alimentaria.

Ingeniería Técnica Agraria (Ciudad Real).

INDICE:

BIBLIOGRAFIA.

1.- LOS ORIGENES DE LA MATEMATICA CLASICA GRIEGA.

1.1.- EL MARCO HISTORICO.

En la historia de la civilización los griegos alcanzaron una posición preeminente, y en la historia de la matemática su época fue una de las más brillantes. A pesar de que tomaron muchos elementos prestados de las civilizaciones vecinas, los griegos edificaron una civilización y una cultura originales, de las más impresionantes de toda la historia de la humanidad, la que más a influido en el desarrollo de la cultura occidental moderna, y que fue decisiva en la fundamentacion de la matemática tal como la entendemos hoy. Uno de los grandes problemas de la historia de la cultura es el de dar cuenta de la brillantez y de la creatividad de los antiguos griegos.

Aunque nuestro conocimiento de los orígenes de su historia esta sujeto, evidentemente, a revisiones y clarificaciones según vallan avanzando las investigaciones arqueológicas, tenemos motivos para creer, sobre la base de la *Iliada* y la *Odisea de Homero*, del desciframiento de las antiguas lenguas y escrituras, y de las mismas excavaciones arqueológicas, que la civilización griega se remonta hacia el 2800 a.C. Los griegos se instalaron en Asia Menor, que pudo haber sido su lugar de origen, en el territorio continental europeo que constituye la Grecia Moderna, y en el sur de Italia, Sicilia, Creta, Rodas, Delos y el norte de Africa. Hacia el 775 a.C., los griegos sustituyeron varios sistema de escritura jeroglífica que utilizaban por la escritura alfabética fenicia (que también utilizaban ya los hebreos). Con la adopción del alfabeto, los griegos se convirtieron en un pueblo mas letrado y mucho más capaz de registra tanto su historia como sus ideas.

Con el establecimiento definitivo de los griegos en estos territorios, entraron en contacto comercial y cultural con los egipcios y los babilonios. Hay abundantes referencias en los escritos clásicos griegos a los conocimientos de los egipcios, a los que algunos griegos llegaron a considera erróneamente como los fundadores de la ciencia, en particular de la agrimensura, la astronomía y la aritmética. Muchos griegos viajaron a Egipto para estudiar y conocer a sus gentes, mientras otros visitaban a Babilonia, y allí aprendieron su matemática y otras ciencias.

La influencia de Egipto y de Babilonia seguramente fue muy sensible en Mileto, una importante ciudad jónica en las costas de Asia Menor, en la que nacieron la filosofía, la matemática y las demás ciencias griegas. Mileto fue una importante y rica ciudad comercial del Mediterráneo, a cuyo puerto llegaban los barcos tanto de la Grecia continental como de Fenicia y de Egipto; Babilonia estaba, en cambio, conectada a Mileto por medio de rutas de caravanas hacia el Este. Jonia cayo en manos de los persas hacia el 540 a.C., aunque Mileto conservo cierto grado de independencia. Una vez aplastado, en 494 a.C. el levantamiento jonio contra Persia, Jonia comenzó a perder toda su importancia. Volvió a formar parte de la Grecia propiamente dicha en el 479 a.C., cuando los griegos derrotaron a los persas, pero para entonces la actividad cultural se había desplazado ya al territorio de la Grecia continental con centro en Atenas.

A pesar de que la civilización griega antigua duró hasta el 600 d.C., aproximadamente, desde el punto de vista de la historia de la matemática conviene distinguir dos periodos: el clásico, que va desde el 600 al 300 a.C., y el alejandrino o helenístico, desde el 300 a.C. al 600 d.C. La adopción del alfabeto que ya he mencionado, y el hecho de que el papiro estuviera disponible en Grecia durante el siglo VII a.C. quizás puedan explicar el florecimiento cultural que tuvo lugar hacia el 600 a.C. Indudablemente, el disponer de este material de escritura ayudo mucho a la hora de difundir las ideas.

1.2.- LAS FUENTES GENERALES.

Sorprendentemente, las fuentes de las que procede nuestro conocimiento de la matemática griega son menos directas y fiables que las que tenemos de la matemática egipcia y babilónica, mucho más antiguas, debido a que no nos ha llegado ningún manuscrito original de los matemáticos griegos importantes de esa época. Una razón es, sin duda, la de que el papiro es un material de frágil consistencia; no obstante, los egipcios también utilizaron el papiro y, por suerte, se salvaron unos pocos de sus documentos matemáticos. Algunos de los voluminosos escritos griegos también podrían haber llegado hasta nosotros si no hubieran resultado destruidas sus grandes bibliotecas.

Nuestras fuentes principales para las obras matemáticas griegas son los códices bizantinos manuscritos en griego, escritos entre 500 y 1500 años después de que fueran escritas las obras griegas originales. Estos códices no suelen ser reproducciones literales, sino ediciones criticas, de manera que no podemos estar seguros de que tipo de cambios hicieron en su día los editores. También disponemos a veces de traducciones al árabe de las obras griegas, y de las versiones latinas de estas traducciones al árabe; aquí, una vez mas, no se sabe que cambios pueden haber realizado los traductores ni hasta que punto entendían correctamente los textos originales. Además, incluso los textos griegos utilizados por los autores árabes y bizantinos pudieron muy bien ser de autenticidad dudosa. Por ejemplo, aunque no disponemos del manuscrito de Heron, matemático griego de la época alejandrina, si sabemos que hizo un cierto numero de modificaciones en los *Elementos de Euclides*, dando demostraciones distintas y añadiendo nuevos casos de teoremas y sus recíprocos. Análogamente, Teón de Alejandría (finales del siglo IV d.C.) nos dice que modificó algunas de las secciones de los *Elementos* en su edición, y las versiones griegas y árabes que nos han llegado pueden provenir de tales versiones de los originales. Sin embargo, de una u otra forma, lo cierto es que disponemos de las obras de Euclides, de Apolonio, de Arquímedes, de Ptolomeo, de Diofanto y de otros muchos matemáticos griegos. Muchos textos griegos escrito durante el periodo clásico y el alejandrino no han llegado hasta nosotros porque ya incluso en plena época griega se vieron superados por los escritos de estos autores.

Los griegos escribieron algunas historias de la matemática y de otras ciencias. Así, por ejemplo, Eudemo (siglo IV a.C.), miembro de la escuela aristotélica, escribió una historia de la aritmética, otra de la geometría y otra de la astronomía, historias que, salvo fragmentos citados por escritores posteriores, se han perdido. La historia de la geometría trataba del periodo anterior a Euclides, y evidentemente seria inapreciable disponer de ella. Teofrasto (c.372-c.287 a.C.), otro discípulo de Aristóteles, escribió por su parte una historia de la física, que también se ha perdido, excepto unos cuantos fragmentos.

Además de los anteriores, tenemos dos importantes comentarios; Pappus (finales del siglo III d.C.) escribió su *Synagoge* o *Colección Matemática*, de la que conservamos casi su totalidad en una copia del siglo XII. Se trata de una exposición de la mayor parte de la obra de los matemáticos griegos clásicos y alejandrinos desde Euclides a Ptolomeo, complementada por un cierto numero de lemas y teoremas que añade Pappus para facilitar su comprensión. Pappus mismo escribió también otra obra anterior titulada *Tesoro del Análisis*, que era una colección formada por las propias obras griegas. Esta obra se ha perdido, pero el libro VII de su *Colección Matemática* nos resume lo que contenía el *Tesoro*.

El segundo comentarista importante es Proclo (410-485 d.C.), escritor muy prolífico. Proclo extrajo su material de los textos originales de los matemáticos griegos y de otros comentaristas anteriores. De las obras que nos han llegado, su *Comentario*, que estudia el libro I de los *Elementos* de Euclides, es el mas importante. Según todos los indicios, Proclo trataba de escribir un comentario más extenso de los *Elementos*, pero al parecer nunca lo hizo. El *Comentario* contiene una de las tres citas atribuidas tradicionalmente a la historia de la geometría de Eudemo, pero probablemente tomadas de una modificación posterior. Este resumen concreto, el mas largo de los tres, suele conocerse como el < sumario > de Eudemo. Proclo también nos dice algo sobre la obra de Pappus, de manera que, aparte de las ediciones y versiones posteriores de los clásicos griegos mismos, la *Colección Matemática* de Pappus y el *Comentario* de Proclo son las dos fuentes principales para historia de la matemática griega.

Por lo que se refiere a las redacciones literales originales (aunque no, desde luego, los manuscritos), solo disponemos de un fragmento relativo a la cuadratura de las lúnulas de

Hipócrates, citado por Simplicio (primera mitad del siglo IV d.C) y tomado de la *Historia d la Geometría* perdida de Eudemo, y un fragmento de Arquitas sobre la duplicación del cubo, y de los manuscritos originales nos han llegado algunos papiros escritos de la época alejandrina. Las fuentes no estrictamente matemática, pero si próximas, han resultado ser también de un enorme valor para la historia de la matemática griega. Por ejemplo, los filósofos griegos, especialmente Platón y Aristóteles, tenían mucho que decir sobre la matemática, y sus escritos han sobrevivido como las obras matemáticas mismas.

La reconstrucción de la historia de la matemática griega, basada en las fuentes que se han mencionado, ha resultado una tarea gigantesca y complicada. A pesar de los grandes esfuerzos de los historiadores, todavía quedan lagunas en nuestros conocimientos y algunas de las conclusiones son discutibles; sin embargo, los hechos básicos están razonablemente claros.

2.- EL PERIODO CLASICO.

2.1.- LAS PRINCIPALES ESCUELAS DEL PERIODO CLASICO.

Las contribuciones más importantes del periodo clásico son los *Elementos* de Euclides y las *Secciones Cónicas* de Apolonio. Para apreciar correctamente estas obras son necesarios algunos conocimientos de los grandes cambios experimentados en la naturaleza de misma de la matemática y de los problemas con que se enfrentaron, y resolvieron, los griegos. Por otra parte, estas obras tan acabadas nos dan muy poca información sobre los trescientos años de actividad creadora que las precedieron o de las cuestiones que iban a ser vitales en la historia posterior.

La matemática clásica griega se desarrollo en diversos centros que se sucedían unos a otros, basándose cada uno en la obra de sus predecesores. En cada uno de estos centros, un grupo informal de matemáticos realizaba sus actividades dirigidos por uno o mas sabios. Este tipo de organización a seguido funcionando en la época moderna, y su razón de ser se comprende fácilmente; hoy mismo, cuando un sabio importante se establece en un lugar en concreto –normalmente en una Universidad, otros estudiosos le siguen para aprender del maestro.

La primera de estas escuelas, la escuela jónica, fue fundada por Tales (c.640-546 a.C.) en Mileto. No se sabe con exactitud si Tales mismo enseño a muchos otros, pero si se sabe que los filósofos Anaximandro (c.610-c.547 a.C.) y Anaxímenes (c.550-480 a.C) fueron discípulos suyos. Anaxágoras (c.500-c.428 a.C.) perteneció también a esta escuela, y se supone que Pitágoras mismo (c.585-c.500 a.C.) pudo haber aprendido matemáticas de Tales; mas tarde, Pitágoras fundaría su propia e importante escuela en el sur de Italia. Hacia finales del siglo IV, Jenofanes de Colofón, en Jonia, emigro a Sicilia y fundo a su vez un centro al que pertenecieron los filósofos Parménides (siglo V a.C.) y Zenón (siglo V a.C.). Estos últimos se establecieron en Elea, en el sur de Italia, ciudad a la que se traslado la escuela, y por eso se conoció a este grupo como la escuela Eleática. Los sofistas, que se mostraron activos desde mediados del siglo V en adelante, se concentraron principalmente en Atenas, ciudad en la que la escuela mas famosa fue la de Academia de Platón, de la que seria discípulo Aristóteles. La academia tubo una importancia sin precedentes para el pensamiento griego, sus discípulos y asociados fueron los mas grandes filósofos, matemáticos y astrónomos de su época; y esta escuela conservaría su preeminencia en filosofía incluso después de que la capital de las matemáticas pasara a Alejandría. Eudoxo, que aprendió matemáticas principalmente de Arquitas de Tarento (Sicilia), fundo su propia escuela en Cizico, ciudad del norte de Asia Menor. Cuando Aristóteles abandono la academia de Platón, fundo a su vez otra escuela en Atenas, el Liceo; esta escuela ha recibido tradicionalmente el nombre de Escuela Peripatética. No todos los grandes matemáticos del periodo clásico pueden relacionarse con una escuela en concreto, pero para mayor claridad y coherencia se estudiara la obra de cada matemático en relación con una escuela en particular, incluso si su asociación a ella no fue demasiado estrecha.

2.1.1.- LA ESCUELA JONICA

El fundador de esta escuela y su figura mas importante fue Tales de Mileto. Aunque no se sabe nada con seguridad acerca de su obra y de su vida. Tales nació y vivió probablemente en Mileto; viajo mucho y durante algún tiempo vivió en Egipto, donde desarrollo actividades comerciales y, al parecer, aprendió mucho acerca de la matemática egipcia. Se supone, además, que fue un astuto comerciante que, aprovechando una buena cosecha de aceitunas, alquilo todas las almazaras de Mileto y Chios para realquilarlas después a un precio mas alto. Se dice que Tales anuncio un eclipse de sol en el año 585 a.C., pero esto es muy dudoso teniendo en cuenta los conocimientos astronómicos de la época.

Se le atribuye también el calculo de las alturas de las pirámides comparando sus sombras con la de un bastón de altura conocida, en el mismo instante, y mediante el mismo uso de los triángulos semejantes se supone que calculo la distancia desde un buque a la playa. También se le ha atribuido la transformación de la matemática en una ciencia abstracta, y haber dado demostraciones deductivas de algunos teoremas, pero ambas cosas son de nuevo dudosas. Por ultimo, se le ha atribuido a Tales el descubrimiento del poder de atracción de los imanes así como de la electricidad estática.

La escuela jónica solo merece una breve mención por su contribución a la matemática propiamente dicha, pero su importancia para la filosofía, y la filosofía de la ciencia en particular, fue enorme. Esta escuela perdió su importancia a partir de la conquista de la región por los persas.

2.1.2.- LOS PITAGORICOS

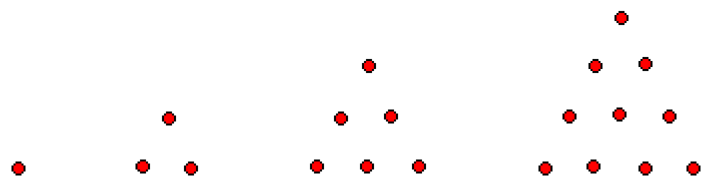
La antorcha fue recogida por los pitagóricos que, habiendo aprendido de Tales, según se cuenta, fundaron su propia escuela en Crotona, asentamiento griego en el sur de Italia. No se conoce ninguna obra escrita por los pitagóricos, y solo se sabe de ellos por los escritos de otros, entre los que hay que incluir a Platón y Herodoto. Concretamente, apenas se sabe nada de la vida personal de Pitágoras y de sus seguidores, ni se puede tener la seguridad de qué hay que atribuirle a él personalmente o a sus discípulos. Por lo tanto, cuando se habla de la obra de los pitagóricos hay que tener en cuenta que en realidad nos estamos refiriendo a la obra del grupo entre el 585 a.C., presunta fecha de su nacimiento, y aproximadamente el 400 a.C. Filolao (siglo V a.C.) y Arquitas (428-347 a.C.) fueron dos miembros destacados de esta escuela.

Pitágoras nació en la isla de Samos, próxima a la costa de Asia Menor, y, después de algún tiempo estudiando con Tales de Mileto, viajo a otros países, entre ellos Egipto y Babilonia, donde asimilo su matemática al mismo tiempo que sus teorías místicas, y finalmente se estableció en Crotona. En esta ciudad fundo una especie de hermandad de tipo religioso, científico y filosófico. En realidad, era formalmente una escuela con un numero limitado de miembros que aprendían de sus maestros. Las enseñanzas impartidas al grupo se mantenían en secreto por parte de los miembros, aunque, por lo que se refiere a la matemática y a la física, algunos historiadores niegan que existiera tal secreto. Se supone que los pitagóricos participaron en la política de su cuidad aliándose con la facción aristocrática y terminaron siendo expulsados violentamente por el partido democrático o popular. Pitágoras huyo a la cercana Metaponto y allí murió, al parecer asesinado, hacia el 497 a.C. Sus seguidores se esparcieron por otras ciudades griegas y continuaron sus enseñanzas.

Una de las grandes contribuciones griegas al concepto mismo de la matemática fue el reconocimiento consciente y el énfasis puesto en el hecho de que los objetos matemáticos, números y figuras geométricas, son abstracciones ideas producidas por la mente y claramente distintas de los objetos o imágenes físicas. Es cierto que incluso algunas civilizaciones primitivas, y con seguridad los egipcios y los babilonios, habían aprendido a pensar en los números separados de los objetos físicos, y, sin embargo, cabe preguntarse en que medida eran conscientes del carácter abstracto de tal pensamiento. Por otra parte, los conceptos geométricos de todas las civilizaciones precedencias estaban decididamente ligados a la materia. Para los egipcios, por ejemplo, una recta no era mas que una cuerda tensa o el borde de un terreno, y un triángulo, su frontera.

El reconocimiento de que la matemática trabaja con abstracciones puede atribuirse con cierta seguridad a los pitagóricos. Sin embargo, puede que esto no fuera cierto desde el principio; Aristóteles nos dice, por ejemplo, que los pitagóricos consideraban a los números como los componentes últimos de los objetos materiales del mundo real. Así pues, los números no tenían una existencia separada de los objetos sensibles. Cuando los primeros pitagóricos decían que todos los objetos estaban compuestos por números (enteros), o que los números eran la esencia del universo, lo entendían en sentido literal, porque los números eran para ellos como los átomos para nosotros: Se supone incluso que los pitagóricos de los siglos VI y V no distinguían realmente los números de los puntos geométricos, entendidos, naturalmente, como puntos extensos o esferas minúsculas. Sin embargo, Eudemo, según informa Proclo, decía que Pitágoras se remonto a principios mas altos (que los de los egipcios y los babilonios) y se ocupo de problemas abstractos de la inteligencia pura. Eudemo añade que Pitágoras fue el verdadero creador de la matemática pura, a la que convirtió en un arte liberal.

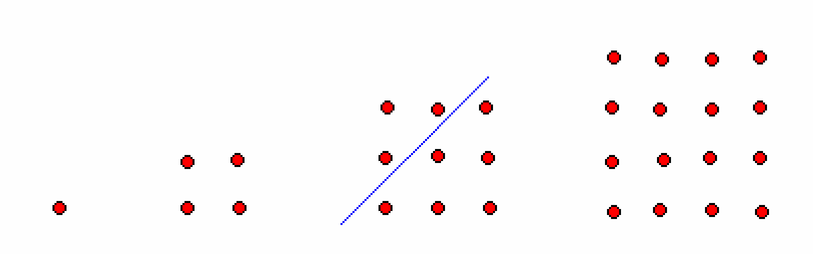
Los pitagóricos solían representar los números mediante puntos en la arena o piedrecillas, clasificándolos según las formas de estas distribuciones de piedras o de puntos. Así, los números 1, 3, 6, 10, etc., recibían el nombre de triangulares porque los puntos correspondientes podían distribuirse en forma de triángulo equilátero. El cuarto numero triangular, el 10, ejerció una fascinación especial sobre los pitagóricos, siendo para ellos una especie de numero sagrado, que tiene cuatro puntos en cada lado; el 4 era otro de sus números favoritos.



Números triangulares

Los pitagóricos, comprobaron que las sumas 1, 1+2, 1+2+3, y así sucesivamente, daban lugar a los números triangulares y que $1+2+...+ n = n (n+1) / 2$.

Los números 1, 4, 9, 16, etc.. recibieron el nombre de números cuadrados debido a que sus puntos pueden distribuirse formando cuadrados. Los números compuestos (o no primos) que no eran cuadrados perfectos recibían el nombre de oblongos.



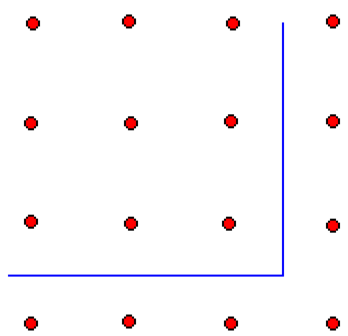
Números Cuadrados

A partir de las distribuciones geométricas de los puntos aparecían como evidentes ciertas propiedades de los números enteros; por ejemplo, trazando la recta del tercer numero cuadrado se descubre que la suma de los dos números triangulares consecutivos es un numero cuadrado. Esto es verdad en general, como se puede ver en la notación moderna:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)^2$$

Sin embargo, es dudoso que los pitagóricos pudieran demostrar esta conclusión general.

Para pasar de un numero cuadrado al siguiente, los pitagóricos seguían el esquema de la figura; los puntos a la derecha y bajo las rectas en la figura forman lo que ellos llamaban un gnomon. Simbólicamente, lo que descubrieron era que $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. Además, si partimos del 1 añadimos el gnomon 3 y después el gnomon 5, y así sucesivamente, lo que tenemos es, en nuestro simbolismo, $1+3+5+....+(2n-1)=n^2$.



Con respecto a la palabra "gnomon", probablemente significo al principio, en Babilonia, una varilla vertical cuya sombra marcaba la hora. En la época de Pitágoras significaba una escuadra de carpintero, y esta es la forma del gnomon anterior. También significaba lo que queda de un cuadrado al cortar otro cuadrado mas pequeño de una de sus esquinas, y mas tarde, con Euclides, significo lo que queda de un paralelogramo al cortar otro mas pequeño de una de sus esquinas, siempre que este fuera semejan al primero.

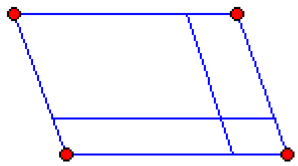


Figura 2.1

Los pitagóricos también estudiaron los números poligonales, tales como los pentagonales, hexagonales y otros, el primer numero pentagonal es el 1; el segundo, cuyos puntos forman los vértices de un pentágono, es el 5; el tercero es 1+4+7=12, y así sucesivamente. Análogamente, los números hexagonales son 1, 6, 15, 28, ..., y en general $2n^2$-n.

Se llamó número perfecto a todo aquel que es igual a la suma de sus divisores, incluido el 1, pero no el propio número; por ejemplo, 6, 28, 496. A los que excedían a la suma de sus divisores se les llamo excesivos, y al os que eran menores de dicha suma, defectivos. A dos números se los llamo amigos cuando cada uno de ellos era igual a la suma de los divisores del otro, por ejemplo, 284 y 220.

Los pitagóricos descubrieron una regla para construir ternas de números enteros que pudieran ser lados de un triángulo rectángulo, sobre los cuales hablaremos mas en adelante. Así, descubrieron que si m es impar, entonces m, $(m^2+1)/2$ y $(m^2-1)/2$ constituyen una de esas ternas. Sin embargo esta regla solamente da alguna de ellas. Cualquier terna de números enteros que represente los lados de un triángulo rectángulo recibe el nombre de terna pitagórica.

Para los pitagóricos, los números eran únicamente los números enteros y una razón entre dos números no era una fracción y, por lo tanto, otro tipo de numero como en la época moderna. Las fracciones concretas, utilizadas para expresar parte de una unidad monetaria o de una medida, se utilizaban evidentemente en el comercio, pero tales usos comerciales de la aritmética quedaban fuera del marco de la matemática griega propiamente dicha. Por lo tanto, los pitagóricos se vieron desagradablemente sorprendidos por el descubrimiento de que algunas razones , por ejemplo, la razón de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles a un cateto o, lo que es lo mismo, de la diagonal al lado de un cuadrado, no podían expresarse por medio de números enteros. Dado que los pitagóricos se habían dedicado a estudiar las ternas de números enteros que podían ser lados de un triángulo rectángulo, lo mas probable es que descubrieran estas nuevas razones en el mismo contexto. Llamaron razones conmensurables a las que se podían expresar por medio de números enteros, lo que significaba que las dos cantidades venían medidas por una unidad común, y a las que no eran expresables de esa manera, razones inconmensurables. Una razón entre magnitudes inconmensurables recibió el nombre de *alogos* o inexpresable, aunque también se utilizo el termino *arretos* o que no tiene razón. El descubrimiento de las razones inconmensurables se atribuye a Hipaso de Metaponto (siglo V a. C.), suponiéndose que los pitagóricos se encontraban navegando en el mar en esa época y que lanzaron a Hipaso por la borda como castigo por haber introducido en el universo un elemento que negaba la teoría pitagórica de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones.

En la matemática moderna las razones inconmensurables se expresan por medio de números irracionales, pero los pitagóricos nunca habrían aceptado tales números. Los babilonios trabajaron, de hecho, con tales números mediante aproximaciones, aunque probablemente no sabían que tales aproximaciones sexagesimales fraccionarias nunca podían ser exactas, así como tampoco los egipcios llegaron a reconocer el carácter distinto de los irracionales. Los pitagóricos, al menos, reconocieron que las razones inconmensurables son de un tipo completamente diferente de las conmensurables.

Este descubrimiento planteo un problema central en la matemática griega. Hasta este momento los pitagóricos habían identificado numero y geometría, pero la existencia de razones inconmensurables destruía esta identificación. No cesaron de considerar todo tipo de longitudes, áreas y razones en geometría, pero se restringieron a considerar razones numéricas únicamente para el caso conmensurable. La teoría de proporciones para razones inconmensurables y para todo tipo de magnitudes se debe a Eudoxo, de cuya obra se hablara mas en adelante.

Hay algunos otros resultados geométricos descubiertos también por los pitagóricos. El mas famoso es, desde luego, el mismísimo teorema de Pitágoras, un teorema clave para la geometría euclidea, pero también se le atribuyen muchos de los teoremas que conocemos sobre triángulos, rectas paralelas, polígonos, círculos, esferas y los poliedros regulares. Concretamente, sabían que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º, y entre otros resultados conocían una teoría restringida de figuras semejantes y el hecho de que un plano puede ser recubierto por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Los pitagóricos empezaron a estudiar un tipo de problemas conocidos con el nombre de aplicación de áreas. El mas sencillo de ellos era el de construir un polígono de área igual a uno dado y semejante a otro dado. Otro consistía en construir una figura concreta con un área que excedía o resultaba defectuosa de otra en un área dada. La forma mas importante del problema de aplicación de áreas es: dado un segmento, construir sobre una parte de él o sobre él mismo extendido un paralelogramo igual en área a una figura rectilínea dada y resultando deficiente (en el primer caso) o excediendo (en el segundo caso) en un paralelo semejante a uno dado. Mas adelante se vera con mas detenimiento estas aplicaciones al hablar de Euclides.

La contribución mas esencial de los griegos a la matemática fue su insistencia en que todos los resultados matemáticos deberían ser establecidos deductivamente a partir de un sistema explícito de axiomas. Por lo tanto, se plantea la cuestión de si los pitagóricos demostraban ya sus resultados geométricos. No podemos dar una respuesta definitiva, pero es muy dudoso que los pitagóricos del periodo antiguo o medio exigieran demostraciones deductivas, explícitas o implícitas, basadas en un sistema de axiomas de cualquier tipo. Proclo asegura que demostraron el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo, pero esto puede ser debido a los pitagóricos tardíos. La cuestión acerca de si demostraron el teorema de Pitágoras ha sido muy discutida, y la conclusión generalmente aceptada es la de que probablemente no. Es relativamente fácil demostrarlo utilizando resultados sobre triángulos semejantes, pero los cierto es que los pitagóricos no tenían una teoría completa de la semejanza. La demostración dada en la proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides (capitulo 4, sección 4) es difícil porque no utiliza la teoría de figuras semejantes, y se trata de una demostración que Proclo atribuye a Euclides mismo. La conclusión mas verosímil acerca de la `presencia de demostraciones en la geometría pitagórica es la de que durante la mayor parte de la vida de la escuela los miembros justificaban sus resultados sobre la base de casos especiales, análogamente a como hacían en aritmética. Sin embargo, en la época de los pitagóricos tardíos, es decir, hacia el 400 a.C., el *status* de la demostración había cambiado ya debido a desarrollos; así pues, estos miembros tardíos de la hermandad pudieron haber dado ya demostraciones rigurosas.

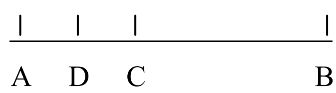
2.1.3.- LA ESCUELA ELEATICA

El descubrimiento pitagórico de las razones inconmensurables introdujo en escena una dificultad que preocupo a los griegos, a saber, la relación entre lo discreto y lo continuo. Los números enteros representan objetos discretos y una razón conmensurable representa una relación entre dos colecciones de objetos discretos o entre dos longitudes que admiten una unidad de medida común, de manera que cada una de ellas es una relación discreta de unidades. Sin embargo, las longitudes en general no son colecciones discretas de unidades, y este es el motivo de que aparezcan las razones de longitudes inconmensurables. En otras palabras, longitudes, áreas, volúmenes, tiempos y otras cantidades son continuas. Nosotros diríamos que los segmentos rectilíneos, por ejemplo, pueden tener longitudes racionales o irracionales en términos de alguna unidad concreta, pero los griegos no dieron ese paso.

El problema de la relación entre lo discreto y lo continuo fue puesto en evidencia por Zenón, que vivió en la ciudad de Elea, al sur de Italia. Zenón nació entre el año 495 y el 480 a.C., y era mas bien un filosofo que un matemático, del que, al igual que de su maestro Parménides, se dice que fue inicialmente pitagórico. Zenón propuso un cierto numero de paradojas, cuatro de las cuales tratan del movimiento, cuyo objeto no esta del todo claro debido a nuestro conocimiento incompleto de la historia de la filosofía griega. Se dice que con ellas pretendía defender a Parménides, que había sostenido que el movimiento o el cambio en general es imposible, y también que trataba de atacar a los pitagóricos, que creían en unidades extensas pero indivisibles, los puntos de la geometría. No se sabe exactamente lo que dijo Zenón, sino que nos vemos obligados a apoyarnos en citas de Aristóteles, que menciona a Zenón con objeto de criticarlo, y de Simplicio, que vivió en el siglo VI d.C y que basaba sus afirmaciones en los escritos de Aristóteles.

Las cuatro paradojas sobre el movimiento son distintas, pero el argumento importante probablemente consistía en las cuatro consideradas en bloque. En la época en que vivió Zenón había dos concepciones opuestas del espacio y del tiempo: una, que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo y <liso>; y la otra, que el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos espasmódicos. Los argumentos de Zenón están dirigidos contra ambas teorías, las dos primeras paradojas contra la primera, y las otras dos contra la segunda. La primera paradoja de cada pareja considera el movimiento de un único cuerpo, y la segunda el movimiento relativo de un cuerpo con respecto a otro.

Aristóteles formula en su física la primera paradoja, llamada de Dictomía, de la manera siguiente: < La primera afirma la no existencia del movimiento basándose en que lo que esta en movimiento debe alcanzar la posición a medio camino antes de alcanzar su meta >. Esto significa que para atravesar AB hay que alcanzar primero la posición C; para llegar a C hay que llegar primero a D, y así sucesivamente: En otras palabras, sobre la hipótesis de que el espacio es indefinidamente divisible y por lo tanto que una longitud finita contiene un numero infinito de puntos, es imposible cubrir incluso una longitud finita en un tiempo finito.



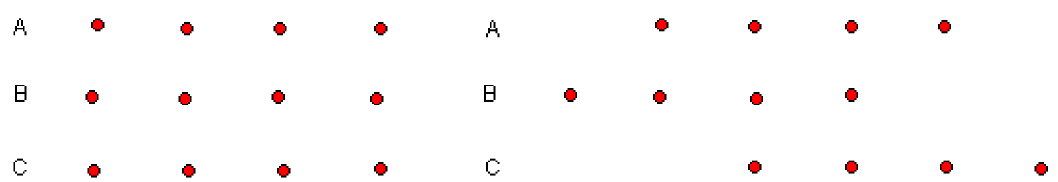
Aristóteles, intentando refutar a Zenón, dice que hay dos sentidos en los que una cosa puede ser infinita: en extensión o en divisibilidad. En un tiempo finito se puede establecer contacto con infinitas cosas en el sentido de la divisibilidad, ya que en este sentido el tiempo también es infinito; y así una extensión finita de tiempo puede ser suficiente para cubrir una longitud finita. Según otros, este argumento de Zenón ha sido construido para poner de relieve que al atravesar una longitud finita hay que recorrer un numero infinito de puntos y así alcanzar el final de algo que esencialmente no tiene final.

La segunda paradoja lleva el nombre de Aquiles y la Tortuga. Según Aristóteles: “Afirma que el objeto que se mueve mas lentamente no puede ser alcanzado por el mas rápido ya que el perseguidor debe llegar mas primero al punto del cual partió el perseguido, de manera que el mas lento necesariamente esta siempre en cabeza. El argumento es análogo al de la Dictonomía, pero la diferencia radica en que no dividimos en mitades las distancias que se han de recorrer.” Aristóteles dice entonces que si el objeto que se mueve lentamente cubre una distancia finita, puede ser superado por la misma razón que daba al responder a la primera paradoja.

Las otras dos paradojas están dirigidas contar el movimiento “cinematográfico”. La tercera, llamada de la Flecha, nos la presenta como sigue: “La tercera paradoja que formulo Zenón es la de que una flecha moviéndose esta en reposo; él llega a esta conclusión a partir de la hipótesis de que el tiempo esta constituido por instantes. Si no fuera por esta hipótesis no habría tal conclusión.” Según Aristóteles, lo que dice Zenón es que en cualquier instante durante su movimiento la flecha ocupa una posición determinada y por lo tanto esta en reposo. Así pues, no puede estar en movimiento. Aristóteles afirma que esta paradoja falla si no admitimos las unidades de tiempo indivisibles.

La cuarta paradoja, llamada del Estadio o de las Filas en Movimiento, la fórmula Aristóteles con estas palabras: “La cuarta consiste en el argumento acerca de un conjunto de cuerpos moviéndose en una carrera y cruzándose con otro conjunto de cuerpos en numero igual y moviéndose en dirección opuesta, el primero, partiendo del final y el otro del punto medio y moviéndose ambos con igual velocidad; Zenón concluye que de esto se sigue que la mitad del tiempo es igual a su doble. El error consiste en suponer que dos cuerpos moviéndose a velocidades iguales consumen tiempos iguales en cruzarse, el primero con un cuerpo que esta en movimiento y el segundo con otro de igual tamaño que esta en reposo, hipótesis falsa”.

La interpretación más probable de la cuarta paradoja de Zenón podría formularse de la manera siguiente: supongamos que tenemos tres filas de soldados A, B y C, y que en la mínima unidad de tiempo toda la fila B se mueve una posición hacia la izquierda, mientras que en el mismo tiempo la fila C se mueve una posición hacia la derecha. Entonces, relativamente a B, C se ha movido dos posiciones, y por lo tanto ha debido haber una unidad de tiempo menor al cabo de la cual C estaría una posición a la derecha de B, o bien la mitad de la unidad de tiempo resultaría ser igual a la mitad de la misma.



Es posible que Zenón intentara simplemente señalar que la velocidad es relativa. La velocidad de C relativa a B no es la misma que la relativa a A. O bien puede haber querido indicar que no hay un espacio absoluto al que referir las velocidades. Aristóteles dice que la falacia de Zenón consiste en suponer que las cosas que se mueven con la misma velocidad emplean el mismo tiempo en adelantar a un objeto en movimiento y a un objeto fijo. Ni el argumento de Zenón ni la respuesta de Aristóteles son claros, pero si suponemos que la paradoja consiste en un ataque a los intervalos mínimos indivisibles y a los segmentos mínimos indivisibles de espacio, que es lo que Zenón intentaba atacar, entonces su argumentación tiene perfecto sentido.

Podemos incluir a Demócrito (c.460-c.370 a.C.) de Abdera, en Tracia, entre los eleáticos. Es fama que Demócrito fue un hombre de gran sabiduría que trabajo en muy diversos campos, incluida la astronomía. Dado que perteneció a la escuela de Leucipo, y este fue un discípulo de Zenón, muchas de las cuestiones matemáticas que estudio Demócrito debieron venir sugeridas por ideas de Zenón. Escribió obras de geometría, de aritmética y de líneas y sólidos continuos; concretamente, las obras geométricas pudieron muy bien haber estado entre los antecedentes de los *Elementos de Euclides*.

Arquímedes dice que fue Democrito quien descubrió que los volúmenes de un cono y de una pirámide son iguales a 1/3 de los volúmenes del cilindro y prisma que tienen la misma base y la misma altura, pero que las demostraciones de estos dos resultados se deben a Eudoxo. Demócrito consideraba al cono como una serie de capas muy finas e indivisibles, pero se encontró enfrentado con la dificultad de que si las capas fueran todas iguales darían un cilindro, mientras que si fueran distintas la superficie del cono no seria lisa.

2.1.4.- LOS SOFISTAS

Después de la derrota final de los persas en Micala el 479 a.C., Atenas se convirtió en la ciudad más importante de una liga de ciudades griegas, y en un floreciente centro comercial. La riqueza acumulada en el comercio, que hizo de Atenas la ciudad mas rica de su época, fue utilizada por el famoso gobernante Pericles para reconstruir y adornar la ciudad. Jonios, pitagóricos, y todo tipo de intelectuales se vieron atraídos a Atenas, donde se ponía un especial énfasis en el en el razonamiento abstracto con el fin de extender el dominio de la razón tanto a la naturaleza como al hombre mismo.

La primera escuela ateniense, llamada la de los sofistas, incluía eruditos maestros en gramática, retórica, dialéctica, elocuencia, moral y - lo que mas nos interesa – geometría , astronomía, y filosofía. Uno de sus objetivos principales era el de usar la matemática para entender el funcionamiento del universo.

Muchos de los resultados matemáticos obtenidos fueron subproductos de los intentos de resolver los tres famosos problemas de construcciones: construir un cuadrado de área igual a un circulo dado; construir la arista de un cubo de volumen doble de otro de arista dada; y trisecar un ángulo cualquiera: todo ello debía ser realizado con regla y compás únicamente.

Se han dado diversas explicaciones sobre el origen de estos famosos problemas de construcciones. Por ejemplo, una versión del origen del problema de la duplicación del cubo, encontrada en una obra de Erastótenes (c.284-192 a.C.), nos muestra que los habitantes de Delos, bajo el azote de una peste, consultaron al oráculo sobre al manera de librarse de ella, a lo que el oráculo respondió que debían construir un altar de tamaño doble del que ya existía, de forma cubica.

Los habitantes de Delos comprobaron que duplicando la arista no se duplicaba el volumen, y se dirigieron a Platón, quien les dijo que el dios del oráculo no había contestado así porque quisiera o necesitara un altar doble, sino para censurar a los griegos por su indiferencia con respecto a la matemática y su falta de respeto por la geometría. Plutarco cuenta la misma historia.

En realidad, estos problemas de construcciones eran generalizaciones de otros problemas ya resueltos por los griegos. Dado que cualquier ángulo podía ser bisecado, era natural plantearse la trisección. Y dado que la diagonal de un cuadrado es el lado de un cuadrado de arrea doble que el original, el problema correspondiente para el cubo resulta también muy natural. El problema de cuadrar el circulo es un caso típico de muchos problemas griegos de construir una figura de forma dada y de arrea igual a otra figura dada. Otro problema no tan famoso fue el de la construcción de los polígonos regulares de 7 o mas lados; aquí, de nuevo, la construcción.

Se han dado diversas explicaciones acerca de la restricción a la regla y el compás como instrumentos. La línea recta y la circunferencia eran, a los ojos de los griegos, las figuras básicas, traducidas físicamente en la regla y el compás, y por lo tanto se consideraron preferibles las construcciones con estos dos instrumentos. También se ha esgrimido la razón de que Platón puso objeciones a otros instrumentos mecánicos porque hacían intervenir demasiado el mundo de los sentidos en lugar del mundo de las ideas, que él consideraba como primario. Es muy probable, sin embargo, que en el siglo V la restricción de la regla y el compás no fuera tan rígida, pero como veremos, las construcciones jugaron un papel vital en la geometría griega, y los axiomas de Euclides las limitaron a las que se pueden hacer con regla y compás; por lo tanto, desde ese momento en adelante tal restricción puede haberse tomado con mas seriedad. Pappus, por ejemplo, dice que si una construcción puede hacerse con regla y compás, cualquier otra solución utilizando medios distintos no es satisfactoria.

El primer intento conocido de resolver uno de los tres famosos problemas se debió al jonio Anaxágoras, quien se supone trato de resolver la cuadratura del circulo mientras se encontraba en prisión; no se sabe nada mas sobre el caso. Otro de los intentos mas famosos fue el de Hipias de Elis, una ciudad del Peloponeso. Hipias fue uno de los sofistas mas importantes, nacido hacia el 460 a.C. y contemporáneo de Sócrates.

Intentando trisecar el ángulo invento Hipias una nueva curva, que desgraciadamente no es construible con regla y compás. Esta curva se llama la cuadratriz o trisectriz, y se genera de la manera siguiente: sea AB un segmento *d* que gira en el sentido de las agujas del reloj alrededor de A a una velocidad constante, hasta ocupar la posición AD. Durante el mismo tiempo BC se mueve hacia abajo manteniéndose paralela a si misma y a una velocidad constante hasta alcanzar la posición AD. Supongamos que AB se encuentra en la posición AD' al mismo tiempo que BC ocupa la posición B'C', y sea E' el punto de intersección de AD' con B'C'. Entonces E' es un punto genérico de la cuadratriz BE'G. El punto limite G es el final de la cuadratriz.

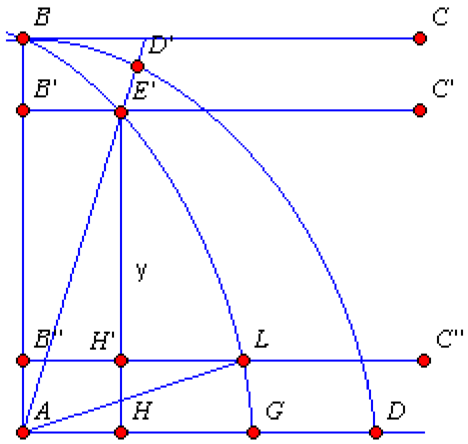


Figura 2.2

La ecuación de la cuadratriz en coordenadas cartesianas rectangulares puede obtenerse de la manera siguiente: supongamos que AD' alcanza AD en alguna fracción t/T del tiempo total T que invierte AB en alcanzar AD. Como AD' y B'C' se mueven con velocidades constantes, B'C' recorre la parte E'H de BA en la misma fracción del tiempo total; por tanto.

$$\frac{\phi}{\pi / 2} = \frac{E'H}{BA}$$

Si representamos E'H por *y* y BA por *a* entonces (1):

$$\frac{\phi}{\pi/2} = \frac{y}{a}$$

O bien:

$$y = a\phi\frac{2}{\pi}$$

Pero si AH=x, entonces:

$$\phi = \text{arctg} \quad \frac{y}{x}$$

Por lo tanto:

$$y = \frac{2a}{\pi}\text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

O bien:

$$y = x\,\text{tg}\frac{\pi y}{2a}$$

La curva, si fuera construible, podría ser utilizada para trisecar cualquier ángulo agudo. En efecto, sea Φ tal ángulo; entonces dividamos *y* en tres partes iguales de manera que E'H'=2H'H. Tracemos B'' por H' y supongamos que corta a la cuadratriz en L. Si trazamos AL, entonces ang. LAD= Φ/3, puesto que por el razonamiento que nos condujo a (1):

$$\frac{ang\ .LAD}{\pi\ /\ 2} = \frac{H\ '\ H}{a}$$

O bien:

$$\frac{ang\ .LAD}{\pi\ /\ 2} = \frac{y\ /\ 3}{a}$$

Pero por (1):

$$\frac{\phi}{\pi\ /\ 2} = \frac{y}{a}$$

Luego:

$$ang\ .LAD\ = \frac{\phi}{3}$$

Otro descubrimiento famoso que se obtuvo del estudio de los problemas de construcciones fue el que hizo Hipócrates de Chios (siglo V a.C.), el mas famoso matemático de este siglo, al que no hay que confundir con su contemporáneo Hipócrates de Cos, padre de la medicina griega. Hipócrates floreció en Atenas durante la segunda mitad del siglo; no se trataba de un sofista, sino mas bien de un pitagórico. Se le atribuye la idea de ordenar los teoremas de manera que los posteriores se puedan demostrar a partir de los anteriores, de una manera familiar para nosotros desde Euclides. También se le atribuye la introducción en matemáticas del método de demostración indirecto. Al parecer escribió un texto de geometría titulado *Elementos* que se ha perdido.

Hipócartes no resolvió el problema de la cuadratura del circulo, evidentemente, pero si resolvió otros relacionados con él. Sea, por ejemplo, ABC un triángulo rectángulo isósceles inscrito en la semicircunferencia de centro O. Sea AEB la semicircunferencia de diametro AB.

Entonces:

$$\frac{AreasemicirculoABC}{AreasemicirculoAEB} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2}{1}$$

Por lo tanto, el área OADB será igual al arrea del semicírculo AEB; si restamos a ambos el área común ADB entonces el área de la lúnula o región sombreada será igual al área del triángulo AOB. Así pues, el área de la lúnula, que es una figura limitada por arcos, es igual al área de una figura rectilínea; dicho con otras palabras, una figura curvilínea ha quedado reducida a otra rectilínea. Este resultado es una cuadratura, es decir, se ha calculado de manera efectiva un área curvilínea porque es igual a un área limitada por líneas rectas, y esta puede ser calculada.

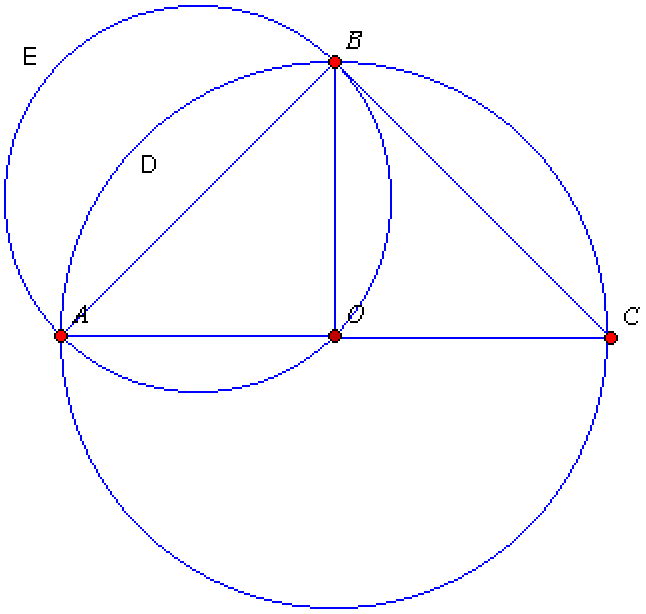


Figura 2.3

En su demostración hace uso Hipócrates del hecho de que dos círculos son entre si como los cuadrados construidos sobre sus diámetros. Es muy dudoso que Hipócrates pudiera dar realmente una demostración de este hecho, puesto que tal demostración depende del método de exhaucion inventado mas tarde por Eudoxo.

Hipócrates consiguió cuadrar otras tres lúnulas, trabajo que se conoce a través de Simplicio, y se trata del único fragmento de la matemática clásica griega que nos ha llegado en su redacción original.

También demostró Hipócrates que el problema de la duplicación del cubo puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble. En nuestra notación algebraica, sean x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Entonces:

$$X^2=ay \text{ y } y^2=2ax$$

Y como $y=x^2/a$, de la segunda ecuación se obtiene $x^3=2\,a^3$, que es la respuesta deseada, y que no puede construirse con regla y compás. Desde luego, Hipócrates debió razonar geométricamente, de una manera que se vera mas calara cuando se hable de las *Secciones Cónicas* de Apolonio.

Otra idea muy importante fue la que se les ocurrió a los sofistas Antifón (siglo V a.C.) y Brissón (c.450 a.C). Al intentar cuadrar el circulo se le ocurrió a Antiphón la idea de aproximarse a dicha figura por medio de polígonos inscritos de numero de lados cada vez mayor. Y Brissón incorporo la idea de utilizar polígonos circunscritos. Antifón, por su parte, vino a sugerir además que el circulo podría ser considerado como un polígono de un numero infinito de lados.

2.1.5.- LA ESCUELA PLATóNICA

La escuela platónica sucedió a los sofistas a la cabeza de la actividad matemática. Sus precursores inmediatos, Teodoro de Cirene, en el norte de Africa (nacido hacia el 470 a.C.) y Arquitas de Tarento, en el sur de Italia (428-347 a.C.) fueron pitagóricos y maestros ambos de Platón, de manera que sus enseñanzas pudieron haber sido las que dieron lugar a la fuerte influencia pitagórico en toda la escuela de Platón.

A Teodoro se le atribuye el haber demostrado que las razones que nosotros representamos por $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ..., $\sqrt{17}$ son todas inconmensurables con la unidad. Arquitas, por su parte, introdujo la idea de considerar una curva como generada por un punto en movimiento, y una superficie generada por una curva en movimiento. Usando esta idea resolvió el problema de la duplicación del cubo hallando dos medias proporcionales entre dos cantidades dadas; estas medias proporcionales se construyen geométricamente hallando la intersección de tres superficies: la que genera una circunferencia girando alrededor de una tangente, un cono y un cilindro (La construcción es bastante complicada por lo que no se entraran en detalles). Arquitas escribió también sobre mecánica matemática, diseño maquinas estudio el sonido y contribuyo a las escalas musicales mediante ciertos inventos y algo de teoría.

La escuela platónica estuvo encabezada, naturalmente por Platón, e incluyo entre sus miembros a Menecmo y su hermano Dimostrato (siglo IV a.C.) y a Teeteto (c.415-c.369 a.C.). A muchos otros miembros se les conoce solo d nombre.

Platón (427-347 a.C.) nació en una familia distinguida, y de joven tubo ambiciones políticas, pero la suerte de Sócrates le convenció de que no había lugar en la política para un hombre de conciencia. Viajo a Egipto y visito a los pitagóricos en el sur de Italia; la influencia pitagórica pudo producirse a través de estos contactos. Hacia el 387 a.C., fundo Platón su Academia en Atenas, la cual se parecía en muchos sentidos a una universidad moderna. La academia disponía de terrenos, edificios, estudiantes, y allí daban cursos formalmente Platón y sus ayudantes. Durante el periodo clásico se vio especialmente favorecido el estudio de la filosofía y d la matemática, y aunque el principal centro matemático se vio se desplazo hacia Alejandría el 300 a.C., la Academia siguió manteniendo su preeminencia en filosofa durante todo el periodo alejandrino. En total duro casi 900 años hasta su cierre por orden del emperador cristiano Justiniano el año 529 d.C., "porque enseñaba conocimientos paganos y perversos".

Platón, que fue uno de los hombres mas sabios de su época, no era matemático, pero su entusiasmo por la materia y la creencia en su importancia para la filosofía y para el entendimiento del universo hizo que animara a los matemáticos a cultivarla. Es notable, y así hay que destacarlo, que casi todas las obras matemáticas importantes del siglo IV se deban a amigos o discípulos de Platón. Platón mismo parece haber estado mas interesado en mejorar y perfeccionar lo que ya se conocía.

Aunque no se puede estar seguro de en que medida los conceptos de la matemática fueron considerados como abstracciones antes de la época de Platón, no cabe duda de que Platón y sus sucesores lo consideraron así. Platón dice que los números y conceptos geométricos no tienen en si nada material y son distintos de los objetos físicos. Así pues, los conceptos de la matemática son independientes de la experiencia y tienen un realidad propia; se los descubre, no se los inventa o crea, y esta distinción entre abstracciones y objetos materiales pudo tener su origen en Sócrates.

Una cita de la *República* de Platón puede servir para ilustrar la concepción contemporánea de los objetos matemáticos. Sócrates se dirige a Glaucón:

Si...
Entonces este es un conocimiento del tipo que estamos buscando, que tiene un doble uso, militar y filosófico; pues el hombre de guerra debe aprender el arte de los números o no sabrá como disponer sus tropas, y el filosofo también, porque tiene que salir del mar del cambio y buscar el verdadero ser, y por lo tanto debe ser un aritmético... Por lo tanto este es un tipo de conocimiento que la legislación puede prescribir adecuadamente, y debemos intentar persuadir a los que estén destinados a ser hombres principales de nuestro Estado para que aprendan aritmética, pero no solo como aficionados, sino que deben proseguir ese estudio hasta ver la naturaleza de los números solo con la mente; y no, una vez mas, como los mercaderes o los tenderos al por menor, con la vista puesta en vender o comprar, sino por su utilidad militar y para el alma misma, debido a que este será el camino mas fácil para ella de pasar del cambio a la verdad y el ser... Entiendo, como estaba diciendo, que la aritmética tiene un gran efecto de elevación , impulsando al alma a razonar sobre el numero abstracto, y rechazando la introducción de objetos visibles o tangibles en el razonamiento...

En otro contexto, se discuten los conceptos de la geometría. Hablando acerca de los matemáticos dice Platón: “Y no sabéis también que aunque hacen uso de las formas visibles y razonan acerca de ellas, no piensan en estas, sino en los ideales a que ellas semejan... Pero están intentando realmente contemplar las cosas mismas, que solo pueden ser vistas con los ojos de la mente”.

Estas citas dejan claro que Platón y otros griegos para los que él habla valoraban las ideas abstractas y preferían las ideas matemáticas como preparación para la filosofía. Las ideas abstractas de las que se ocupa las matemáticas son afines a otras, tales como la bondad y la justicia, cuyo entendimiento es la meta de la filosofía de Platón. Así pues, la matemática es la preparación para el conocimiento del universo ideal.

No se sabe si los platónicos contribuyeron decisivamente a la estructura deductiva de la matemática, aunque si se sabe que se interesaron por la demostración y la metodología del razonamiento. Proclo y Diógenes Laercio (siglo III d. C.) atribuyeron dos tipos de metodología a los platónicos. El primero es el método del análisis, en el que lo que se busca se considera como conocido, y se deducen consecuencias hasta llegar a una verdad conocida o a una contradicción; si se ha llegado a una contradicción entonces la conclusión deseada es falsa, mientras que si se ha llegado a una verdad conocida y si las etapas son reversibles se tiene una demostración. El segundo es el método de *reductio ad absurdum* o de demostración indirecta. El primer método probablemente no fue inventado por Platón, sino que quizás él subrayo su necesidad para la síntesis subsecuente, mientras que el método indirecto se le atribuye también a Hipócrates, como ya se ha indicado.

Platón fue el primero en sintetizar las reglas de la demostración rigurosa, y se supone que sus seguidores ordenaron los teoremas en un orden lógico. Se sabe también que en la Academia de Platón se planteo la cuestión de si un problema dado podría ser resuelto o no, sobre la base de las verdades conocidas y de las hipótesis dadas en el mismo. Hayan sido las matemáticas organizadas deductivamente a partir de axiomas explícitos por los platónicos o no, de lo que no hay duda es de que una demostración deductiva a partir de algunos principios aceptados se considero necesaria al menos de la época de Platón en adelante. Al insistir en esta forma de demostración los griegos rechazaban expresamente todas las reglas, procedimientos y hechos que habían sido aceptados en el “corpus ” de la matemática durante miles de años antes del periodo griego.

2.1.6.- LA ESCUELA DE EUDOXO

El más grande de todos los matemáticos griegos de la época clásica, superado solo seguramente por Arquímedes en la antigüedad, fue Eudoxo, al que Eratóstenes llamo “divino ”. Nació en Cnido , en Asia Menor, hacia el 408 a. C., estudio con Arquitas en Tarento, viajo a

Egipto, donde aprendió astronomía, y después fundo una escuela en Cyzico en el norte de Asia Menor. Hacia el 368 a.C. se unió a la escuela de Platón junto con sus discípulos, para regresar algunos años mas tarde a Cnido, donde murrio hacia el 355 a.C. Habiendo sido astrónomo, medico, geómetra, legislador y geógrafo, probablemente sea mas conocido como creador de la primera teoría astronómica de los movimientos celestes.

Su primera contribución importante a la matemática fue una nueva teoría de las proporciones. El descubrimiento de un numero cada vez mayor de irracionales (o razones inconmensurables) hizo necesario para los griegos hacer frente a estos números; pero ¿ eran realmente números ? Aparecían en razonamientos geométricos mientras que los números enteros y las razones entre números enteros aparecían tanto en geometría como en el estudio general de la cantidad. Pero ¿ como se podrían extender las demostraciones geométricas que se habían hecho para longitudes, áreas y volúmenes conmensurables a los inconmensurables ?.

Eudoxo introdujo la idea de magnitud continua. No se trataba de un numero, sino de entidades tales como segmentos rectilíneos, ángulos, áreas, volúmenes, tiempo, etc., que podían variar, como si dijéramos de una manera continua. Las magnitudes se oponían en esto a los números, que saltaban de un valor a otro, como del cuatro al cinco, mientras que a las magnitudes no se las asignaba ningún valor cuantitativo. Eudoxo definía entonces una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables. Sin embargo, una vez mas, no se utilizaba numero alguno para expresar tales razones. Los conceptos de razón y proporción estaban ligados así a la geometría.

Lo que consiguió así Eudoxo fue evitar los números irracionales en tanto que números, es decir, evito darles valores numéricos a las longitudes de segmentos, tamaños de ángulos y otras magnitudes, así como a las razones de magnitudes. Mientras la teoría de Eudoxo permitió a los matemáticos griegos hacer grandes progresos en geometría, sumistrándoles los fundamentos lógicos necesarios para las razones inconmensurables. También tubo varias consecuencias desafortunadas.

Por mencionar una, forzó una nítida separación entre numero y geometría, dado que únicamente la geometría podía manejar las razones inconmensurables, pero también hizo de los matemáticos geómetras, y la geometría iba a convertirse en la base de casi toda la matemática rigurosa durante los dos mil años siguientes. Nosotros decimos aun x^2, "*x cuadrado*" y x^3, *"x cubo"* en lugar de, digamos, *x segunda* o *x tercera*, debido a que las magnitudes x^2 y x^3 solo tenían un significado geométrico para los griegos.

La solución de Eudoxo al problema de cómo tratar las magnitudes inconmensurables o los números irracionales invirtió, de hecho, el punto de vista de la matemática griega anterior. Los pitagóricos primitivos habían puesto ciertamente el énfasis en el numero como concepto fundamental, y Arquitas de Tarento, maestro de Eudoxo, afirmaba que solo la aritmética y no la geometría podía dar demostraciones satisfactorias. Sin embargo, al volver a la geometría para manejar los números irracionales, los griegos abandonaron el álgebra y los números irracionales como tales. Pero ¿ que es lo que hicieron para resolver ecuaciones cuadráticas, donde las soluciones son frecuentemente números irracionales ? y ¿ de que manera trataron el sencillo problema de hallar el área de un rectángulo de lados inconmensurables ? La respuesta a ambas preguntas es la de que transformaron la mayor parte del álgebra en geometría en un proceso que se analizara mas tarde. La representación geométrica de los irracionales y de las operaciones con ellos no era practica, evidentemente. Puede resultar lógicamente satisfactorio pensar en $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ como el área de un rectángulo, pero si se necesita saber el producto para comprar moqueta, por ejemplo, no dará resultado.

Aunque los griegos dedicaron sus mayores esfuerzos en matemáticas a la geometría, no hay que olvidar que los números enteros y las razones entre ellos siguieron siendo conceptos perfectamente aceptables. Este campo de la matemática, aparece organizado deductivamente en los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* de Euclides; el material en cuestión cubres esencialmente lo que llamamos teoría de números o estudio de las propiedades de los enteros.

La siguiente pregunta se plantea de manera natural: ¿ Que hicieron los griegos con la necesidad de los números en la investigación científica, así como en el comercio y en otros asuntos prácticos ? Por un lado, la ciencia griega clásica fue cualitativa. En cuanto a los usos prácticos de los números, ya se ha dicho que los intelectuales de la época se limitaron a las actividades filosóficas y científicas y no se ocuparon del comercio ni de los oficios; el hombre cultivado no se interesaba por los problemas prácticos. Pero uno puede pensar en todos los rectángulos de la geometría sin referirse para nada a las dimensiones concretas de ninguno de ellos. El pensamiento mate4matico se vio así separado de las necesidades practicas, y los matemáticos no encontraron motivación para mejorar las técnicas aritméticas y algebraicas. Cuando las barreras entre las clases cultivadas y los esclavos se hicieron menos estrictas en el periodo alejandrino (300 a.C. al 600 d. C aproximadamente) y los hombres cultos se interesaron por los asuntos prácticos, el énfasis se desplazo al conocimiento cuantitativo y al desarrollo de la aritmética y el álgebra.

Volviendo a las contribuciones de Eudoxo, también se debe a él el poderoso método griego para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas que nosotros llamamos método de exhaucion (en el cual se profundizara mas tarde). Se trata realmente de la primera etapa en la historia del calculo infinitesimal, pero no utiliza una teoría de limites explícita. Con su ayuda demostró Eudoxo, por ejemplo, que las áreas de dos círculos son entre si como los cuadrados de sus radios, que los volúmenes de dos esferas son entre si como los cubos de sus radios, que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma con la misma base y altura, y que el volumen de un cono es un tercio del cilindro correspondiente.

Siempre puede encontrarse un motivo u otro para atribuir a cualquier escuela, desde Tales en adelante, el haber introducido la organización deductiva de la matemática, pero es incuestionable, sin embargo, que la obra de Eudoxo estableció la organización deductiva *sobre la base de unos axiomas explícitos*. La razón parra ello fue sin duda la necesidad de entender y operar con razones inconmensurables. Dado que Eudoxo abordo la tarea de construir la base lógica precisa para estas razones, es lo mas verosímil que viera la necesidad de formular axiomas y deducir consecuencias una por una de manera que no se cometieran errores con estas magnitudes extrañas y conflictivas. Esta necesidad de manejar razones inconmensurables vino también a reforzar, sin duda, la decisión anterior de apoyarse exclusivamente en el razonamiento deductivo de las demostraciones.

Como los griegos buscaban verdades y habían decidido utilizar las demostraciones deductivas, tenían que basarse en axiomas que fueran ellos mismos verdaderos, y encontraron en efecto afirmaciones cuya veracidad era evidente para ellos, aunque las justificaciones dadas para aceptar los axiomas como verdades indiscutibles fueran diversas. Casi todos los griegos creían que la mente era capaz de reconocer estas verdades y Platón, en particular, aplico su teoría de la *anamnesis*, según la cual hemos tenido ya una experiencia directa de las verdades en un periodo de existencia como almas en otro mundo antes de venir a la tierra, y no tenemos mas que recordar esta experiencia para saber que estas verdades influyen a los axiomas de la geometría; no es necesaria ninguna experiencia en la tierra. Algunos historiadores pretenden ver en las teorías de Platón y Proclo la idea de que puede haber alguna arbitrariedad en los axiomas, con tal solamente de que sean claros y verdaderos en la mente del matemático individual. Lo importante es razonar deductivamente sobre la base los axiomas elegidos. Aristóteles tenia mucho que decir sobre los axiomas.

2.1.7.- ARISTOTELES Y SU ESCUELA

Aristóteles (383-322 a.C.) nació en Estagira, ciudad de Macedonia. Durante 20 años fue discípulo de Platón y durante otros 3 años, del 343 al 340 a.C., fue tutor de Alejandro Magno. El año 335 a.C. fundo su propia escuela, el Liceo, con un jardín, un aula y un altar a las Musas.

Aristóteles escribió sobre mecánica, física, matemática, lógica, meteorología, botánica, psicología, zoología, ética, literatura, metafísica, economía y muchos otros temas. No hay ningún libro dedicado exclusivamente a la matemática, pero en diversos lugares aparecen discusiones sobre la materia, que utiliza como ejemplos en muchos contextos.

Aristóteles consideraba a las ciencias clasificadas en tres tipos: teóricas, productivas y practicas. Las teóricas, que son las que buscan la verdad, son la matemática, la física (óptica, armonía y astronomía), y la metafísica; de ellas la mas exacta es la matemática. Las ciencias productivas son en realidad las artes, y las practicas, como por ejemplo la ética y la política, y tratan de regular las acciones humanas. En las ciencias teóricas la lógica es previa a los diversos temas de incluidos en ellas, y el metafísico discute y explica lo que el matemático y el filosofo natural (o científico) toma como dado, por ejemplo el ser o realidad de la materia y el tipo de los axiomas.

Aunque Aristóteles no contribuyo con resultados matemáticos nuevos de importancia (algunos teoremas de Euclides se le atribuyen, sin embargo), sus teorías sobre la naturaleza de la matemática y sus relaciones con el mundo físico ejercieron una gran influencia. Mientras Platón creía que había un mundo independiente y eterno de las ideas, que constituía la realidad del universo y del que formaban parte los conceptos matemáticos, Aristóteles atribuía este papel a la materia o sustancia concreta. Sin embargo, también llego a poner énfasis en las ideas, es decir en las esencias universales de los objetos físicos, tales como dureza, blandura, gravedad, ligereza, esfericidad, frialdad y calor. Los números y las formas geométricas eran también propiedades de los objetos reales; se reconocían por abstracción pero pertenecían en realidad a los objetos mismos. Así, la matemática trabaja con conceptos abstractos que se derivan de propiedades de los cuerpos físicos.

Aristóteles discute también el concepto de definición. Su idea de definición es la moderna y la denomina un nombre para una colección de palabras señalando también que una definición correcta es debe estar expresada en términos de algo previo a la cosa definida. Así, por ejemplo, critica la definición “un punto es aquello que no tiene partes”, porque las palabras “aquello que” no dicen a que se refieren, excepto posiblemente a “punto”, y por lo tanto la definición no seria correcta. Reconoce, evidentemente, la necesidad de términos indefinidos, puesto que debe haber un punto de partida para la serie de definiciones, pero los matemáticos posteriores olvidaron esta necesidad hasta finales del siglo XIX.

Advierte también (como había dicho anteriormente Platón, según Plutarco) que una definición nos dice lo que es una cosa, pero no que la cosa misma exista. La existencia de las cosas definidas tiene que demostrarse excepto en el caso de unas pocas cosas primarias tales como el punto y la recta, cuya existencia se supone en los primeros principios o axiomas. Se puede definir un cuadrado pero tal figura puede no existir, es decir, las propiedades exigidas en la definición pueden ser incompatibles. Leibniz puso el ejemplo de un poliedro regular de 10 caras; uno puede definir naturalmente tal figura, pero no existe. Si no se comprueba que esta figura existe, y se procede a demostrar teoremas acerca de ella, los resultados no tendrán sentido. El método de demostrar la existencia que adoptaron Aristóteles y Euclides fue el de la construcción. Los tres primeros axiomas de los *Elementos* de Euclides garantizan la construcción de rectas y circunferencias; todos los conceptos matemáticos restantes han de ser construidos para establecer su existencia. Así, los trisectores de ángulos, aunque sean evidentemente definibles, no son construibles con rectas y circunferencias y por tanto no podían admitirse en la geometría griega.

Aristóteles se ocupa también de los principios básicos de la matemática, distinguiendo entre los axiomas o nociones comunes, que son verdades comunes a todas las ciencias, y los postulados, que son primeros principios aceptables para una ciencia concreta. Entre los axiomas incluye los principios lógicos, tales como la ley de contradicción, la ley del tercio excluso, el axioma de que si se suman o restan cosas iguales de otras iguales los resultados son iguales, y otros principios análogos. Los postulados no necesitan ser auto-evidentes sino que su verdad debe venir garantizada por las consecuencias que se derivan de ellos. La colección de axiomas y postulados ha de ser lo mas reducida posible, con tal de que permitan demostrar todos los resultados. Aunque, como se vera, Euclides utiliza la distinción de Aristóteles entre nociones comunes y postulados, todos los matemáticos hasta principios del XIX pasaron por alto esta distinción y trataron los axiomas y los postulados como igualmente auto-evidentes. Según Aristóteles, los axiomas se obtienen de la observación de los objetos físicos, de los que son generalizaciones aprehendidas de modo inmediato. Tanto él como sus seguidores dieron muchas definiciones y axiomas o mejoraron otros anteriores y algunas de las versiones aristotélicas las incluye directamente Euclides.

Aristóteles discute los problemas fundamentales acerca de las relaciones entre puntos y rectas. Un punto, dice, es indivisible y tiene posición; pero entonces ninguna acumulación de puntos, por muchos que incluyera, podría darnos algo divisible, mientras que una recta es desde luego una magnitud divisible. Por lo tanto los puntos no pueden construir nada continuo como una recta, pues un punto no puede ser continuo con otro punto. Un punto, añade, es como el ahora en el tiempo; el ahora es indivisible y no una parte del tiempo. Un punto puede ser un comienzo, un final o un divisor en un segmento pero no es parte de él ni de ninguna magnitud. Solamente por *movimiento* puede un punto generar una recta y ser así origen de la magnitud. También afirma que, puesto que un punto no tiene longitud, si una recta estuviera compuesta de puntos tampoco tendría longitud y, análogamente, si el tiempo estuviera compuesto de instantes no habría ningún intervalo de tiempo. Su definición de continuidad, propiedad que posee una recta, es la siguiente: una cosa es continua cuando los limites en los que se tocan dos partes sucesivas cualesquiera son uno y el mismo y están, como la palabra misma continuo implica, juntos. En realidad hace diversas afirmaciones sobre las magnitudes continuas que no concuerdan unas con otras. El núcleo de su teoría, sin embargo, es que los puntos y los números son cantidades discretas y hay que distinguirlas de las magnitudes continuas de la geometría; no hay continuo en la aritmética. En cuanto a la relación entre estos dos campos, considera a la aritmética (es decir, a la teoría de los números) como mas exacta, porque los números se prestan mas fácilmente a la abstracción que los conceptos geométricos. También considera a la aritmética como previa a la geometría, porque el numero 3 es necesario para considerar un triángulo.

Al discutir el infinito hace Aristóteles una distinción, importante aun hoy, entre el infinito potencial y el infinito actual. La edad de la tierra, si es que tubo un comienzo, es potencialmente infinita pero en ningún instante es actualmente infinita. Según él, solo existe el infinito potencial. Los enteros positivos, concede, son potencialmente infinitos porque siempre podemos añadir 1 a cualquier numero y obtener otro distinto, pero el conjunto infinito, como tal, no existe. La mayor parte de las magnitudes, incluso, no pueden ser ni siquiera potencialmente infinitas, porque si se añadiera de una manera indefinida podrían exceder los limites del universo. El espacio, sin embargo, si es potencialmente infinito en el sentido de que puede ser subdividido indefinidamente, y el tiempo es potencialmente infinito en los dos sentidos.

Uno de los logros mas importantes de Aristóteles fue la fundamentacion de la ciencia de la lógica. Los griegos habían hecho ya el trabajo básico para fundar la lógica al producir razonamientos matemáticos correctos, pero correspondió a Aristóteles codificar y sistematizar las leyes que siguen estos razonamientos en una disciplina separada. Los escritos de Aristóteles dejan muy claro que derivo la lógica de la matemática. Los principios básicos de su lógica –la ley de contradicción, que afirma que una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa, y la ley de tercio excluso, que afirma que una proposición debe ser verdadera o falsa- están en el centro mismo del método de demostración indirecto en matemáticas; por otra parte, Aristóteles utiliza abundantes ejemplos matemáticos tomados de textos contemporáneos para ilustrar sus principios de razonamientos. Esta lógica aristotélica permaneció insuperada hasta el siglo XIX.

Un miembro de la escuela aristotélica especialmente digno de mención es Eudermo de Rodas, que vivió a finales del siglo IV a.C. y fue el autor del "Sumario de Eudermo" citado por Proclo y por Simplicio. Eudermo escribió historias de la aritmética, de la geometría y de la astronomía. Se trata pues del primer historiador de la ciencia que conocemos, pero lo que es mas importante es que los conocimientos ya existentes en su época fueran lo suficientemente amplios como para merecer ser historiados.

El ultimo de los autores del periodo clásico que vamos a mencionar es Autólico de Pitania, astrónomo y geómetra que floreció hacia el 310 a.C. No fue miembro de la escuela de Platón ni de la de Aristóteles, aunque fue maestros de uno de los sucesores de Platón. De tres libros que escribió nos han llegado dos; son los libros griegos mas antiguos de que se conocen completos, aunque solo a través de manuscritos que presumiblemente son copias de copias de las obras de Autólico. Estos libros, *Sobre la esfera en Movimiento* y *Sobre Salidas y Puestas* fueron incluidos mas tarde en una colección llamada *Pequeña Astronomía* (para distinguirla de la posterior *Gran Colección* o *Almagesto* de Ptolomeo). *Sobre la Esfera en Movimiento* trata de los círculos meridianos, de los círculos máximos en general, y de lo que llamaríamos paralelos de latitud, así como de las áreas visible e invisible producidas por una fuente luminosa distante sobre una esfera en rotación, tal como el sol sobre la tierra. El libro presupone teoremas de geometría esférica que debían conocer, por lo tanto, los griegos de la época. El segundo libro de Autólico *Sobre la salida y puesta de Estrellas* corresponde a la astronomía de observación.

La forma del libro sobre la esfera en movimiento es importante; los puntos de las figuras vienen representados por letras y las proposiciones están ordenadas lógicamente. Primero se formula la proposición en general, después se repite, pero con referencia explícita a la figura y finalmente se da la demostración. Este es ya el estilo que usa Euclides.

3.- EUCLIDES Y APOLONIO.

3.1.-INTRODUCCIÓN.

Lo más importante de la obra matemática que realizaron los autores del período clásico ha llegado afortunadamente hasta nosotros, en los escritos de Euclides y Apolonio. Cronológicamente, ambos pertenecen al segundo gran periodo de la historia griega, el helenístico o alejandrino. Sabemos con certeza , gracias a un párrafo del *Comentario* de Proclo, que Euclides vivió y enseño en Alejandría en torno al año 300 a. C., aunque probablemente se educara en la Academia de Platón; y esto es todo cuanto conocemos de su vida. Apolonio murió en el año 190 a. C., de modo que toda su vida cae claramente dentro del período helenístico. Es habitual, sin embargo, situar su obra en el período clásico, ya que sus libros dan cuenta de lo producido en tal época. De hecho, Euclides estructuro los descubrimientos dispares de los griegos clásicos, como puede comprobarse comparando el contenido de sus libros con los fragmentos que nos han llegado de trabajos más antiguos; constituyen así los *Elementos* tanto una historia matemática de la época precedente como el desarrollo lógico de una teoría. La obra de Apolonio se sitúa generalmente en el período alejandrino que le corresponde, pero el espíritu y el contenido de su principal trabajo, las *Secciones Cónicas,* son del período clásico. El mismo Apolonio dijo que los cuatro primeros libros de los ocho que lo forman constituyen una revisión de los trabajos perdidos de Euclides sobre el mismo tema. Pappus menciona que Apolonio pasó largo tiempo con los discípulos de Euclides en Alejandría, lo que explica su familiaridad con la obra de este último.

La discusión que haremos más adelante sobre las características del período alejandrino justificara, a nuestro parecer, la inclusión de Apolonio en el período clásico.

3.2.- EUCLIDES.

3.2.1.- LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES.

3.2.1.1.- EL MARCO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

Los *Elementos* son sin duda la obra más famosa de Euclides. Pese al escaso conocimiento que poseemos del período clásico, cabe señalar las principales fuentes del material contenido en ellos: aparte de los discípulos de Platón con quienes estudió Euclides, y a quienes debe mucho, sin duda, Proclo afirma que introdujo en sus *Elementos* muchos de los teoremas de Eudoxo, perfeccionó teoremas de Teeteto y proporcionó demostraciones irrefutables de muchos resultados insuficientemente demostrados por sus predecesores.

A Euclides se debe la elección del sistema de axiomas, la ordenación de los teoremas y la tersura y rigor de las demostraciones, muchas de ellas suyas, sin duda. Su forma de presentar éstas, sin embargo, había sido ya empleada por Autólico y seguramente por otros de sus predecesores. Independientemente de la cuestión de cuánto haya de original en sus *Elementos* y cuánto pudo haber recogido de textos anteriores u otras fuentes, Euclides fue sin duda un gran matemático, como lo prueban sus otros escritos. Proclo señala que los *Elementos* eran muy apreciados en Grecia, e indica como prueba el gran número de comentarios a que habían dado lugar; entre los más importantes cabe citar los de Herón (c. 100 a..C.-c. 100 d. C.), Porfirio (siglo III) y Pappus (finales del mismo siglo). Presumiblemente su calidad les permitió reemplazar a los libros que sobre el mismo asunto se cree que escribieron Hipócrates de Chíos y los platónicos León y Teudio.

No contamos con manuscritos del propio Euclides, y sus escritos han tenido que se reconstruidos a partir de las numerosas recensiones, comentarios y notas de otros autores. Todas las ediciones en lengua inglesa y latín de los *Elementos* se han realizado a partir de manuscritos griegos; la recesión de Teón de Alejandría (fines del siglo IV), copias de ésta, versiones escritas de las lecciones de Teón, y un manuscrito griego del siglo X que Frangois Peyrard (1760-1822) halló en la Biblioteca Vaticana, y que es una copia de una edición de Euclides anterior a la de Teón. Los historiadores J. L. Hiberg y Thomas L. Heath han utilizado principalmente este manuscrito en su estudio sobre Euclides, comparándolo, claro está, con los restantes manuscritos y comentarios disponibles. También existen versiones y comentarios árabes, basados al parecer en manuscritos por Euclides; pero estas versiones árabes son en cualquier caso inferiores a los manuscritos griegos. Al apoyarse en tantas fuentes, la reconstrucción de los *Elementos* deja margen para la duda sobre algunas cuestiones. En particular, no sabemos con qué propósito fueron escritos; hay quienes los consideran un tratado para matemáticos formados, y quienes piensa que se trata de un texto para estudiantes. Proclo parece inclinarse por esta última opción.

3.2.1.2.- LAS DEFINICIONES Y AXIOMAS DE LOS *ELEMENTOS.*

Los *Elementos* constan de trece libros. En algunas ediciones se han incluido otros dos, debido probablemente a otros autores. El libro I comienza con la definiciones de los conceptos que se utilizarán en la primera parte de la obra. Copiaremos aquí sólo las más importantes, numerándolas de acuerdo con la edición de Heath:

•Definiciones:

1.Un punto es lo que no tiene partes
2.Una línea es una longitud sin anchura.
La palabra línea significa curva.
3.Los extremos de una línea son puntos.
Esta definición establece que una línea o curva siempre tiene longitud finita; en los *Elementos* no aparecen curvas que se extiendan hasta el infinito.
4.Una línea recta es aquella que yace por igual sobre sus puntos.
De acuerdo con la definición 3, la línea recta de Euclides es nuestro segmento. Se cree que esta definición pudo ser sugerida por el nivel que se usa en albañilería.
5.Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7.Una superficie plana es la que yace por igual sobre sus líneas rectas.
15.Un círculo es una figura plana rodeada por una línea tal que todas las rectas que inciden sobre ella desde cierto punto interior a la figura son iguales entre sí.
16.Ese punto se llama centro del círculo.
17.Un diámetro del círculo es cualquier recta que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia (no definida explícitamente) del círculo. Tal recta divide en dos partes iguales al círculo.
23. Rectas paralelas son aquellas que, estando en el mismo plano, no se encuentran cuando se prolonga indefinidamente en ambas direcciones.

Estas definiciones liminares vienen cargadas de conceptos no definidos y no convienen por tanto a ningún propósito lógico. Puede que Euclides no se apercibiera de que los conceptos iniciales deben quedar sin definición, lo que le habría llevado a explicar ingenuamente su significado en términos de conceptos físicos. Algunos comentaristas afirman que, aun siendo consciente de que las definiciones no eran lógicamente útiles, quiso explicar lo que sus términos representaban intuitivamente, de manera que sus lectores quedaran convencidos de que los axiomas y postulados eran aplicables a esos conceptos.

A continuación presenta cinco postulados y cinco nociones comunes (a las que Proclo llama axiomas). Asume la distinción ya indicada por Aristóteles de que las nociones comunes son verdades aplicables a cualquier ciencia, mientras que los postulados se aplican solamente a la geometría. Como ya se vio en su momento, Aristóteles decía que no se precisa la certeza de que los postulados sean verdaderos, y que su veracidad se contrastaría al confrontar con la realidad los resultados de ellos deducidos. Proclo incluso habla del carácter hipotético de toda matemática, que solo deduce lo que se sigue de las suposiciones iniciales, sean estas verdaderas o no. Cabe pensar que Euclides compartiera el punto de vista de Aristóteles con respecto a la veracidad de los postulados. No obstante, en el desarrollo ulterior de las matemáticas, al menos hasta el advenimiento de las geometrías no euclideas, tanto los postulados como las nociones comunes fueron aceptados como verdades incuestionables.

Euclides postula lo siguiente:

Postulados

1.- (Es posible) trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.

2.- (Es posible) prolongar continuamente en línea recta una recta dada.

3.- (Es posible) trazar un circulo con cualquier centro y distancia (radio).

4.- Que todos los ángulos rectos son iguales.

5.- Que si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontraran por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

Nociones Comunes

1.- Cosas que sean iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.

2.- Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales.

3.- Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales.

4.- Cosas que encajen cada una en la otra son iguales entre si.

5.- El todo es mayor que la parte.

Euclides no supone ingenuamente que los conceptos definidos existan o sean consistentes; como había señalado Aristóteles, se puede definir algo cuyas propiedades sean incompatibles. Los tres primeros postulados son los que declaran la posibilidad de construir rectas y círculos, son asertos de existencia para esas entidades. A lo largo del libro I, Euclides prueba, construyéndolas, la existencia de las restantes, exceptuando el plano.

Presupone que la recta del postulado 1 es única; esta suposición esta implícita en la proposición 4 del libro I, aunque habría sido mejor explicitarla. Del mismo modo, supone que la prolongación del postulado 2 es única, explícitamente en la proposición 1 del libro XI, e inconscientemente desde el mismo comienzo del libro I.

El postulado V se debe al propio Euclides; es una muestra de su genio haber reconocido su necesidad. Muchos griegos objetaron este postulado, considerándolo falto de evidencia, en comparación con los anteriores. Los intentos de probarlo a partir de los restantes axiomas y postulados, que comenzaron según Proclo en vida misma de Euclides, fracasaron.

En cuanto a las nociones comunes, hay diferentes opiniones sobre cuales aparecían realmente en el escrito original de Euclides. La cuarta, que constituye la base de las pruebas mediante superposición (congruencia) es de carácter geométrico, y debería ser un postulado. Euclides la utiliza en las proposiciones 4 y 8 del libro I, aunque diríase que de mala gana.

3.2.1.3.- LOS LIBROS I AL IV DE LOS *ELEMENTOS*.

Los libros I a IV tratan sobre las propiedades básicas de figuras rectilíneas y círculos. El libro I contiene los acostumbrados teoremas sobre congruencia, paralelismo, el teorema de Pitágoras, figuras equivalentes (de igual área) y paralelogramos. Todas las figuras son rectilíneas, esto es , formadas por segmentos de recta. De especial interés son los siguientes teoremas:

- *Proposición 1*. Construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento dado.

La demostración es simple. Se construye un circulo tomando A como centro y AB como radio (figura 3.1), y otro con B como centro y BA como radio. Sea C el punto de intersección. Entonces ABC es el triángulo buscado.

- *Proposición 2*. Situar en un punto dado (como extremo) una línea recta igual a otra dada.

Podría pensarse que el postulado 3 permite hacerlo inmediatamente. Pero eso significaría que el compás mantiene su abertura cuando se mantiene y se lleva al punto que se quiere tomar como extremo. Euclides, en cambio, supone un compás que solo mantiene su rigidez al trazar un circulo determinado, sin levantarlo del papel, y presenta una demostración mas complicada.

- *Proposición 4*. Si dos triángulos tienen cada uno de ellos dos lados y el ángulo que comprenden iguales a los del otro, entonces son congruentes.

La prueba se hace llevando un triángulo sobre el otro, y mostrando que deben coincidir.

- *Proposición 5*. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

La demostración es mejor que la que puede encontrarse en muchos textos elementales, que emplea la bisectriz del ángulo A (figura 3.2), cuya existencia se deduce precisamente de esta demostración. Euclides extiende AB hasta F y AC hasta G, de manera que BF=CG. Entonces triángulo AFC≈ triángulo AGB, y por tanto FC=GB, ang. ACF = ang. ABG y ang.3 = ang.4. De esto se deduce que triángulo CBF≈ triángulo BCG y por tanto ang.5 = ang.6, y ang.1 = ang.2. Pappus prueba el teorema considerando el triángulo dado como ABC y como ACB, lo que le permite utilizar la proposición 4 y deducir que los ángulos de la base son iguales.

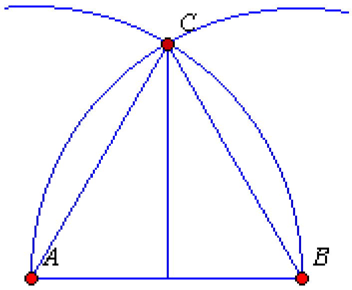


Figura 3.1

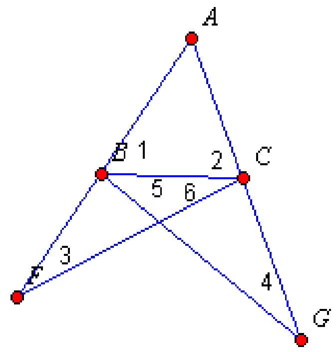


Figura 3.2

• *Proposición 16*. Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los dos ángulos internos opuestos.

La prueba como se muestra en la figura 3.3 requiere una recta indefinidamente prolongable, ya que en ella se extiende AE una longitud igual hasta F, y ha de ser posible hacer esto.

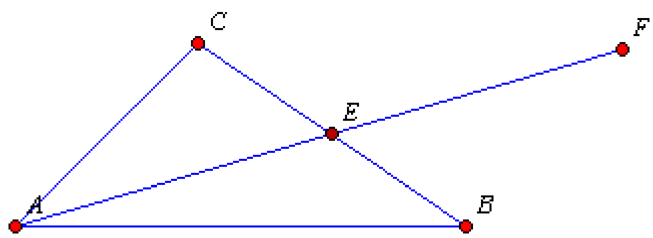


Figura 3.3

• *Proposición 20.* La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado.

Este teorema es lo que más se parece en geometría euclidea al hecho de que la línea recta es la distancia mas corta entre dos puntos.

• *Proposición 27.* Si una recta incide sobre otras dos formando ángulos alternos iguales, esas dos rectas serán paralelas entre si.

La prueba aportada consiste en suponer que las rectas se cortan, de lo que se deriva una contradicción con la proposición sobre el ángulo externo de un triángulo. El teorema establece la existencia de al menos una recta paralela a otra dada, pasando por un punto también dado.

• *Proposición 29.* Una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre si, siendo cada ángulo externo igual al interno opuesto (los ángulos correspondientes son iguales), y la suma de los ángulos internos del mismo lado es igual a dos rectos.

La demostración de la figura 3.4 supone que ang.1≠ ang.2. Si el mayor es ang.2, sumando ang.4 a ambos, ang2+ang.4>ang.1+ang.4, lo que implica que ang.1+ang.4 es menor que dos rectos. Pero el postulado de las paralelas, que es utilizado aquí por primera vez, implicaría que las rectas AB y CD, que por hipótesis son paralelas, se encuentran en algún punto.

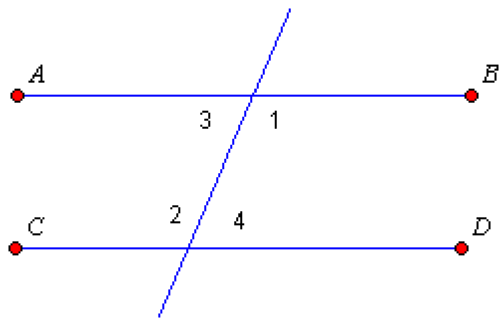


Figura 3.4

• *Proposición 47.* En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a al suma de los cuadrados de los lados que forman.

Aquí se tiene el teorema de Pitágoras. La prueba se lleva a cabo `por medio de áreas, como en muchos textos escolares. Se muestra (figura 3.5) que $\Delta ABD \approx \Delta FBC$, que el rectángulo BL=2 ΔABD, y el rectángulo GB= 2 ΔFBC. En consecuencia, el rectángulo BL es igual al cuadrado GB, y el rectángulo CL es igual al cuadrado AK.

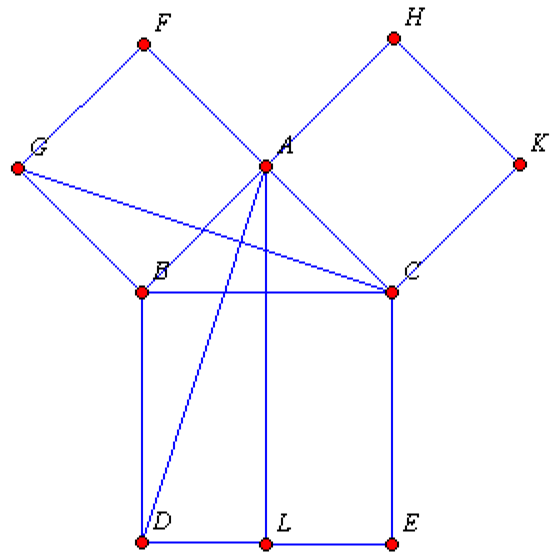


Figura 3.5

El teorema también muestra como obtener un cuadrado cuya área sea igual a la suma de los cuadrados dados, es decir, como hallar un x tal que $x^2=a^2+b^2$, siendo así otro ejemplo de álgebra geométrica.

• *Proposición 48.* Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el ángulo que estos forman es recto.

Esta proposición es la reciproca del teorema de Pitágoras. La demostración de Euclides (figura 3.6) consiste en trazar un segmento AD perpendicular a AC e igual a AB. Por hipótesis:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

y por ser rectángulo el triángulo ADC:

$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

Como AB = AD, tiene que ser $BC^2 = DC^2$, y por tanto BC = DC. De manera que los triángulos DAC y CAB son congruentes, y al ángulo CAB, igual al CAD, debe ser recto.

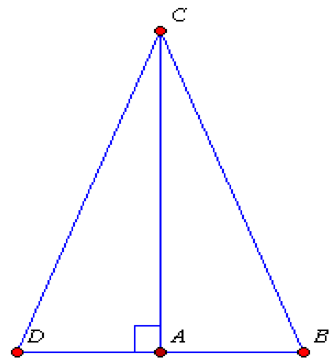


Figura 3.6

El material más notable del libro II es el relativo al álgebra geométrica. Ya se ha visto que los griegos no reconocían la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, ángulos y volúmenes. En el libro II todas las cantidades están representadas geométricamente, evitando así el problema de la asignación de valores numéricos. Los números se ven sustituidos por segmentos de recta; el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se traduce en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en recortar de un segmento la longitud del segundo; la división de un numero por otro se indica por la razón entre los segmentos que los representan, de acuerdo con los principios introducidos posteriormente en los libros V y VI.

La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este ultimo y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado. La construcción utiliza la teoría de aplicación de áreas mencionada en la proposición 44 del libro I. La suma y resta de productos se reemplaza por suma y resta de rectángulos; la extracción de una raíz cuadrada, por la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un rectángulo dado.

Las diez primeras proposiciones del Libro II tratan geométricamente las proposiciones algebraicas siguientes, enunciadas con nuestro sistema notacional:

1. $a(b+c+d+...)=ab+ac+ad+....$
2. $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$
3. $(a+b)a=ab+a^2$
4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
5. $ab+(1/2(a+b)-b)^2=(1/2(a+b))^2$

6. $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$

La primera de ellas esta contenida en la:

- *Proposición 1.* Si tenemos dos rectas y se divide una de ellas en un numero cualquiera de partes (figura 3.7), el rectángulo que las tiene como lados equivale a los rectángulos que tienen como lados la recta no dividida y cada una de las partes de la otra.
- *Proposición 2 y 3.* Estas son en realidad casos particulares de la proposición 1, que Euclides trata separadamente.
- *Proposición 4.* Si se divide mediante un punto cualquiera una recta dada, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de las partes mas el doble del rectángulo que tiene a esas partes como lados (figura 3.8).

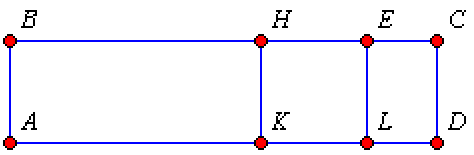


Figura 3.7

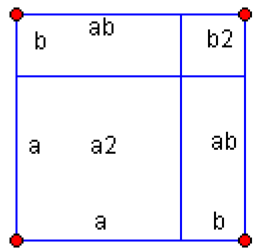


Figura 3.8

- *Proposición 11.* Dividir una recta en dos partes de manera que el rectángulo que tiene como lados el total y una de las partes sea igual al cuadrado de la otra parte.

Se trata de hallar un punto H sobre el segmento AB (figura 3.9) tal que AB·BH=AH·AH. Euclides realiza la siguiente construcción: en el cuadrado ABCD, toma el punto medio E del segmento AC, que une con B, y prolonga el segmento BA hasta un punto F tal que EF=EB; a continuación construye el cuadrado AFGH, y H es el punto buscado que satisface

$$AH \cdot BH = AH \cdot AH$$

La demostración se hace mediante áreas, utilizando teoremas anteriores, incluido el de Pitágoras. La importancia del teorema reside en que la longitud *a* del segmento AB queda dividida en longitudes *x* y *a-x* tales que:

$$(a-x)a=x^2$$

es decir:

$$x^2+ax=a^2$$

disponiendo así de un método geométrico para resolver esta ultima ecuación cuadrática. AB queda dividido también en media y extrema razón, ya que de AB·BH=AH·AH se deduce que AB:AH=AH:BH. Otras proposiciones del libro II equivalen a la resolución de las ecuaciones cuadráticas $ax-x^2=b^2$ y $ax+x^2=b^2$.

- *Proposición 14*. Construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada.

Esta ultima podría ser cualquier polígono; pero si es un rectángulo ABEF (figura 3.10), el método de Euclides equivale a lo siguiente: se prolonga AB hasta C de manera que BC=BE; se construye el circulo que tiene como diámetro AC y se laza en B la. Perpendicular DB. El cuadrado buscado es el que tiene como lado DB. Esta teorema, que Euclides prueba en términos de áreas resuelve la ecuación $x^2=ab$, proporcionando así la raíz cuadrada de *ab*.

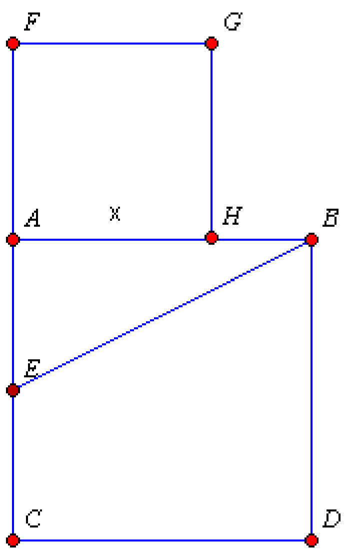


Figura 3.9

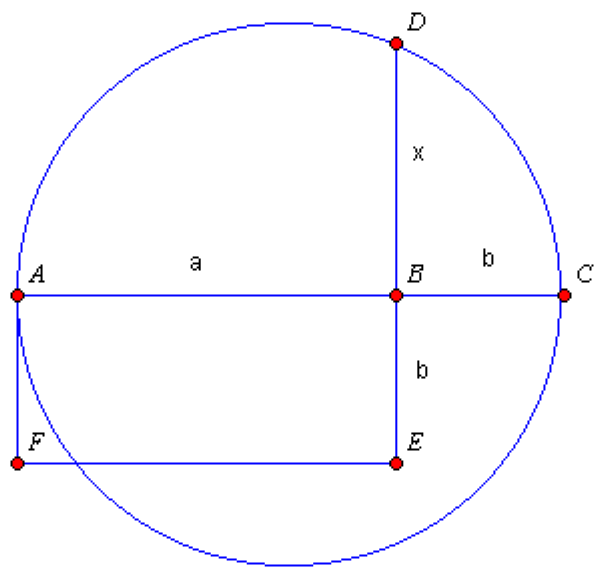


Figura 3.10

El libro III, que contiene 37 proposiciones, comienza con algunas definiciones relativas a la geometría de los círculos, y a continuación estudia las propiedades de cuerdas, tangentes, secantes, ángulos centrales e inscritos, etc.

- *Proposición 16.* La recta perpendicular en el extremo a un diámetro cae fuera del circulo, y no puede interponerse ninguna otra recta entre esa perpendicular y la circunferencia; además el ángulo del semicírculo es mayor, y el restante es menor, que cualquier ángulo rectilíneo agudo

El libro IV trata en sus 16 proposiciones de figuras tales como triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos regulares, inscritos en circunscritos a círculos. La ultima proposición, que muestra como inscribir en un circulo dado un polígono regular de 15 lados, parece haber sido usada en astronomía: hasta tiempos de Eratóstenes se creía que el ángulo de la eclíptica (el que forman el plano ecuatorial de la tierra y el plano de su órbita en torno al sol) era de 24º, esto es, 1/15 de 360º.

3.2.1.4.- EL LIBRO V: LA TEORIA DE PROPORCIONES.

El libro V, basado en los trabajos de Eudoxo, esta considerado como el mayor logro de la geometría euclidea; su contenido y significado se han debatido más extensa e intensamente que cualquier otra porción de los *Elementos.* Se cree que los pitagóricos poseían una teoría de la proporción, esto es, de la igualdad entre dos razones, para magnitudes conmensurables: razones expresables como cociente entre dos números enteros. Aunque no se conocen los detalles de tal teoría, cabe suponer que cubría lo que se vera mas tarde en el libro VII, y que se aplicaba a ciertas proposiciones sobre semejanza de triángulos. Los matemáticos que utilizaron proporciones antes de Eudoxo no poseían, en general, una fuandamentacion rigurosa para el tratamiento de magnitudes inconmensurables. El libro V, aun evitando la introducción de números irracionales, extiende la teoría de las proporciones a razones inconmensurables.

La noción de magnitud que presenta Euclides pretende cubrir cantidades o entidades que pueden ser conmensurables o inconmensurables entre sí: longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, pesos, tiempo... La longitud y el área han aparecido ya, por ejemplo en el libro II. Pero hasta ahora no ha tenido ocasión Euclides de tratar con otros tipos de magnitudes ni tampoco con sus razones mutuas o proporciones, por lo que solo ahora introduce el concepto general de magnitud, poniendo el énfasis en las proporciones para cualquier tipo de magnitudes.

Pese a la importancia que las definiciones tienen en este libro, no hay en él una definición de magnitud como tal.

• *Definición 1.* Una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.

Parte significa aquí submúltiplo, como 2 lo es de 6, mientras que 4 no es submúltiplo de 6.

• *Definición 2.* Lo mayor es múltiplo de lo menor cuando es medido por lo menor. Múltiplo significa por tanto múltiplo entero.

• *Definición 3.* Una razón es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo con respecto a su tamaño.

• *Definición 4.* Se dice que hay razón entre dos magnitudes cuando se puede multiplicar cada una de ellas de manera que exceda a la otra.

Lo que significa que hay razón entre a y b si algún múltiplo entero (incluyendo 1) de a es mayor que b y algún múltiplo entero de b (incluyendo 1) es mayor que a. Esta definición excluye un concepto que apareció mas tarde, el de una cantidad infinitamente pequeña y no nula, a la que se llamo infinitésimo; no cabe razón entre dos magnitudes si una de ellas es tan pequeña que ninguno de sus múltiplos enteros excede a la otra. También excluye magnitudes infinitamente grandes, a las que no superaría ningún múltiplo entero de la cantidad menor. La definición clave es la siguiente:

• *Definición 5.* Se dice que ciertas magnitudes están en la misma razón, la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, cuando al tomar cualquier equimultiplo de la primera y la tercera, y cualquier equimultiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta. La definición establece que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si cuando multiplicamos a y c por cualquier numero entero m, y b y d por cualquier numero entero n, sean cuales fueren tales m y n,

$$ma<nb \quad \text{implica} \quad mc<nd$$
$$ma=nb \quad \text{implica} \quad mc=nd$$

y

$$ma>nb \quad \text{implica} \quad mc>nd$$

Para comprender su alcance, utilicemos números modernos para contrastar si:

$$\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

Deberíamos, al memos en teoría, probar que para cualesquiera números m y n:

$$m\sqrt{2}<nx1 \quad \text{implica} \quad m\sqrt{6}<n\sqrt{3}$$
$$m\sqrt{2}=nx1 \quad \text{implica} \quad m\sqrt{6}=n\sqrt{3}$$
$$m\sqrt{2}>nx1 \quad \text{implica} \quad m\sqrt{6}>n\sqrt{3}$$

En este ejemplo, claro esta, que la igualdad $m\sqrt{2}=n\cdot 1$ no es posible, ya que m y n son números enteros mientras que $\sqrt{2}$ es irracional, pero esto solo significa que la igualdad $m\sqrt{6}=n\sqrt{3}$ no tiene por qué darse; la definición establece únicamente que si laguna de las tres posibilidades de la izquierda es cierta, debe serlo también el correspondiente aserto de la derecha. Una formulación equivalente de la definición 5 seria que los enteros m y n para los que $ma<nb$ son los mismos que los enteros m'y n' para los que $m'c<n'd$.

Seria conveniente indicar inmediatamente que partido saca Euclides de estas definiciones. Cuando se quiere probar que si $a/b=c/d$ entonces $(a+b)/b=(c+d)d$, se consideran las razones y la proporción como números, incluso si las razones son inconmensurables, y se utiliza el álgebra para obtener el resultado; se sabe que las leyes algebraicas permiten operar con irracionales. Pero Euclides no puede hacerlo, y no lo hace; los griegos no poseían justificación suficiente para operar con razones de magnitudes inconmensurables. Así pues, Euclides prueba este teorema usando las definiciones que ha dado, en particular la 5ª. De hecho, esta sentando las bases para un álgebra de magnitudes.

- *Definición 6.* Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.
- *Definición 7.* Si entre los múltiplos de unas magnitudes el de la primera excede al de la segunda pero el de la tercera no excede al de la cuarta, se dice que la razón entre la primera y la segunda es mayor que la razón entre la tercera y la cuarta.

Esta definición establece que si para algunos m y n, $ma>nb$ pero mc no es mayor que nd, entonces $a/b>c/d$. Así, dada una razón entre inconmensurables a/b, se la puede situar entre otras mayores y menores que ella.

- *Definición 8.* Una proporción tiene al menos tres términos. En ese caso $a/b=b/c$.
- *Definición 9.* Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la razón entre la primera y la tercera duplica la razón entre la primera y la segunda.

De modo que si $A/B=B/C$, la razón entre A y C duplica la razón entre A y B, es decir $A/C=A^2/B^2$, ya que $A=B^2/C$ y $A/C=B^2/C^2=A^2/B^2$.

- *Definición 10.* Cuando cuatro magnitudes son continuamente proporcionales, se dice que la razón entre la primera y la cuarta triplica la razón entre la primera y la segunda, y así sucesivamente, sea cual fuere la proporción.

O sea que si $A/B=B/C=C/D$, razón entre A y D triplica la razón entre A y B, es decir $A/D=A^3/B^3$, ya que $A=B^2/C$ y $A/D=B^2/CD=(B^2/C^2)(C/D)= A^3/B^3$.

- *Definiciones 11 a 18.* Estas atañen a magnitudes correspondientes, alternancia, inversión, composición, separación, conversión, etc., refiriéndose a la formación de $(a+b)/b$, $(a-b)/b$ y otras razones a partir de a/b.

El libro V prosigue con la demostración de veinticinco teoremas sobre magnitudes y razones entre magnitudes. Las pruebas son verbales y solo dependen de las definiciones precedentes y de las nociones comunes a axiomas, tales como que al restar cosas iguales de cosas iguales se obtienen cosas iguales; no usa los postulados. Euclides emplea segmentos como ejemplos de magnitudes para ayudar al lector a comprender el significado de los teoremas y sus pruebas, pero aquellos se aplican a toda clase de magnitudes.

Reproduciremos algunas de las proposiciones del libro V en lenguaje algebraico moderno, utilizando las letras m, n y p para los enteros y a, b y c para las magnitudes. No obstante, para hacerse idea del lenguaje de Euclides, veamos su primera proposición:

- *Proposición 1.* Dado cualquier numero de magnitudes, sean cuales fueren, equimúltiplos de otras magnitudes en igual numero, cualesquiera que fueren las veces que una de ellas sea múltiplo de alguna, ese múltiplo será de todas.

Lo que significa, en lenguaje algebraico, que $ma+mb+mc+...=m(a+b+c+...)$.

- *Proposición 4.* Si $a/b=c/d$, entonces $ma/nb=mc/nd$.
- *Proposición 11.* Si $a/b=c/d$ y $c/d=e/f$, entonces $a/b=e/f$.

Se puede observar como la igualdad entre razones depende de la definición de proporción, y Euclides pone buen cuidado en probar que la igualdad es transitiva.

- *Proposición 12.* Si $a/b=c/d=e/f$, entonces $a/b=(a+c+e)/(b+d+f)$.
- *Proposición 17.* Si $a/b=c/d$, entonces $(a-b)/b=(c-d)/d$.
- *Proposición 18.* Si $a/b=c/d$, entonces $(a+b)/b=(c+d)/d$.

Algunas de estas proposiciones parecen duplicar otras del libro II. Recordemos, sin embargo, que las proposiciones de este ultimo se referían únicamente a segmentos de recta, mientras que el libro V proporciona la teoría para toda clase de magnitudes.

El libro V fue crucial para la subsiguiente historia de las matemáticas. Los griegos clásicos no admitían números irracionales e intentaron evitarlos mediante artificios geométricos.

Sin embargo, este uso de la geometría no tenía en cuenta las razones y proporciones de magnitudes inconmensurables de cualquier tipo, y el libro V, que inicio una nueva teoría general de las magnitudes, vino a colmar esa laguna proporcionando una base firme a todo lo que el la geometría griega tuviera que ver con ellas. La cuestión clave, no obstante, es si la teoría de magnitudes servia como fundamento lógico para una teoría de los números reales que incluyera, naturalmente, a los irracionales.

Esta fuera de toda duda como interpretaron a Euclides las sucesivas generaciones de matemáticos, que consideraron su teoría de las magnitudes aplicable solo a la geometría, adoptando así la actitud de que solo la geometría era rigurosa. Cuando se reintrodujeron los números irracionales a partir del Renacimiento, muchos matemáticos objetaron que tales números carecían de cualquier fundamento lógico.

3.2.1.5.- EL LIBRO VI: FIGURAS SEMEJANTES.

El libro VI, que trata de las figuras semejantes y utiliza la teoría de las proporciones del libro V, comienza con algunas definiciones.

- *Definición 1.* Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los correspondientes ángulos iguales, y proporcionales los lados que forman esos ángulos.
- *Definición 3.* Una recta esta dividida en extrema y media razón cuando el total es a la parte mayor como ésta a la menor.
- *Definición 4.* La altura de cualquier figura es la perpendicular trazada desde el vértice a la base. Esta definición es bastante imprecisa, pero Euclides la usa.

En las demostraciones de los teoremas de este libro, tal como Euclides emplea su teoría de las proporciones, no se ve obligado a tratar separadamente los casos conmensurable e inconmensurable; esta separación fue introducida por Legendre, que utilizaba una definición algebraica de proporción limitada a cantidades conmensurables, y tenia así que tratar los casos inconmensurables con otra argumentación como la *reductio ad absurdum*.

Algunos de los teoremas mas importantes de este libro son los siguientes:

- *Proposición 1.* Los triángulos y paralelogramos (es decir, sus áreas) que están bajo la misma altura (que tienen la misma altitud) son entre si como sus bases.

Euclides usa aquí una proporción con cuatro magnitudes, dos de las cuales son áreas.

- *Proposición 4.* En los triángulos equiángulos, los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales, y también lo son los lados correspondientes que forman los ángulos iguales.
- *Proposición 5.* Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales , serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos formados por los correspondientes lados.
- *Proposición 12.* Hallar la cuarta proporcional a tres rectas dadas.

• *Proposición 13.* Hallar la media proporcional a dos rectas dadas.

El método empleado es el corriente (figura 3.11). Desde un punto de vista algebraico significa que, dados *a* y *b*, se puede hallar $\sqrt{ab}$.

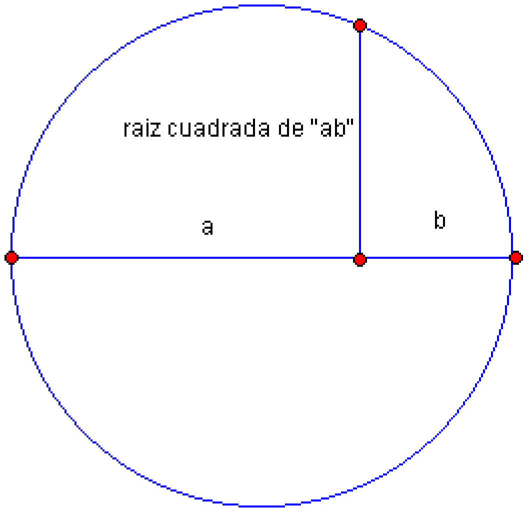


Figura 3.11

• *Proposición 19.* (Las áreas de) los triángulos semejantes son entre si como la razón duplicada entre sus correspondientes lados.

Actualmente se expresa este teorema diciendo que la razón entre las áreas de triángulos semejantes es el cuadrado de la razón entre los correspondientes lados.

• *Proposición 27.* De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta (construidas sobre parte de esa recta) y deficientes (del construido sobre la recta entera) en paralelogramos semejantes al (paralelogramo lado) construido sobre la mitad de esa recta y similarmente dispuestos, el (de) mayor (área) es el que se aplica sobre la mitad de la recta y es semejante a su defecto.

El significado de esta proposición es el siguiente: Partiendo de un paralelogramo dado AD construido sobre AC, que es la mitad de un segmento dado AB, consideremos paralelogramos AF sobre AK (figura 3.12), tales que su defecto, el paralelogramo FB, sea semejante a AD. El teorema de Euclides establece que de todos ellos el que tiene mayor área es el construido sobre AC.

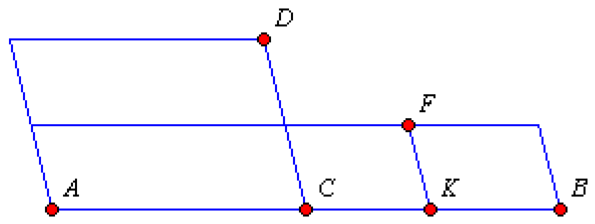


Figura 3.12

Esta proposición tiene un significado algebraico de gran importancia: supongamos que el paralelogramo dado AD sea un rectángulo (como el de la figura 3.13) y que la razón entre sus

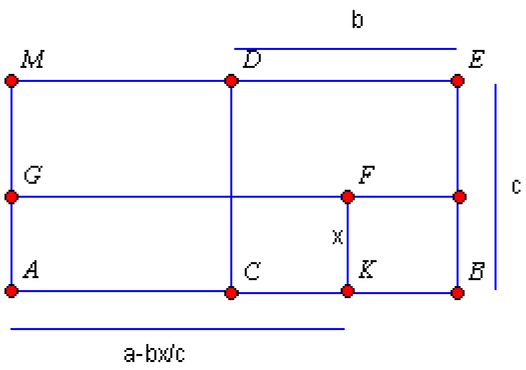


Figura 3.13

lados es *c/b*, siendo *b* la longitud de AC; consideremos cualquier otro rectángulo AF que cumpla la condición de que su defecto, el rectángulo FB, es semejante a AD. Si denotamos por *x* la longitud de FK, la de KB es *bx/c*, y si *a* es la longitud de AB, la de AK es *a-(bx/c)*, luego el área S de AF es:

$$S = x\left(a - \frac{bx}{c}\right)$$

Ecuación 1.

La proposición 27 afirma que el máximo valor de S se alcanza cuando AF es AD. Como la longitud de AC es *a*/2 y la de CD es *ac/2b*, se tiene:

$$S \leq \frac{a^2 c}{4b}$$

Por otro lado, para que la ecuación (1), considerada como ecuación uadrática en *x*, tenga alguna raíz real, su discriminante debe ser mayor o igual que 0, esto es:

$$a^2 - 4\frac{b}{c}S \geq 0$$

O bien:

$$S \leq \frac{a^2 c}{4b}$$

Así pues, la proporción no solo nos dice cual es al mayor valor posible de S, sino que para cada posible valor existe un *x* que satisface (1), y proporciona geométricamente un lado, KF, del rectángulo AF, cuya longitud es *x*. Este resultado se aplicara en la proposición siguiente.

- *Proposición 28.* Aplicar a una recta dada (con parte de ella como lado) un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada (S) y deficiente (del paralelogramo sobre la recta entera) en un paralelogramo semejante a uno dado (D). Así (por la proposición 27), la figura rectilínea dada (S) no debe ser mayor que el paralelogramo construido sobre la mitad de la recta y semejante a su defecto.

Este teorema equivale geométricamente a la resolución de la ecuación cuadrática $ax-(b/c)x^2=S$, donde el área S de la figura rectilínea dada esta en sometida, para que exista alguna solución real, a la condición $S \leq (a^2c)/(4b)$. Para comprobarlo, supongamos (porque nos conviene) que los paralelogramos son rectángulos (como los de la figura 3.14) y sean S la figura rectilínea dada, D el otro rectángulo dado, con lados *c* y *b*, *a* la longitud de AB, y *x* la altura del rectángulo buscado.

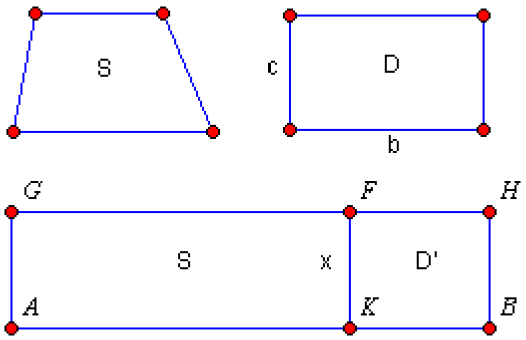


Figura 3.14

Euclides construye un rectángulo AKFG de área igual a la de S tal que su defecto D' es semejante a D. Pero AKFG=ABHG-D', y como D' es semejante a D su área es bx^2/c, de manera que:

$$S = ax - \frac{b}{c}x^2$$

Ecuación 2.

y la construcción de AKFG equivale a encontrar AK y x tales que x satisface la ecuación (2).

- *Proposición 29*. Aplicar a una recta dada un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada (S) y excedente en un paralelogramo semejante a uno dado (D).

En términos algebraicos, este teorema resuelve:

$$ax + \frac{b}{c}x^2 = S$$

Dados *a, b, c* y *S*, que ahora no esta acotado porque para cualquier S positivo la ecuación tiene solución real. En lenguaje actual, Euclides muestra en las proposiciones 28 y 29 como resolver cualquier ecuación cuadrática en la que una o las dos raíces son positivas. Su construcción proporciona las raíces como longitudes.

Los paralelogramos construidos en las proposiciones 28 y 29 tienen un lado menor o mayor, respectivamente, que el segmento dado AB, recibiendo en griego los nombres de *Elleipsis* e *Hypérbole*. El paralelogramo de área determinada construido sobre el segmento completo como base en la proposición 44 del libro I fue llamado *Parábole*.

• *Proposición 31.* En los triángulos rectángulos, la figura construida sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a las semejantes y similarmente dispuestas sobre los lados que forman el ángulo recto.

Se trata de una generalización del teorema de Pitágoras.

3.2.1.6.- LOS LIBROS VII, VIII Y IX: LA TEORIA DE LOS NUMEROS.

Los libros VII, VIII y IX tratan de la teoría de los números, esto es, de las propiedades de los números enteros y de las razones entre números enteros. Son los tres únicos libros de los *Elementos* que tratan de aritmética como tal. En ellos Euclides representa los números como segmentos de recta y el producto de dos números como un rectángulo, pero sus argumentaciones no dependen de la geometría. Los asertos y pruebas son verbales, frente a la forma simbólica actual.

Muchas de las definiciones y teoremas, en particular los referidos a proporciones, repiten lo expuesto en el libro V, lo que ha llevado a los historiadores a preguntarse por qué Euclides vuelve a probar de nuevo proposiciones sobre números en lugar de aprovechar las ya probadas en el libro V.

En estos tres libros, como en otros, Euclides da por supuestos hechos que no enuncia explícitamente; por ejemplo, que si A divide (exactamente) a B y B divide a C, entonces A divide a C; que si A divide a B y a C, también divide a B+C y a B-C, etc..

El libro VII comienza con algunas definiciones:

• *Definición 3.* Un número es parte de otro mayor cuando lo mide (cuando lo divide exactamente).

• *Definición 5.* Un número es múltiplo de otro menor cuando es medido por este.

• *Definición 11.* Un número es primo cuando solamente lo mide la unidad.

• *Definición 12.* Números primos entre si son los que tienen como medida común únicamente la unidad.

• *Definición 13.* Un número es compuesto cuando es medido por algún número (distinto de 1).

• *Definición 16.* Cuando se multiplican dos números, el numero así obtenido se llama plano, y sus lados son los números que se han multiplicado.

• *Definición 17.* Cuando se multiplican tres números, el numero así obtenido se llama sólido, y sus lados son los números que se han multiplicado.

• *Definición 20.* Cuatro números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, la misma parte, o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.

• *Definición 22.* Un número es perfecto cuando es igual a (la suma de) sus propias partes.

Las proposiciones 1 y 2 exponen el proceso mediante el que se obtiene la mayor medida (divisor) común de dos números. Euclides lo describe diciendo que si A y B son los números y B<A, debe restarse B de A el número de veces necesario para obtener un número C menor que B. A continuación, restar c de B tantas veces como sea preciso para obtener un número menor que C, y así sucesivamente. Si A y B son primos entre si se llega a 1 como ultimo resto, y 1 es el máximo común divisor. Si A y B no son primos entre si se llega en alguna etapa a una división exacta, y el ultimo divisor será el mayor común. Este proceso se sigue llamando todavía algoritmo de Euclides.

Vienen a continuación teoremas simples sobre números. Por ejemplo, si $a=b/n$ y $c=d/n$, entonces $a\pm c=(b\pm d)/n$. Algunos de ellos no son sino los teoremas sobre proporciones anteriormente probados para magnitudes, y que ahora se prueban para números. Así, si $a/b=c/d$, $(a-c)(b-d)=a/b$. En la definición 15 quedaba establecido que $a\cdot b$ es el resultado de sumar b consigo mismo a veces, y Euclides prueba ahora que $a\cdot b=b\cdot a$.

• *Proposición 30.* Si un número primo mide al producto de dos números, debe medir al menos a uno de ellos.

Se trata de un resultado fundamental en la teoría moderna de números, cuya expresión actual se obtiene simplemente sustituyendo las palabras mide y medir por divide y dividir.

• *Proposición 31.* Todo número compuesto es medido por algún número primo.

La demostración de Euclides parte de que si A es compuesto, por definición tiene algún divisor B; si B no es primo, es compuesto, y tiene algún divisor C que también lo es de A, etc. Y dice: " si se prosigue la investigación de esta forma, se encontrara algún número primo que divide al anterior, que es un divisor de A. Puesto que, si no, habría una sucesión infinita de divisores de A, cada uno de ellos menor que el anterior, y esto es imposible para los números. " Toma así en consideración el hecho de que cualquier conjunto de números enteros positivos tienen un mínimo.

El libro VIII prosigue con la teoría de números, sin incorporar nuevas definiciones. Trata sobre todo de progresiones geométricas, que para Euclides son conjuntos de números en proporción continua, esto es, $a/b=b/c=c/d=d/e=...$ Tales proporciones continuas satisfacen nuestra definición de progresión geométrica, ya que en estas la razón entre cada termino y el siguiente es constante.

El libro IX concluye la tarea sobre teoría de números. Hay en él teoremas sobre números cuadrados, cúbicos, planos y sólidos, y mas teoremas sobre proporciones continuas. So de señalar las siguientes:

• *Proposición 14.* Si un número es el menor medido por varios números primos, no puede ser medido por otros números primos.

Lo que significa que si *a* es el producto de los primos *p, q, ...*esa descomposición de *a* en primos es única.

• *Proposición 20.* Hay mas números primos que cualquier multitud dada de números primos.

En otras palabras, hay infinitos números primos. La demostración de Euclides es clásica: a partir de los primos $p_1, p_2, ..., p_n$ se puede formar el número $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n+1$, que es mayor que cualquiera de esos *n* primos, y que si es compuesto debe tener algún divisor primo diferente de todos ellos, ya que la división por $p_1, p_2, ...$o p_n deja como resto 1.

• *Proposición 35.* Esta proporciona, con una elegante prueba, la suma de los términos de una progresión geométrica. La proposición 36 es un famoso teorema sobre números perfectos: si la suma de los términos de la progresión geométrica 1, 2, 2^2, ..., 2^n es primo, el producto de esa suma por el ultimo termino, esto es, $(1+2+...+2^n)2^n$ o $(2^{n+1}-1)2^n$ es un número perfecto. Los griegos conocían los cuatro primeros números perfectos, 6, 28, 496, 8128, y quizá también el quinto.

3.2.1.7.- EL LIBRO X: LA CLASIFICACION DE LOS INCONMENSURABLES.

El libro X de los *Elementos* emprende la tarea de clasificar en tipos los irracionales, es decir, las magnitudes inconmensurables con una magnitud dada. Augustus de Morgan describió el contenido general de este libro así: " Euclides investigo cada posible segmento cuya longitud pueda expresarse (con álgebra moderna) en la forma:

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Siendo *a* y *b* las longitudes de dos segmentos conmensurables ". Claro esta que no todos los irracionales pueden representarse así, y Euclides trata solo los que surgen en su álgebra geométrica.

La primera proposición del libro X es importante para posteriores apartados de los *Elementos*.

• *Proposición 1.* Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad, repitiendo este proceso quedara en algún momento una magnitud menor que la mas pequeña de las dos magnitudes dadas.

Al final de la demostración Euclides afirma que el teorema se puede probar igualmente si las partes sustraídas son mitades. Al principio utiliza un axioma, no reconocido como tal por

Euclides, que le posibilita sumar consigo misma un numero finito de veces la menor de dos magnitudes hasta obtener una suma que exceda a la mayor. Su argumentación se apoya en la definición de razón entre dos magnitudes, pera esa definición no justifica el paso en cuestión, ya que si solo puede hablar de razón entre dos magnitudes cuando cada una de ellas se puede multiplicar hasta superar a la otra, Euclides debería probar que entre esas dos magnitudes existe razón, en lugar de suponerlo implícitamente. Según Arquímedes, tal axioma había sido utilizado ya por Eudoxo, que lo había establecido como lema. Arquímedes lo emplea sin prueba, tomándolo de hecho por un axioma, que hoy recibe el nombre de ambos: Arquimedes-Eudoxo.
Hay 115 proposiciones en este libro X, aunque en algunas ediciones aparecen unas proposiciones 116 y 117, la ultima de las cuales establece la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

3.2.1.8.- LOS LIBROS XI, XII Y XIII: GEOMETRIA DE SOLIDOS Y METODO DE EXHAUSCION.

El libro XI inicia el tratamiento de los volúmenes o sólidos, aunque todavía aparecerán algunos teoremas de geometría plana. He aquí algunas de sus definiciones:

- Definición 1.- Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad.
- Definición 2.- Los bordes de un sólido son superficies.
- Definicion3.- Una recta forma ángulo recto con un plano cuando lo forma con todas rectas que la cortan y están en el plano.
- Definición 4.- Un plano forma un ángulo recto con otro plano cuando las perpendiculares en uno de los planos a la intersección de ambos forman ángulos rectos con el otro plano.
- Definición 6.- La inclinación de un plano con respecto a otro es el ángulo agudo formado por las perpendiculares a la intersección común, en el mismo punto, en cada uno de los dos planos.

A este ángulo agudo nosotros le llamamos diedro.

Hay también definiciones para planos paralelos, figuras sólidas semejantes, ángulo sólido, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, cubo, octaedro, icosaedro, dodecaedro (regulares). La esfera se define por el giro de un semicírculo en torno al diámetro que lo limita; el cono por el giro de un triángulo rectángulo en torno a uno de los lados del ángulo recto, siendo obtusángulo, rectángulo o acutángulo según que ese lado que permanece fijo en el giro sea menor, igual o mayor que el otro lado del ángulo recto; el cilindro, por el giro de un rectángulo en torno a uno de sus lados. La importancia de estas tres ultimas definiciones esta en que todos los sólidos considerados, excepto los poliedros regulares, se obtienen a partir del giro de una figura plana en torno a un eje.

Las definiciones son vagas, poco claras, y con frecuencia suponen teoremas no explicitados. Por ejemplo, la definición 6 da por supuesto que el ángulo es el mismo sea cual fuere el punto de la intersección de ambos planos en que se construya. También tiende Euclides a considerar únicamente sólidos convexos, sin especificar esto en su definición de poliedro regular.

El libro tan solo habla de figuras limitadas por caras planas. De los 39 teoremas que contiene, los 19 primeros se refieren a propiedades de rectas y planos, por ejemplo, acerca de rectas paralelas y perpendiculares a planos. Las demostraciones de estos teoremas en este libro no siempre son adecuadas, y muchos teoremas generales sobre poliedros solo se prueban para ciertos casos particulares.

- *Proposición 20.* Cualquier ángulo sólido esta limitado por tres ángulos planos, dos cualesquiera de ellos, tomados conjuntamente de cualquier manera, son mayores que el ángulo, restante.

Es decir, que de los tres ángulos planos CAB, CAD y BAD la suma de dos de ellos es mayor que el tercero.

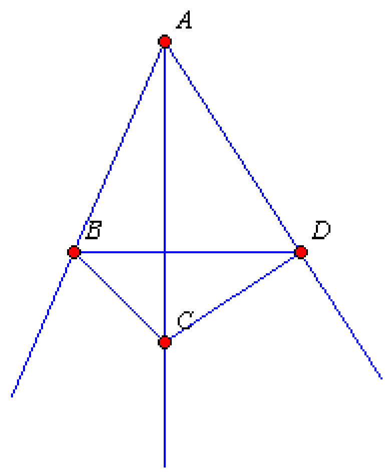


Figura 3.15

- *Proposición 21.* Cualquier ángulo sólido esta limitado por ángulos planos menores, cuya suma es menor que cuatro ángulos rectos.
- *Proposición 31.* Los sólidos paralelepipédicos que tienen la misma altura entre si son como sus bases.

El libro XII contiene 18 teoremas sobre áreas y volúmenes, en particular sobre figuras curvilíneas y figuras limitadas por superficies. La idea que en él domina es la del método de enhacino, que proviene de Eudoxo. Por ejemplo, para probar que la razón entre las áreas de dos círculos es como la razón entre los cuadrados de sus diámetros, ese método aproxima ambas áreas con una precisión creciente inscribiendo en ellas polígonos regulares, y como el teorema en cuestión es valido para los polígonos, queda así probado para los círculos. El termino " enhacino ", que proviene del hecho de que esos polígonos sucesivamente inscritos van dejando " esxahusto ", vacío, el circulo, no fue empleado por los griegos, sino que fue introducido en el siglo XVII. Por si mismo, o por la vaga descripción que se acaba de dar de él, el termino podría sugerir que se trata de un método aproximado, que constituye solo una etapa hacia el concepto riguroso que se obtendría como limite. Se trata sin embargo, como se va a ver, de un método riguroso en si mismo, que no requiere un proceso explícito de paso al limite; su validez reside en el método indirecto de prueba, que evita el empleo de limites. De echo, el trabajo de Euclides sobre áreas y volúmenes es mas perfecto que el de Newton y Leibniz, quienes intentaron basarse en el álgebra y el sistema numérico, recurriendo a un concepto embrionario de limite.

Para una mejor comprensión del método de exhaucion, se ha de considerar con cierto detalle un ejemplo. El libro XII se abre con la

- *Proposición 1.* La razón entre los polígonos semejantes inscritos en círculos es como la razón entre los cuadrados de los diámetros de ambos círculos.
- *Proposición 2.* (Esta es la proposición crucial) La razón entre dos círculos es la misma que la que hay entre los cuadrados de sus diámetros.

Euclides prueba en primer lugar que puede ir " vaciando " el circulo mediante polígonos (figura 3.16). El área del cuadrado es mayor que la mitad del área del circulo porque aquella es la mitad del área de un cuadrado circunscrito, que a su vez es mayor que el área del circulo. Sea ahora AB cualquiera de los lados del cuadrado inscrito, C el punto medio del arco AB, AD y BE perpendiculares a la tangente al circulo en C. Ang. 1 = Ang. 2 porque cada uno de ellos es la mitad del arco CB, de lo que se deduce que DE es paralela a AB, y ABED es un rectángulo cuya área es mayor que la del segmento circular ABFCG. Repitiendo el proceso en cada lado del cuadrado, se obtiene un octógono regular que incluye no solo al cuadrado sino mas de la mitad de la diferencia entre el área del circulo y la del cuadrado. En cada lado del octógono se puede construir un triángulo del mismo modo que se hizo con el ACB sobre AB, obteniendo un hexadecágono regular que incluye al octógono y mas de la mitad de la diferencia entre el área del circulo y la del octógono. El proceso puede repetirse cuantas veces se desee. Euclides emplea entonces la proposición 1 del libro X para afirmar que la diferencia entre el área del circulo y la de un polígono regular con un número de lados suficientemente grande puede hacerse menor que cualquier magnitud fijada de antemano.

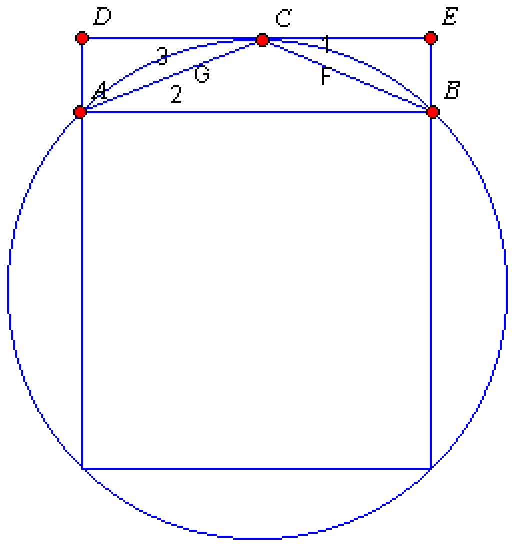


Figura 3.16

Sea entonces S y S' las áreas de dos círculos (figura 3.17) y sean d y d' sus diámetros. Euclides desea probar que:

$$S : S' = d^2 : d'^2 \qquad (3)$$

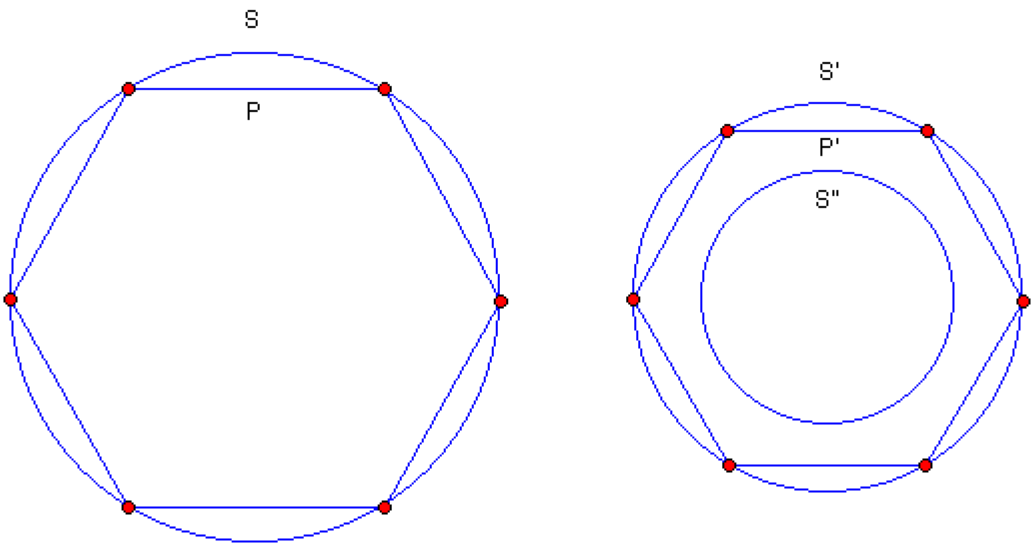


Figura 3.17

Supóngase que no se cumple esa desigualdad y que en su lugar se tiene que:

$$S : S'' = d^2 : d'^2 \qquad (4)$$

Donde S” es algún área mayor o menor que S’ (se supone aquí y en todo el libro XII la existencia de la cuarta proporcional como un área). Si S”<S’, se puede construir polígonos regulares con un numero cada vez mayor de lados hasta que se llegue a uno, digamos P’, tal que su área difiera de S’ en menos que S’-S”. Ese polígono puede construirse porque ya se ha probado anteriormente que la diferencia entre el circulo S’ y los polígonos regulares inscritos en él puede hacerse menor que cualquier magnitud dada, y por tanto menor que S’-S”. Entonces:

$$S' > P' > S'' \qquad (5)$$

Si inscribimos en S un polígono P semejante a P’. Por la proposición 1,

$$P : P' = d^2 : d'^2$$

Y por (4) se obtendrá también que:

$$P : P' = S : S''$$

O bien:

$$P : S = P' : S''$$

Sin embargo, como P<S, resultaría:

$$P' < S''$$

En contradicción con (5).

De manera similar se puede probar que S” no puede ser mayor que S’, luego S”=S’, y teniendo en cuenta (4) queda establecida la proporción (3).

Este método se utiliza para probar teoremas tan críticos y difíciles como:

- *Proposición 5.* La razón entre dos pirámides que tienen la misma altura y bases triangulares es igual a la razón entre sus bases.
- *Proposición 10.* Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

- *Proposición 11.* La razón entre conos y cilindros de la misma altura es igual a la razón entre sus bases.
- *Proposición 12.* La razón entre conos y cilindros semejantes es triple (razón entre cubos) de la razón entre los diámetros de sus bases.
- *Proposición 18.* La razón entre dos esferas es como la razón triplicada entre sus respectivos diámetros.

El libro XIII estudia propiedades de los polígonos regulares como tales e inscritos en círculos, y el problema de cómo inscribir los cinco poliedros regulares en una esfera. Prueba también que no existen mas que esos cinco tipos de sólidos regulares (poliedros convexos). Este ultimo resultado es un corolario a la proposición 18, que clausura el libro:

La prueba de que no pueden existir mas que cinco tipos de sólidos regulares depende de un teorema previo, la proposición 21 del libro XI, que establece que las caras de un ángulo sólido deben sumar menos de 360º. Así, si se juntan triángulos equiláteros, se puede hacer que concurran tres en cada vértice del sólido regular para formar un tetraedro, cuatro para formar un octaedro o cinco para formar un icosaedro. Con seis triángulos equiláteros en un vértice se obtendría una suma de 360º, lo que descarta esa posibilidad. Se pueden juntar tres cuadrados en cada vértice para obtener un cubo y tres pentágonos en cada vértice para formar un dodecaedro. No puede usarse ningún otro polígono regular, porque al unir tres en un punto se formaría un ángulo de 360º o mas. Se observa que Euclides supone sólidos regulares convexos. Hay otros sólidos regulares no convexos.

Los trece libros de los *Elementos* contienen 467 proposiciones. En algunas ediciones antiguas se incluían dos libros mas, que contenían otros resultados sobre sólidos regulares, aunque el libro XV es poco claro e impreciso. Ambos son, sin embargo, posteriores a Euclides. El libro XIV se debe a Hypsides (c.150 a.C.) y parte del libro XV se escribió probablemente mucho mas tarde, en torno al siglo VI d. C.

3.2.2.- OTRAS OBRAS MATEMATICAS DE EUCLIDES.

Euclides escribió otras obras de matemáticas y física, muchas de ella importantes para la historia de las matemáticas. Entre ellas cabe destacar las obras de física mas importantes, la *Optica* y la *Catoptrica.*

Pappus incluyo en sus *Tesoros del Análisis* los datos de Euclides, describiéndolos como material geométrico suplementario relacionado con “ problemas algebraicos ”. Los teoremas que contenían determinaban ciertas magnitudes a partir de otras dadas. Se trataba de un material de naturaleza semejante al que aparece en los *Elementos*, aunque los teoremas específicos fueran diferentes Puede que fueran concebidos como un conjunto de ejercicios de repaso de los *Elementos*. Su contenido es íntegramente conocido.

De las obras de Euclides, a continuación de los *Elementos*, fueron las *Cónicas* las que desempeñaron un papel mas relevante en la historia de las matemáticas. Según Pappus, el contenido de esta obra desaparecida, que constaba de cuatro libros, era sustancialmente el mismo que el recogido en los tres primeros libros de las *Secciones Cónicas* de Apolonio. Euclides trataba las cónicas como secciones de los tres diferentes tipos de conos (con ángulo recto, agudo y obtuso). La elipse se obtenía también como sección de cualquier cono y de un cilindro circular. Como se vera, Apolonio cambio este enfoque de las secciones cónicas.

Las *Pseudaria* de Euclides contenían demostraciones geométricas correctas y falsas, y se trataba de un libro destinado al aprendizaje de los estudiantes. La obra se ha perdido.

Sobre las divisiones (de figuras), mencionada por Proclo, trata de la subdivisión de una figura dada en otras, por ejemplo, de un triángulo en otros mas pequeños o en triángulos y cuadriláteros. Existe una traducción latina, debida probablemente a Gerardo de Cremona (1114-1187), de una versión árabe incorrecta e incompleta. En 1851, Franz Woepcke encontró y tradujo otra versión árabe que parece ser correcta. Existe una traducción al ingles realizada por R.C. Archibald.

Los *Porismas* son otra obra perdida, cuyo contenido, y aun naturaleza se desconocen en gran medida. Pappus, en su *Colección matemática*, dice que constaba de tres libros. Se cree, basándose en los comentarios de Pappus y Proclo, que esos *Porismas* trataban esencialmente de la construcción de objetos geométricos cuya existencia ya estaba asegurada. Así pues, podían considerarse como problemas intermedios entre los teoremas puros y las construcciones mediante las que se establece la existencia de alguna figura, entre los que podría ser típica la localización del centro de una circunferencia que cumpliera ciertas condiciones dadas.

La obra *Superficies-Lugares*, formada por dos libros, mencionada por Pappus en su *Colección* y de la que no quedan restos, trataba probablemente de lugares geométricos que son superficies.

Los *Fenómenos* de Euclides, aun siendo un texto sobre astronomía, contienen 18 proposiciones de geometría esférica y otras sobre esferas en rotación de uniforme. La tierra es tratada como una esfera. Se conservan varias versiones.

3.3.- APOLONIO.

3.3.1.- LA OBRA MATEMATICA DE APOLONIO.

El otro gran griego que pertenece al periodo clásico en los dos sentidos de resumir y prolongar el tipo de matemática producida en este periodo es Apolonio (c.262-190 a.C.). Nació en Perga, ciudad situada en el Noroeste de Asia Menor, que durante su vida estuvo sujeta al dominio de Pérgamo. Se traslado a Alejandría cuando todavía era joven, y aprendió matemática con los sucesores de Euclides. Por lo que se sabe, permaneció en Alejandría colaborando con los grandes matemáticos que allí trabajaban. Su obra maestra es el tratado sobre las cónicas, pero también escribió sobre otros temas. Su capacidad matemática era tan extraordinaria que llego a ser conocido en vida, y mas tarde, como " el Gran Geómetra ". También fue grande su reputación como astrónomo.

Las secciones cónicas, como se sabe, fueron estudiadas mucho antes de Apolonio. Concretamente, Aristeo el Viejo y Euclides habían escrito obras sobre ellas. También Arquímedes, sobre el que se hablara mas tarde, presento algunos resultados sobre este tema. Fue Apolonio, no obstante, quien lo pulió, despojándolo de irrelevancias y le dio forma sistemática. Además de sus méritos totalizadores, las *Secciones Cónicas* contienen material altamente original, y son ingeniosas, extremadamente hábiles, y están excelentemente organizadas. Se trata de una realización tan monumental que cerro prácticamente el tema para los pensadores posteriores, al menos desde el punto de vista puramente geométrico. Puede considerarse verdaderamente como la culminación de la geometría clásica griega.

Las *Secciones Cónicas* constan de ocho libros que contienen 487 proposiciones. De ellos se conservan los cuatro primeros reproducidos en manuscritos griegos de los siglos XII y XIII, y los tres siguientes en una traducción al árabe escrita en 1290. El octavo se ha perdido, aunque en el siglo XVII Halley llevo a cabo una reconstrucción basándose en las indicaciones de Pappus.

Los predecesores de Euclides, este mismo, y Arquímedes, trataron las secciones cónicas en relación con los tres tipos de conos circulares rectos, como habían sido introducidas por el platónico Menecmo. Tanto Euclides como Arquímedes, sin embargo sabían que la Elipse también puede obtenerse como sección de los otros dos tipos de conos circulares rectos, y Arquímedes también sabia que las secciones de conos circulares *oblicuos* mediante planos que corten a todas las generatrices son elipses. Probablemente se dio cuenta de que las otras secciones cónicas pueden obtenerse a partir de conos circulares oblicuos.

Fue Apolonio, sin embargo, el primero en basar la teoría de las tres cónicas en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo, y en dar cuenta de las dos ramas de la hipérbola. Se aduce como una de las razones para que Menecmo y otros predecesores de Apolonio utilizaran planos perpendiculares a una de las generatrices de los tres tipos de cono circular recto, que no vieran que puedan obtenerse otras secciones de esos conos, sino que deseaban estudiar el problema inverso. Dadas ciertas curvas cuyas propiedades geométricas sean las de las secciones cónicas, la demostración de que esas curvas se pueden obtener como secciones de un cono es mas fácil cuando el plano con el que se corta al cono es perpendicular a una generatriz.

Consideraremos en primer lugar las definiciones y propiedades básicas de las cónicas que aparecen en el libro I. Dados un circulo BC y un punto A (figura 3.18) situado fuera del plano que contiene al circulo, una recta que pasa por A y se mueve a lo largo de la circunferencia engendra un doble cono. Al circulo se le llama base del cono. Su eje es la recta que va desde A hasta el centro del circulo (no dibujado en la figura). Si esa recta es perpendicular a la base, el cono es circular recto; si no , es escaleno u oblicuo. Consideremos la

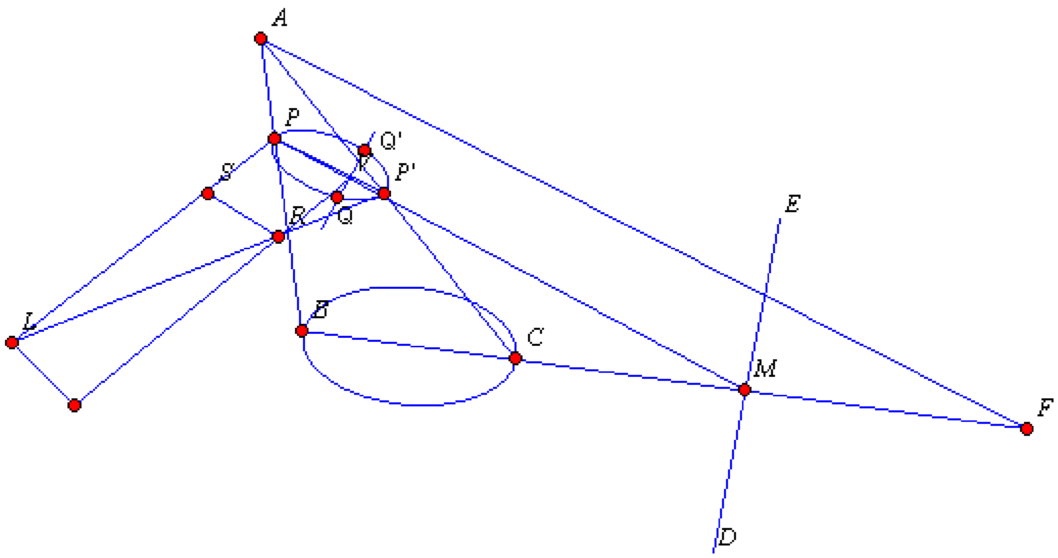


Figura 3.18

sección del cono por un plano que corte al plano de la base en una recta DE. Sea BC el diámetro del circulo base que es perpendicular a DE. Entonces ABC es un triángulo que contiene en su interior al eje del cono, y se le llama triángulo axial. Si ese triángulo corta a la cónica en PP’ (que no tiene por que ser un eje de la sección cónica), PP’M es la recta determinada por la intersección del plano de corte con el triángulo axial. Sea Q’Q cualquier cuerda de la sección cónica paralela a DE, que no tiene por qué ser perpendicular a PP’. Apolonio prueba entonces que PP’ corta en el punto medio a Q’Q, de manera que VQ es la mitad de Q’Q.

Dibujamos ahora la recta AF paralela a PM, hasta encontrar a BM en, digamos, F. A continuación se dibuja la recta PL perpendicular a PM en el plano de la sección. Para la elipse y la hipérbola se elige L de manera que satisfaga la condición

$$\frac{PL}{PP'} = \frac{BFxFC}{AF^2}$$

y para la parábola de manera que se tenga

$$\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BAxAC}$$

En los casos de la elipse y la hipérbola dibujemos ahora los segmentos P'L y VR paralelo a PL desde V hasta cortar a P'L en R (en el caso de la hipérbola P' esta en la otra rama y hay que extender P'L para conseguir el punto R).

Después de algunas construcciones de menor importancia, Apolonio prueba que para la elipse y la hipérbola:

$$QV^2 = PV \cdot VR \qquad (6)$$

Apolonio llama a QV " ordenada " y así el resultado (6) muestra que el cuadrado de la ordenada equivale a un rectángulo construido sobre PL, en concreto el que tiene como lados PV y VR. Además, prueba que en el caso de la elipse el complementario de ese rectángulo en el rectángulo total PV · PL es el rectángulo LR, que es semejante al rectángulo de lados PL y PP'. De ahí el termino " elipse ".

En el caso de la hipérbola se sigue cumpliendo (6), pero la construcción mostraría que VR es mas largo que PL, de manera que el rectángulo PV x VR excede al rectángulo construido sobre PL, esto es, PL · PV, en un rectángulo LR que es semejante al rectángulo de lados PL y PP'. De ahí el termino " hipérbola ". En el caso de la parábola, Apolonio muestra que en lugar de (6) se tiene:

$$QV^2 = PV \cdot PL \qquad (7)$$

de manera que el rectángulo que equivale a QV^2 es precisamente el construido sobre PL con anchura PV. De ahí el termino " parábola ".

Apolonio introdujo esa terminología para las cónicas en lugar de las secciones de Menecmo de los conos recto, agudo y obtuso. Cuando las palabras parábola o elipse aparecen en los trabajos de Arquímedes, como ocurre en su *Cuadratura de la Parábola*, se trata inserciones de transcriptores posteriores.

Las ecuaciones (6) y (7) son las propiedades básicas de las secciones cónicas. Una vez obtenidas, Apolonio se olvida del cono y deduce otras propiedades a partir de esas ecuaciones. De echo, donde ahora se usa abscisa, ordenada y la ecuación de una cónica para deducir propiedades, Apolonio emplea PV, la ordenada o semicuerda QV y una igualdad geométrica, ya sea (6) o (7). Claro esta que en la exposición de Apolonio no aparece nada de álgebra.

Se puede fácilmente transcribir las propiedades básicas de Apolonio en la geometría moderna con coordenadas: si denotamos por $2p$ al segmento PL, que Apolonio llama parámetro de las ordenadas (*latus rectum* en las ediciones latinas), y por d la longitud del diámetro PP', y si x es la distancia PV medida a partir de P e y la distancia QV (lo que significa que se están utilizando coordenadas oblicuas), se ve inmediatamente a partir de (7) que la ecuación de la parábola es:

$$Y^2 = 2px$$

Para la elipse, señalemos que de la ecuación (6) que la define podemos obtener primeramente que:

$$Y^2 = \mathrm{PV} \cdot \mathrm{VR}$$

Pero PV x VR = x ($2p$ - LS). También, como el rectángulo LR es semejante al determinado por PL y PP':

$$\frac{LS}{PL} = \frac{x}{d}$$

Luego LS = $2px/d$. Entonces:

$$y^2 = x\left(2p - \frac{2px}{d}\right) = 2px - \frac{2px^2}{d}$$

Para la hipérbola obtenemos:

$$y^2 = 2px + \frac{2px^2}{d}$$

En la construcción de Apolonio *d* es infinito para la parábola, y vemos así cómo ésta aparece como caso limite de la elipse o la hipérbola.

Para proseguir con el tratamiento que hace Apolonio de las cónicas se necesitan algunas definiciones de conceptos que todavía son importantes en la geometría moderna. Consideremos un conjunto de cuerdas paralelas a una elipse, digamos el conjunto de paralelas a PQ en la figura 1. Apolonio prueba que los centros de esas cuerdas están en un segmento AB, al que se llama diámetro de la cónica (el segmento PP' de la figura fundamental es un diámetro), y a continuación, que si se dibuja una recta DE pasando por C, el punto medio de AB, que sea paralela a la familia original de cuerdas, esa recta corta en el punto medio a todas las cuerdas paralelas a AB. El segmento DE se llama diámetro conjugado con AB. En al caso de la hipérbola (figura 3.19), las cuerdas pueden estar dentro de una de las ramas, por ejemplo PQ, y entonces el diámetro es un segmento que va de una rama a la otra, en la figura AB.

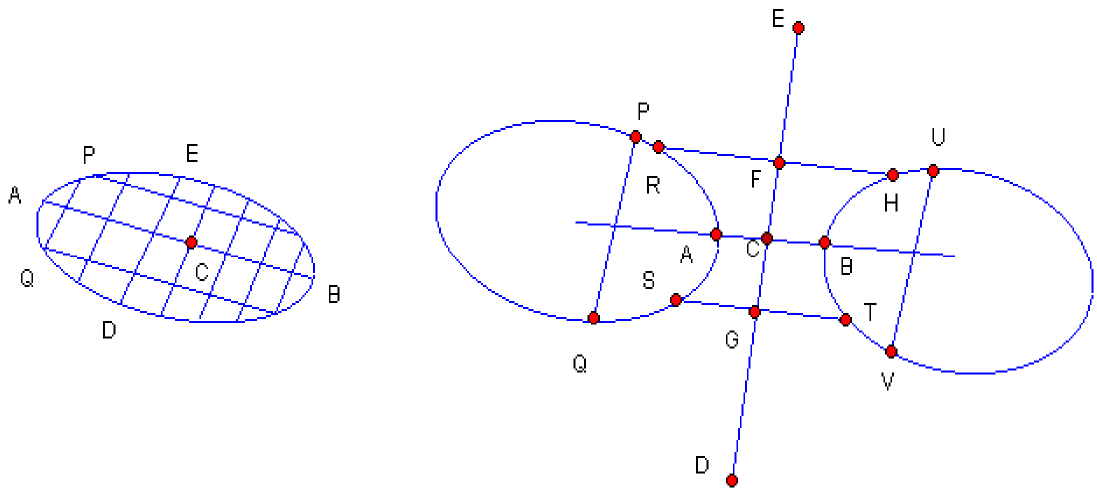


Figura 3.19

Las cuerdas paralelas a AB, por ejemplo RH, están entonces entre ambas ramas, y el diámetro conjugado con AB; digamos DE, definido como la media proporcional entre AB y el *Latus rectum* de la hipérbola, no corta a la curva. En la parábola, cualquier diámetro, esto es, una recta que pase por los puntos medios de una familia de cuerdas paralelas, es siempre paralela al eje de simetría, y no hay diámetro que conjugado con uno dado, ya que las cuerdas paralelas a este son de longitud infinita. Los ejes de una elipse o hipérbola son dos diámetros conjugados perpendiculares entre si. Para la parábola (figura 3.20) el eje es un diámetro cuyas correspondientes cuerdas le son perpendiculares.

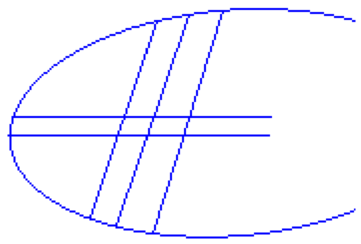


Figura 3.20

Después de introducir las propiedades básicas de las secciones cónicas, Apolonio presenta algunos hechos simples acerca de los diámetros conjugados. El libro I también se ocupa de las tangentes a las cónicas. Apolonio concibe una tangente como una recta que solo tiene un punto en común con la cónica, permaneciendo cualquier otro punto fuera de esta. Muestra entonces que si se dibuja una recta pasando por un extremo de un diámetro (punto P de la figura fundamental) que sea paralela a las cuerdas que corresponden a ese diámetro (paralelas a QQ' en dicha figura), caerá fuera de la cónica, sin que pueda haber ninguna otra recta entre ella y la cónica. Por tanto, la recta mencionada es la tangente a la cónica en P.

Otro teorema sobre tangentes asegura lo siguiente: supongamos que PP' (figura 3.21) es un diámetro de una parábola y QV es una de las cuerdas que corresponden a ese diámetro. Entonces, si se toma en él un punto T fuera de la curva y tal que TP = PV, donde V es el pie de la ordenada (cuerda) desde Q hasta el diámetro PP', la recta TQ será tangente a la parábola en Q. Hay teoremas análogos para la elipse y la hipérbola.

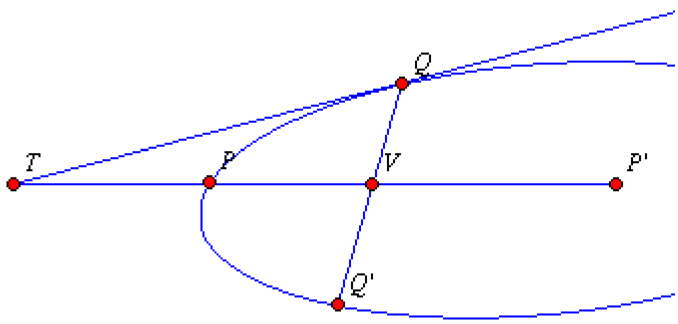


Figura 3.21

Apolonio prueba después que si se toma cualquier diámetro de la cónica distinto de PP’ en la figura fundamental, las propiedades definitorias de la cónica, las ecuaciones (6) y (7), siguen siendo las mismas; claro esta que QV se refiere entonces a la cuerda de tal diámetro. Lo que ha hecho equivale en nuestro lenguaje a una transformación de un sistema de coordenadas oblicuas en otro. En relación con esto, también prueba que a partir de cualquier diámetro y las ordenadas correspondientes se puede hacer el cambio a un diámetro (eje) cuyas ordenadas le son perpendiculares. En nuestro lenguaje, se tendría así un sistema de coordenadas rectangulares. También muestra Apolonio como construir cónicas a partir de ciertos datos (por ejemplo, un diámetro, el *Latus rectum*, y la inclinación de las ordenadas con respecto al diámetro). Lo hace construyendo primeramente el cono del que la cónica deseada es una sección.

El libro II comienza con la construcción y propiedades de las asíntotas a una hipérbola. Muestra, por ejemplo, no solo la existencia de asíntotas, sino también que la distancia entre un punto de la curva y la asíntota se hace más pequeña que cualquier longitud dada alejándose lo suficiente de a lo largo de la curva. Después introduce la hipérbola conjugada con una dada, mostrando que tiene las mismas asíntotas.

Otros teoremas del libro II muestran como hallar un diámetro de una cónica, el centro de una cónica que lo posea, el eje de una parábola, y los ejes de una cónica con centro. Por ejemplo, si T (figura 3.22) esta fuera de una cónica dada, TQ y TQ’ son tangentes en los puntos Q y Q’ a la cónica, y V es el punto medio de la cuerda QQ’, entonces TV es un diámetro. Otro método para encontrar un diámetro de una cónica consiste en dibujar cuerdas paralelas: la recta que une sus puntos medios es un diámetro. El punto de intersección de dos diámetros cualesquiera es el centro de la cónica (si lo tiene). El libro concluye con métodos para construir tangentes a cónicas que satisfagan ciertas condiciones dadas, como por ejemplo, pasar por un punto dado.

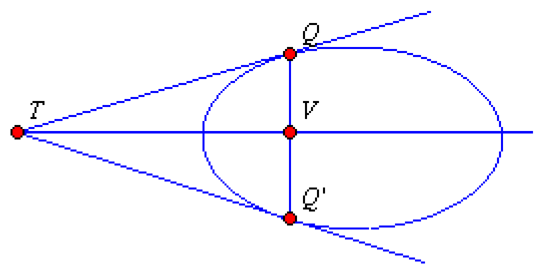


Figura 3.22

El libro III comienza con teoremas sobre áreas de figuras formadas con tangentes y diámetros. Uno de los principales resultados aquí (figura 3.23) es que si OP y OQ son tangentes a una cónica, si RS es cualquier cuerda paralela a OP y R'S' cualquier cuerda paralela a OQ, y si

RS y R'S' se cortan en J (interna o externamente), entonces:

$$\frac{RJ \cdot RS}{R'J \cdot JS'} = \frac{OP^2}{OQ^2}$$

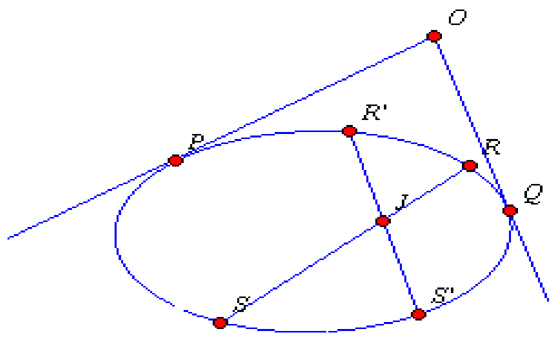


Figura 3.23

Se trata de una generalización de un teorema bien conocido de geometría elemental, el que asegura que si dos cuerdas de un circulo se cortan, el producto de las longitudes de los segmentos producidos en una de ellas es igual al de las longitudes de los segmentos producidos en la otra, ya que en ese caso $OP^2/OQ^2=1$.

El libro III trata a continuación las que llamaremos relaciones armónicas entre polo y polar. Si TP y TQ son tangentes a una cónica (figura 3.24) y si TRS es cualquier recta que corte a la cónica en R y S y a la cuerda PQ en) *I*, se tiene:

$$\frac{TJ}{TR} = \frac{IR}{IS}$$

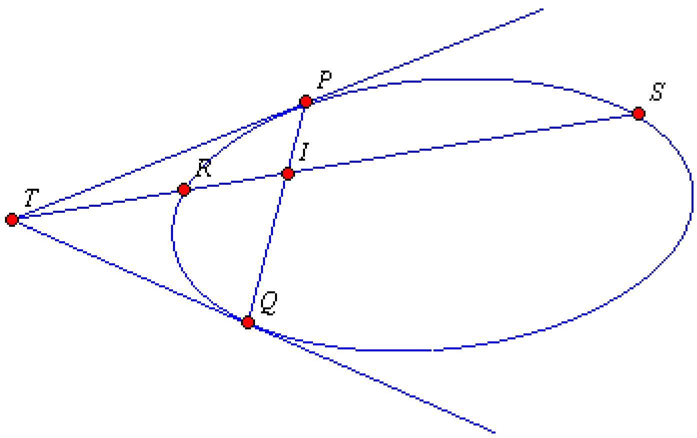


Figura 3.24

Es decir, que T divide a RS externamente en la misma razón en que lo hace internamente *I*.La recta PQ se llama polar del punto T, y se dice que T, R, *I* y S forman una cuaterna armónica de puntos. Por otra parte, si una recta que pase por el punto medio V del segmento PQ (figura 3.25) corta a la cónica en R y S, y a la recta paralela a PQ que pasa por T en O, se tiene:

$$\frac{OR}{OS} = \frac{VR}{VS}$$

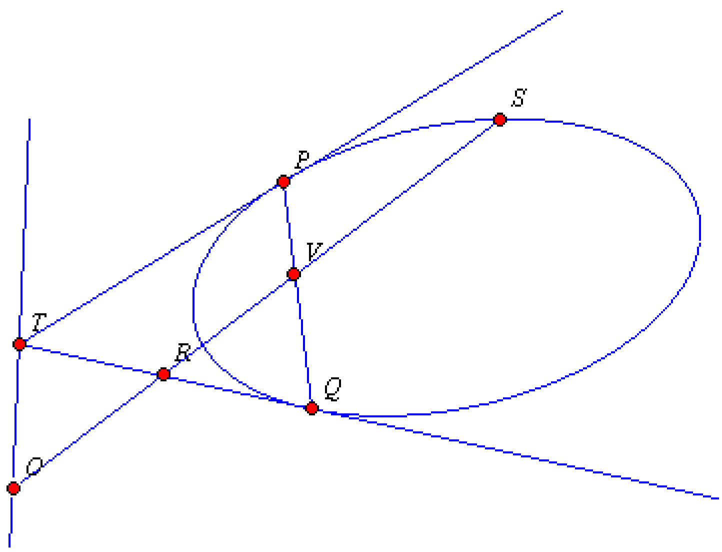


Figura 3.25

Esa recta que pasa por T es la polar de V, y O, R, V y S forman una cuaterna armónica de puntos.

El libro prosigue con el problema de las propiedades focales de las cónicas con centro; no se menciona aquí el foco de una parábola. Los focos (la palabra no es utilizada por Apolonio) se definen para la elipse y la hipérbola (figura 3.26) como los puntos F y F' del eje (mayor) AA' tales que AF · FA' = AF' · F'A' = 2p · AA'/4. Apolonio prueba para la elipse y la hipérbola que las rectas PF y PF' desde un punto P de la cónica forman ángulos iguales con la tangente en P y que la suma (para la elipse) o la diferencia (para la hipérbola) de las distancias focales PF y PF' es igual a AA'.

En esta obra no aparece el concepto de directriz, pero el hecho de que una cónica es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a un punto dado (foco) y una recta dada (directriz) mantienen una razón constante ya era conocido por Euclides, y Pappus lo explico y demostró.

Hay un problema famoso, resuelto parcialmente por Euclides, que consiste en determinar el lugar geométrico de los puntos para los que las distancias p, q, r y s a cuatro rectas dadas satisfacen la condición $pq=\alpha rs$, donde α es un numero dado. Apolonio dice en su prefacio a las *Secciones Cónicas* que se puede resolver este problema con las proposiciones del libro III. Cierto es que así puede hacerse, y también en este caso Pappus sabia que ese lugar geométrico es una cónica.

El libro IV se ocupa de otras propiedades de los polos y polares. Por ejemplo, una proposición establece un método para dibujar las tangentes a una cónica desde un punto exterior T (figura 3.27): Dibujemos TQR y TQ'R'; sea O el conjugado armónico de T con respecto a Q y R, es decir, tal que TQ:TR=OQ:OR, y sea O' el conjugado armónico de T con respecto a Q' y R'. Dibujemos ahora OO'. Los puntos de corte P y P' son entonces los puntos de tangencia.

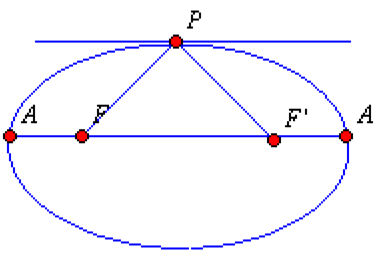


Figura 3.26

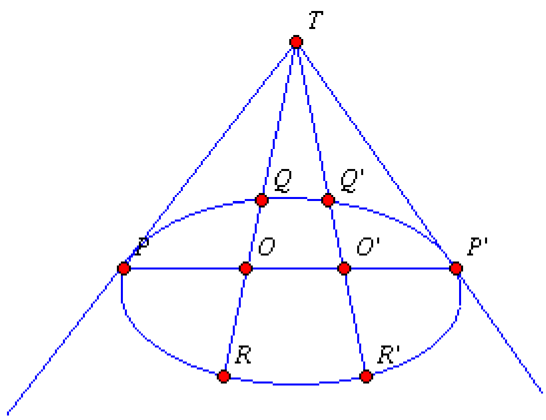


Figura 3.27

El resto del libro trata acerca del número de posibles intersecciones de dos cónicas en varias posiciones. Apolonio prueba que dos cónicas pueden cortarse a lo mas en cuatro puntos.

El libro V es el mas notable por su novedad y originalidad. Trata de las longitudes máxima y mínima de los segmentos que unen los puntos de una cónica con un punto dado.

Apolonio comienza con puntos especiales sobre el eje mayor de una cónica con centro o sobre el eje de una parábola y encuentra las distancias máxima y mínima desde tales puntos a la curva. A continuación toma puntos sobre el eje menor de una elipse y hace lo mismo. Prueba también que si O es cualquier punto interior de una cónica y OP es un segmento de longitud máxima o mínima desde O hasta la cónica, la recta perpendicular en P a OP es tangente a la cónica en P; y si O' es cualquier punto sobre OP fuera de la cónica, O'P es una recta mínima (segmento de longitud mínima) desde O' hasta la cónica. La perpendicular a una tangente en el punto de tangencia es lo que ahora llamamos una normal, de manera que las rectas máxima y mínima desde cualquier punto son normales. Apolonio considera a continuación propiedades de las normales a una cónica. Por ejemplo, en una parábola o una elipse, la normal en cualquier punto cortara a la curva en algún otro punto. Muestra entonces como se pueden construir las normales a la cónica desde un punto dado interior o exterior a la cónica.

En el transcurso de su investigación sobre los segmentos de longitud máxima y mínima (relativa) que pueden trazarse desde un punto a una cónica, Apolonio determina las posiciones de los puntos desde los que se pueden trazar dos, tres y cuatro segmentos de ese tipo. Para cada una de las cónicas determina el lugar geométrico de los puntos que separan las regiones desde las que se puede trazar uno u otro numero de normales. Ese lugar mismo, que Apolonio no analiza, es lo que ahora llamamos evoluta de la cónica, lugar geométrico de los puntos de intersección de normales a la cónica " infinitamente próximas ", o envolvente de la familia de normales a la cónica. Así, desde cualquier punto dentro de la evoluta de la elipse (figura 3.28), se pueden trazar cuatro normales a esta, mientras que desde los puntos exteriores solo pueden trazarse dos. En el caso de una parábola, la evoluta (figura 3.29) es la curva llamada parábola semicúbica (estudiada por primera vez por William Neile [1637-1670]). Desde cualquier punto del plano por encima de la parábola semicúbica se pueden trazar tres normales a la parábola, y desde un punto que este por debajo solo una. Desde un punto de vista de la propia parábola semicúbica se pueden trazar dos normales.

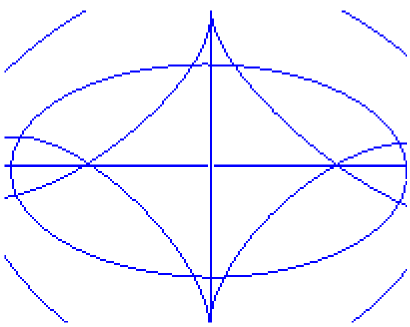


Figura 3.28

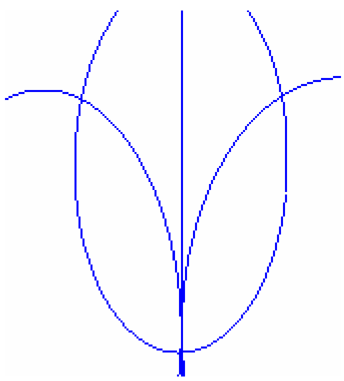


Figura 3.29

El libro VI se ocupa de cónicas y segmentos de cónicas congruentes y semejantes. Los segmentos de cónica son, como en el circulo, las regiones delimitadas por una cuerda. Apolonio muestra también como construir sobre un cono circular recto dado una sección cónica igual a otra dada.

El libro VII no contiene proposiciones sobresalientes. Trata de propiedades de los diámetros conjugados de una cónica con centro. Apolonio compara esas propiedades con las correspondientes de los ejes. Así, si a y b son los ejes y a' y b' son dos diámetros conjugados de una elipse o hipérbola, $a+b<a'+b'$. Además, la suma de los cuadrados de dos diámetros conjugados de una elipse es igual a la suma de los cuadrados de los ejes. La proposición correspondiente para la hipérbola se obtiene reemplazando suma por diferencia. También, en una elipse o una hipérbola, el área del paralelogramo determinado por dos diámetros conjugados cualesquiera y el ángulo con el que se cortan, es igual al área del rectángulo determinado por los ejes.

El libro VIII se ha perdido. Probablemente contenía proposiciones sobre como determinar diámetros conjugados de una cónica (con centro) tales que ciertas funciones de sus longitudes alcancen valores dados.

Pappus menciona otras seis obras matemáticas de Apolonio. Una de ellas, *Sobre Contactos*, cuyo contenido fue reconstruido por Vieta, contenía el famoso " problema de Apolonio ": Dados tres puntos, rectas o círculos, o cualquier combinación de tres de ellos, construir una circunferencia que pase por los puntos y sea tangente a las rectas y círculos. Muchos matemáticos, incluidos Vieta y Newton, proporcionaron soluciones a este problema.

La matemática estrictamente deductiva de Euclides y Apolonio ha alentado la impresión de que los matemáticos crean razonando deductivamente. Un repaso a los trescientos años de actividad anteriores a Euclides muestra, sin embargo, que las conjeturas precedieron a las pruebas y el análisis a la síntesis. De echo, los griegos no concedían mucho mérito a las proposiciones obtenidas mediante simple deducción. A los resultados que se derivan fácilmente de un teorema los llamaron corolarios o porismas. Tales resultados, obtenidos sin mucho trabajo adicional, fueron considerados por Proclo como frutos caídos del árbol o propinas.

.

4.- EL PERIODO HELENISTICO O ALEJANDRINO.

4.1.- INTRODUCCION.

4.1.1.- LA FUNDAMENTACION DE ALEJANDRIA.

La evolución de la matemática ha estado fuertemente ligada al curso de la historia. Las conquistas acometidas por los macedonios, un pueblo griego que vivía en la parte septentrional de las tierras de Grecia, llevo consigo la destrucción de la civilización clásica griega y puso las bases de otra civilización , esencialmente griega pero de carácter completamente diferente. Las conquistas fueron iniciadas el año 352 a.C. por Filipo II de Macedonia. Atenas fue derrotada en el año 338 a.C. El año336 a.C.Alejandro Magno, hijo de Filipo, tomó el mando y conquisto Grecia, Egipto y el Oriente Próximo, llegando por el este hasta la India y por el sur hasta las cataratas del Nilo. Construyo nuevas ciudades por todas partes, que eran a la vez fortalezas y centros de comercio. La mas importante de todas, Alejandría, situada en el centro del imperio de Alejandro y con la intención de ser su capital, fue fundada en Egipto el año 332 a.C. Alejandro eligió el lugar y dibujo los planos para la construcción y la colonización de la ciudad, pero el trabajo no fue completado hasta muchos años después.

Alejandro imaginaba una cultura cosmopolita en su nuevo imperio. Debido a que, entre las demás, la única civilización importante era la persa, Alejandro intentó deliberadamente fundir ambas culturas. El año 325 a.C., él mismo se casó con Statira, hija del príncipe persa Darío, e indujo a cien de sus generales y a diez mil de sus soldados a casarse con mujeres persas. Incorporo veinte mil persas a su ejercito y los mezclo con los macedonios en las mismas falanges. Así mismo, llevo colonizadores de todas las naciones a las diferentes ciudades fundadas por él. Tras su muerte, se encontraron ordenes escritas de transportar grandes grupos de europeos a Asia y viceversa.

Alejandro murrio el año 323 a.C., antes de terminar su capital y cuando estaba ocupado todavía con sus conquistas. Después de su muerte, sus generales se enfrentaron entre si para conseguir el poder. Tras varias décadas de inestabilidad política, el imperio se descompuso en tres partes independientes. La parte europea constituyo el imperio Antiógonido (del general griego Antígono); la parte asiática, el imperio Seléucida (por el general Seleuco), y Egipto, gobernado por la dinastía griega Ptolemaica se convirtió en el tercer imperio. Antiogonia, Grecia y Macedonia fueron cayendo de forma gradual bajo la dominación romana y su importancia, en lo que concierne al desarrollo de la matemática, llego a ser insignificante. La matemática desarrollada en el imperio Seléucida fue principalmente una continuación de la matemática babilónica, completamente influida por los acontecimientos que estamos considerando. Las creaciones mas importantes que continuaban el periodo clásico griego tuvieron lugar en el imperio Ptolemaico, principalmente en Alejandría.

El hecho de que el imperio Ptolemaico se convirtiera en el heredero matemático de la Grecia clásica no fue accidental. Los reyes del imperio griego fueron sabios y continuaron el plan de Alejandro de constituir un centro cultural en Alejandría. Ptolomeo Soter, que reino del 323 a.C. al 285 a.C., sus inmediatos sucesores, Ptolomeo II, llamado Filadelfo, que reino del 285 a.C. al 247 a.C., y Ptolomeo Euergetes, que lo hizo del 247 a.C. al 222 a.C. estaban muy bien enterados de la importancia cultural de las grandes escuelas griegas tales como las de Pitágoras, Platón y Aristóteles. Estos gobernantes llevaron a Alejandría estudiosos de todos los centros de cultura existentes y los mantuvieron mediante ayudas estatales. Alrededor del año 290 a.C., Ptolomeo Soter construyo un centro en el cual sabios estudiarían y enseñarían. Este edificio, dedicado a las musas, fue conocido como el Museo y albergo a poetas, filósofos, filólogos, astrónomos, geógrafos, médicos, historiadores, artistas y la mayoría de los matemáticos famosos de la civilización greco-alejandrina.

Junto al Museo, Ptolomeo construyo una biblioteca, no solo para la conservación de documentos importantes sino también para uso de todo tipo de publico. Esta famosa biblioteca llegó a tener 750.000 volúmenes a un tiempo, e incluía las bibliotecas personales de Aristóteles y de su sucesor Teofrasto. Los libros, casualmente, eran mas fáciles de obtener en Alejandría que en la Grecia clásica debido a que el papiro egipcio estaba mas a mano. De hecho, Alejandría se convirtió en el centro de fabricación de libros del mundo antiguo.

Los Ptolomeos continuaron también el plan de Alejandro de fomentar una fusión entre los pueblos, por lo que griegos, persas, judíos, etíopes, árabes, romanos, hindúes y negros se desplazaron a Alejandría sin encontrar obstáculos y se confundieron libremente en la ciudad. Aristócratas, ciudadanos y esclavos convivieron entre si y, de hecho, las distinciones clase de la vieja civilización griega desaparecieron. La civilización de Egipto recibió la influencia de los conocimientos que llevaron los mercaderes y las expediciones especiales organizadas por los sabios para aprender mas cosas acerca de otras partes del mundo. En consecuencia, los horizontes intelectuales se ensancharon. Los largos viajes por mar de los alejandrinos necesitaban un mejor conocimiento de la geografía, de los métodos de medición del tiempo y de las técnicas de navegación, mientras que la competencia comercial genero el interés por los materiales, por el rendimiento de la producción y por el perfeccionamiento de los especialistas. Artes que habían sido despreciadas en el periodo clásico renacieron con nuevos bríos y se crearon escuelas de perfeccionamiento. La ciencia pura continuo cultivándose, pero también hizo su aparición la ciencia aplicada.

Los aparatos mecánicos creados por los alejandrinos resultan sorprendentes incluso para criterios modernos: bombas para elevar agua desde pozos y cisternas, poleas mecánicas, cuñas, poleas marinas, sistemas de engranajes, y un cuentamillas en absoluto diferente a los que se pueden encontrar en un coche moderno se usaban de manera habitual. La fuerza del vapor se empleaba para conducir un vehículo a lo largo de las calles de la ciudad durante la procesión religiosa anual. El agua o el aire calentados mediante el fuego en vasijas ocultas en los altares del templo se utilizaban para fabricar estatuas móviles. El publico observaba atónito como los dioses levantaban sus manos para bendecir a los fieles, dioses derramando lágrimas y estatuas lanzando bocanadas de agua. La fuerza del agua accionaba un órgano musical y trazaba figuras automáticamente en una fuente mientras el aire comprimido se usaba para hacer funcionar un cañón. Con objeto de mejorar las mediciones astronómicas se inventaron nuevos instrumentos mecánicos, incluido un reloj de sol muy perfeccionado.

Los alejandrinos tenían un conocimiento muy avanzado de fenómenos tales como el sonido y la luz. Conocían la ley de la reflexión y tenían un conocimiento empírico de la ley de la refracción, conocimientos que aplicaron a la construcción de espejos y lentes. Durante este periodo tubo lugar la aparición por primera vez de un trabajo de metalurgia, que llevaba consigo una carga mucho mayor de química que los pocos hechos que conocían los antiguos sabios egipcios y griegos. Los venenos fueron una especialidad. La medicina floreció, debido en parte a que la disección del cuerpo humano, prohibida en la Grecia antigua, estaba permitida ahora, y el arte de la curación alcanzó su cumbre con la obra de Galeno (129-c.201 a.C.), quien, no obstante, vivió principalmente en Pérgamo y Roma. La hidrostática, la ciencia del equilibrio de los cuerpos sumergidos en fluidos fue investigada con intensidad y naturalmente, fundamentada de manera sistemática. El mayor de sus logros científicos fue la primera teoría astronómica verdaderamente cuantitativa.

4.1.2 .- EL CARÁCTER DE LA MATEMATICA GRECO-ALEJANDRINA.

El trabajo de los sabios en el Museo estaba dividido en cuatro secciones: literatura, matemática, astronomía y medicina. Puesto que dos de ellas eran esencialmente matemáticas y la medicina, a través de la astrología, precisa de algunas matemáticas, vemos que estas ocupaban un lugar preponderante el mundo alejandrino. Las características de la matemática estuvieron muy influenciadas por la nueva civilización y cultura. Pese a lo que puedan decir los matemáticos de la pureza de sus temas y su indiferencia en lo que se refiere a la nueva civilización helenística produjo una matemática de características completamente diferentes de la del periodo clásico.

Naturalmente, Euclides y Apolonio fueron alejandrinos; pero como ya se ha observado, Euclides organizó el trabajo del periodo clásico, y Apolonio es excepcional, ya que también organizo y extendió la matemática griega clásica – pese a que en su astronomía y sus trabajos sobre los números irracionales estuvo influido a veces por la cultura alejandrina. Con toda seguridad, los restantes grandes matemáticos alejandrinos, como Arquímedes, Eratóstenes, Hiparco, Nicomedes, Herón, Menelao, Ptolomeo, Diofanto y Pappus desplegaron el genio griego para la matemática teórica y abstracta, pero con notables diferencias. La geometría alejandrina se dedicaba principalmente a la obtención de resultados útiles para el calculo de longitudes, áreas y volúmenes. Ciertamente, algunos de estos teoremas aparecen también en los *Elementos* de Euclides. Por ejemplo, la proposición 10 del libro XII señala que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene su misma base e igual altura. Por tanto, si se conoce el volumen de un cilindro se puede saber el de un cono. Sin embargo, tales teoremas son relativamente escasos en Euclides, mientras que ocupaban la mayor parte de la atención de los geómetras alejandrinos. Así, mientras Euclides se contentaba con probar que la razón de las áreas de dos círculos es igual a la de los cuadrados de sus diámetros respectivos (lo que nos permite saber que el área es $A=k \cdot d^2$,pero sin un valor definido de k) Arquímedes obtuvo una aproximación muy exacta del numero π, con lo que se podían calcular las áreas circulares.

Además, los griegos clásicos, debido a que no tomaban en consideración los números irracionales, produjeron una geometría estrictamente cualitativa. Los alejandrinos, de acuerdo con la practica de los babilonios, no dudaron en usar los irracionales y asignar libremente números a longitudes, áreas y volúmenes. La culminación de estos trabajos fue el desarrollo de la trigonometría.

Incluso mas significativo fue el hecho de que los alejandrinos resucitaron y extendieron la aritmética y el álgebra, que se convirtieron en temas de pleno derecho. Este desarrollo de la ciencia de los números era, por supuesto, imprescindible si se pretendía obtener un conocimiento cuantitativo tanto de los resultados geométricos como del uso directo del álgebra.

Los matemáticos alejandrinos tomaron parte activa en trabajos de mecánica. Calculaban centros de gravedad de cuerpos de distintas formas; trabajaban con fuerzas, planos inclinados, poleas y engranajes, y a menudo se convertían en inventores. Eran también los principales contribuidores de su época en trabajos sobre la luz, geografía matemática y astronomía.

En el periodo clásico la matemática abarcaba la aritmética (solo en los números enteros), la geometría, la música y la astronomía. El panorama de la matemática sufrió una gran expansión en el periodo alejandrino. Proclo, que importo material procedente de Gémino de Rodas (siglo I a.C.) cita la ultima división de las matemáticas (seguramente en la época de Gémino): aritmética (nuestra teoría de números), geometría, mecánica, astronomía, óptica, geodesia, canon (ciencia de la armonía musical) y logística (aritmética aplicada). De acuerdo con Proclo, Gémino dice: <<la totalidad de la matemática estaba dividida en dos grandes apartados con las siguientes distinciones: una parte relativa a los conceptos intelectuales propios y otra a los conceptos materiales.>>La aritmética y la geometría eran intelectuales, la parte restante era material. No obstante, esta distinción fue disminuyendo progresivamente, pero a finales del siglo I a.C. todavía era significativa. Se puede decir, en una generalización poco rigurosa, que las matemáticas del periodo alejandrino cortaron su relación con la filosofía y se aliaron con la ingeniería.

Veremos en primer lugar los trabajos alejandrinos sobre la geometría y trigonometría. En el capitulo siguiente discutiremos la aritmética y el álgebra.

4.2.- GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA.

4.2.1.- AREAS Y VOLUMENES EN LOS TRABAJOS DE ARQUIMEDES.

No hay ninguna persona cuyos trabajos sinteticen el carácter de la edad alejandrina tan bien como Arquímedes (287-212 a.C.), el mayor matemático de la antigüedad. Hijo de un astrónomo, había nacido en Siracusa, un asentamiento griego en Sicilia. En su juventud fue a Alejandría, donde recibió su educación. Pese a que regreso a Siracusa y paso allí el resto de su vida, estuvo en contacto con Alejandría. Era muy conocido en el mundo griego y fue muy admirado y respetado por sus contemporáneos.

Arquímedes estaba en posesión de una inteligencia sublime, una gran amplitud de intereses (tanto prácticos como teóricos) y una excelente habilidad mecánica. Sus trabajos en matemáticas incluyeron el calculo de áreas y volúmenes por el método de aproximaciones sucesivas, el calculo del numero π (en el transcurso del cual aproximo raíces cuadradas de números grandes y pequeños), y un sistema nuevo para representar números grandes en el lenguaje oral. En mecánica calculo los centros de gravedad de varias figuras planas y sólidas y dio teoremas sobre la palanca. La parte de la hidrostática que trata del equilibrio de los cuerpos que flotan en el agua fue creada por él. También tiene fama de haber sido un buen astrónomo.

Sus descubrimientos rebasaron en tal medida la técnica de su tiempo que a su alrededor surgieron un sinfín de historias y leyendas. En realidad, en la estima popular sus inventos oscurecieron sus matemáticas, pese a que puede situarse con Newton y Gauss como uno de los tres mas grandes en este campo. En su juventud construyo un planetario, un mecanismo que funcionaba gracias a la potencia del agua y que reproducía los movimientos del Sol, la Luna y los planetas. Ideo una bomba (la hélice de Arquímedes) para elevar agua desde un río; mostró como usar la palanca para mover grandes pesos; utilizo poleas compuestas para botar una galera para el rey Hierón de Siracusa, e invento ingenios militares y catapultas para proteger Siracusa cuando fue atacada por los romanos. Aprovechando las propiedades focales de un espejo en forma de paraboloide, incendio las naves romanas que sitiaban Siracusa concentrando sobre ellas los rayos solares.

Seguramente la historia mas famosa sobre Arquímedes sea su descubrimiento del método para determinar la falsificación de una corona de oro. El rey de Siracusa había encargado la corona. Cuando se la entregaron sospecho que en su interior no habían colocado metales nobles y la hizo llegar a Arquímedes para que encontrara algún procedimiento que permitiera determinar su contenido sin que, por supuesto, hubiera que destruir la pieza. Arquímedes se planteó el problema; un día, mientras se estaba bañando observo que su cuerpo sufría un empuje hacia arriba producido por el agua y de repente comprendió el principio que le iba a permitir dar una solución al problema. Estaba tan excitado por su descubrimiento que iba dando saltos por la calle gritando ¡ *Eureka* ! (¡ *lo he encontrado* !). Había descubierto que un cuerpo sumergido en el agua sufre un empuje vertical hacia arriba con una fuerza igual al peso del agua desalojada, y mediante este principio fue capaz de determinar la composición de la corona.

Pese a que Arquímedes era notablemente ingenioso y un inventor de fama, Plutarco dice que estos inventos no eran mas que la diversión del geómetra. Según Plutarco, Arquímedes estaba en posesión de un espíritu tan alto, un alma tan profunda y una riqueza tal de conocimientos científicos que, a pesar de que estos inventos le habían proporcionado la celebridad de tener mas que sabiduría humana, no dejaría tras él ningún trabajo escrito sobre tales cuestiones, sino que, considerando como innobles y viles los trabajos mecánicos y todo tipo de arte que se puede usar y aprovechar directamente, centro su mayor ambición en aquellas especulaciones cuya belleza y sutileza no añaden nada a las necesidades habituales de la vida. Sin embargo, la importancia de Plutarco como relator de historias es mucho mayor que como historiador. Arquímedes escribió libros sobre mecánica entre los que tenemos el que se titula *Sobre la flotación de los cuerpos* y otro, *Sobre el equilibrio de planos;* otros dos, *Sobre palancas* y *Sobre centros de gravedad* se han perdido. Escribió también un trabajo sobre óptica que ha desaparecido y trataba de sus descubrimientos; aunque el trabajo se ha perdido se sabe con certeza que escribió *Sobre la estructrura de la esfera,* que describe un invento que muestra los movimientos del Sol, la Luna y los cinco planetas alrededor de la tierra (fija).

La muerte de Arquímedes fue un presagio de lo que iba a suceder en todo el mundo griego. El año 216 a.C. Siracusa se alío con Cartago en la segunda guerra Púnica entre esa ciudad y Roma. Los romanos atacaron Siracusa en el año 212 a.C. Mientras estaba dibujando figuras matemáticas en al arena, uno de los soldados romanos que acababa de tomar la ciudad dio el alto a Arquímedes. El caso es que Arquímedes sintió confuso aunque se hizo el sordo ante el aviso del soldado romano. Tras esto, el soldado le mató, a pesar de la orden del comandante romano, Marcelo, de que se le respetase la vida. Tenia entonces setenta y cinco años y estaba todavía en perfecta posesión de todas sus facultades. A modo de "compensacion", los romanos construyeron una tumba muy historiada sobre la cual escribieron un famoso teorema arquimediano.

Los escritos de Arquímedes toman la forma de pequeños tratados en vez de grandes libros. Nuestro conocimiento de estos trabajos viene de manuscritos griegos existentes y de los manuscritos latinos traducidos del griego del siglo XIII en adelante. Alguna de las versiones latinas se hicieron a partir de manuscritos griegos asequibles a los traductores, pero no para nosotros. En 1543 Tartaglia hizo una traducción al latín de alguno de los trabajos de Arquímedes.

Los trabajos geométricos de Arquímedes representan el cenit de la matemática greco-alejandrina. En sus razonamientos matemáticos, Arquímedes usa teoremas de Euclides y

Aristeo, así como otros resultados que él dice que son evidentes, es decir, pueden probarse fácilmente a partir de resultados conocidos. Sus demostraciones están perfectamente razonadas pero no resultan fáciles para nosotros ya que no estamos familiarizados con muchos de los métodos y resultados de los geómetras griegos.

En su trabajo *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes comienza con definiciones e hipótesis. La primera hipótesis o axioma es que de entre todas las líneas (curvas) que tienen los mismos extremos la línea mas corta es la recta. Otros axiomas se refieren a longitudes de curvas cóncavas y superficies. Por ejemplo, ADB se supone que es menor que ACB. Estos axiomas conducen a Arquímedes a comparar perímetros de polígonos inscritos y circunscritos con el perímetro del circulo.

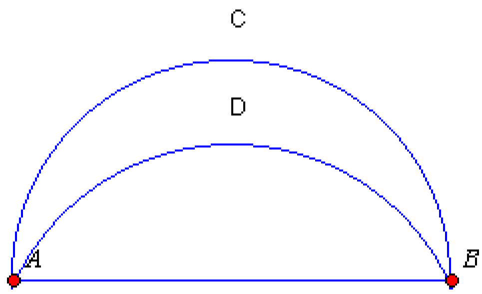


Figura 4.1

Después de algunas proposiciones preliminares, en el libro I prueba:

- *Proposición 13*. La superficie de cualquier cilindro circular recto sin incluir las bases es igual a [el área de] un circulo cuya base es media proporcional entre el lado [una generatriz] y el diámetro de su base.

Esto viene seguido de varios teoremas relativos al volumen de conos. De gran interés son:

- *Proposición* 33. La superficie de cualquier esfera es cuatro veces el [área de] uno de sus círculos máximos.

• *Corolario a la proposición 34.* Todo cilindro cuya base es un círculo máximo de una esfera y cuya altura es igual al diámetro de la esfera es 3/2 de [el volumen de] la esfera, y su superficie junto con sus bases es 3/2 de la superficie de la esfera.

Es decir, compara el área de la superficie y el volumen de una esfera con un cilindro circunscrito en la misma. Este es el famoso teorema que, de acuerdo con los deseos de Arquímedes, se inscribió sobre su lapida.

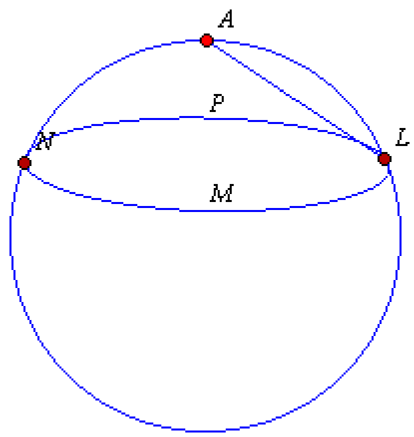


Figura 4.2

Prueba después en las proposiciones 42 y 43 que la superficie del segmento esférico ALMNP es el área de un circulo cuyo radio es AL. El segmento puede ser mayor o menor que una semiesfera.

El teorema del área de la superficie y el volumen se prueba por el método de las aproximaciones sucesivas. Arquímedes utiliza figuras rectilíneas inscritas y circunscritas para " agotar" el área o el volumen y entonces, igual que Euclides, usa el método indirecto de demostración para completar el argumento.

Algunos teoremas del segundo libro de *Sobre la Esfera y el Cilindro* que se refieren sobre todo a segmentos esféricos son significativos, pues contienen una nueva álgebra geométrica. Por ejemplo, enuncia:

• *Proposición 4.* Cortar una esfera con un plano de manera que los volúmenes de los segmentos obtenidos estén en una razón dada.

Este problema lleva lógicamente a la resolución de la ecuación cubica:

$$(a-x) : c = b^2 : x^2$$

y Arquímedes la resuelve geométricamente hallando la intersección de una parábola y una hipérbola rectangular.

El trabajo *Sobre Conoides y Esferoides* estudia propiedades de figuras de revolución generadas por cónicas. El conoide de ángulo recto de Arquímedes es un paraboloide de revolución. (en tiempos de Arquímedes se consideraba todavía la parábola como una sección de un cono de ángulo recto.) El conoide de ángulo obtuso es una rama de un hiperboloide de revolución. Los esferoides de Arquímedes son lo que llamamos esferoides achatado y oblongo, que son figuras de revolución generadas por elipses. El objetivo principal del trabajo es la determinación de volúmenes de segmentos obtenidos al cortar cuerpos tridimensionales con planos. El libro contiene también algún trabajo de Arquímedes acerca de las secciones cónicas, ya citado al hablar de Apolonio. Como en otros trabajos, presupone teoremas que considera probados con facilidad o que pueden probarse con procedimientos usados con anterioridad. Varias de las demostraciones utilizan el método de las aproximaciones sucesivas. Algunos ejemplos de los contenidos pueden hallarse en las siguientes proposiciones:

- *Proposición 5.* Si AA´y BB´ son los ejes mayor y menor de una elipse y si d es el diámetro de cualquier circulo, el área de la elipse es el área del circulo como AA´ · BB´ es a d^2.

El teorema dice que si 2 a es el eje mayor y 2b, el eje menor y s y s' son las áreas de la elipse y el circulo respectivamente, entonces $s/s' = 4ab/d^2$, ya que $s' = (\pi/4)d^2$; $s = \pi ab$.

- *Proposición 7.* Dadas una elipse de centro C y una línea CO perpendicular al plano de la elipse es posible encontrar un cono circular de vértice O de manera que la elipse es una sección del mismo.

Claramente, Arquímedes da por cierto que algunas, al menos, de las distintas secciones cónicas pueden obtenerse de un mismo cono, hecho utilizado ya por Apolonio.

- *Proposición 11.* Si un paraboloide de revolución se corta por un plano que contiene al eje [de revolución], o es paralelo al mismo, la sección será una parábola igual a la parábola original que genera el paraboloide... Si se corta el paraboloide por un plano perpendicular a su eje la sección será un circulo cuyo centro esta en el eje.

Hay resultados análogos para el hiperboloide y el esferoide.

Entre los resultados principales del trabajo esta la

- *Proposición 21.* [El volumen de] cualquier segmento de un paraboloide de revolución es igual a la mitad del cono o segmento de un cono que tiene la misma base y el mismo eje.

La base es el área (figura 4.3) de la figura plana, elipse o circulo, que se obtiene cortando el paraboloide por el plano que determina el segmento. La sección parabólica BAC y BC en la base son cortes mediante un plano que contiene al eje del paraboloide y es perpendicular al plano original. EF es la tangente a la parábola y por tanto, paralela a BC, y A es el punto de tangencia. AD, dibujado paralelo al eje del paraboloide, es el eje del segmento. Se puede demostrar que D es el punto medio de CB. Asimismo, si la base es una elipse, entonces CB es su eje mayor; si la base es un circulo, entonces CB es su diámetro. El cono tiene la misma base que el segmento, vértice A y eje AD.

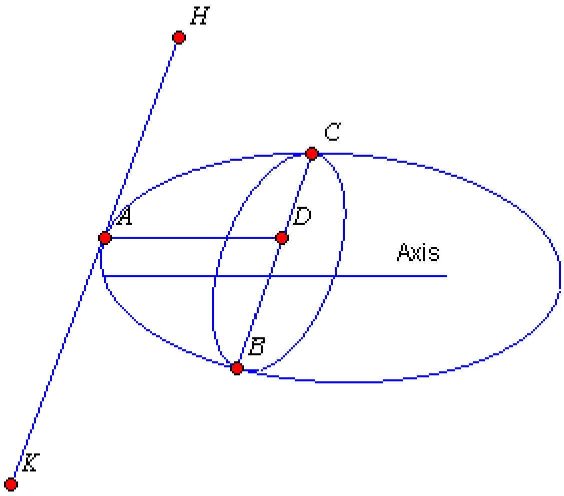


Figura 4.3

• *Proposición 24.* Si a partir de un paraboloide de revolución se obtienen dos segmentos al cortar por dos planos cualesquiera, los volúmenes de los segmentos estarían en la misma razón que los cuadrados de los ejes respectivos.

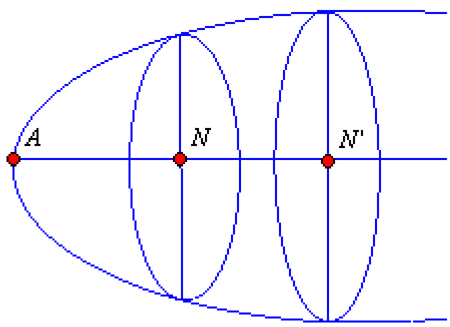


Figura 4.4

Para ilustrar el teorema, supongamos que los planos son perpendiculares al eje del paraboloide (figura 4.4); entonces los dos volúmenes son uno al otro como AN^2 es a AN'^2. Hay teoremas semejantes para segmentos de hiperbolides y esferoides.

Uno de los trabajos mas novedosos de Arquímedes es un corto tratado conocido como *El Método*, en el cual muestra como uso ideas procedentes de la mecánica para obtener teoremas

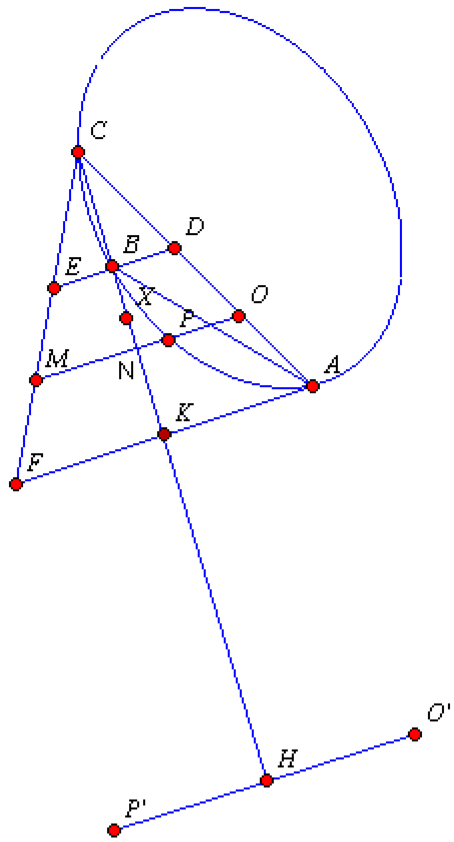


Figura 4.5

matemáticos correctos. Este trabajo no fue descubierto hasta el año 1906 en una biblioteca de Constantinopla. El manuscrito esta escrito durante el siglo X en un pergamino que contiene otros trabajos de Arquímedes ya conocidos por otros caminos. Arquímedes ilustra su método de descubrimiento con el problema de encontrar el área de un segmento parabólico CAB (figura 4.5). En el argumento, básicamente físico, usa teoremas sobre centros de gravedad ya establecidos por él.

ABC (figura 4.5) es un segmento arbitrario de una parábola limitado por un por la línea recta AB y el arco ABC. Sean CE, la tangente a la parábola en C; D, el punto medio de CA, y DBE el diámetro que contiene a D (línea paralela al eje de la parábola). Entonces Arquímedes afirma, tomando como referencia las *Cónicas* de Euclides, que:

$$EB = BD, \qquad (1)$$

A pesar de que no se conoce la demostración de Euclides de este hecho. Se trata ahora el segmento AF paralelo a ED y sea K el punto de intersección de CB con AF. Determinamos el punto H en CK de manera que CK = KH y además, sea MNPO un diámetro arbitrario de la parábola. Se tiene ahora, en virtud de (1) y el uso de triángulos semejantes, que MN = NO.

Arquímedes compara ahora el área del segmento y el área del triángulo CFA. Contempla la primera área como la suma de segmentos lineales tales como PO y el área del triángulo como la reunión de segmentos tales como MO. Prueba entonces que:

$$HK \cdot OP = KN \cdot MO.$$

Desde el punto de vista físico esto significa que si consideramos KH y KN como los brazos de una palanca con el punto de apoyo en K, entonces OP considerado como un peso situado en H compensaría el peso MO situado en N. En consecuencia, colocando ola suma de todos los segmentos lineales tales como MO, concentrado cada uno de ellos en su punto medio, que es el centro de gravedad de un segmento lineal. Pero la colección de segmentos MO, situado cada uno de ellos en su centro de gravedad, es "equivalente " al triángulo CAF situado en su centro de gravedad. En su libro *Sobre el Equilibrio de Planos*, Arquímedes prueba que este centro es el punto X situado en CK con KX = (1/3)CK. Por la ley de la palanca, KX x (área del triángulo CFA) = HK x (área del segmento parabólico), o bien:

$$\frac{trianguloC\ FA}{segmentoCB\ A} = \frac{HK}{KX} = \frac{3}{1}$$

(2)

Arquímedes deseaba relacionar el área del segmento con la del triángulo ABC. Concluye que (el área de) este triángulo es igual a la mitad de la del triángulo CKA puesto que ambos tienen la misma base CA y la altura de uno es la mitad de la altura del otro, como puede comprobarse con facilidad. Además, el triángulo CAK tiene un área igual a la mitad de la del triángulo CFA (ya que KA es la mitad del segmento FA). Luego el triángulo ABC tiene área igual a un cuarto del triángulo CFA y por (2), se obtiene que el área del segmento ABC es al área del triángulo ABC como 4 es a 3.

En este método mecánico Arquímedes toma las áreas del segmento parabólico y del triángulo CFA como sumas de cantidades infinitas de segmentos lineales. Este método, en su opinión, lo es de descubrimiento, pero no de demostración geométrica rigurosa. Prueba en este tratado que el uso de este procedimiento resulta eficaz a la hora de descubrir nuevos teoremas sobre esferas, cilindros, esferoides y paraboloides de revolución.

En su libro *Cuadratura de la parábola,* Arquímedes da dos métodos para hallar el área de un segmento parabólico. El primero de ellos es semejante al argumento mecánico que se acaba de examinar y en el que de nuevo se compensan áreas mediante el principio de la palanca, pero su elección de las áreas es diferente. Su conclusión, naturalmente, coincide con (2) y se da en la proposición 16. Ahora, Arquímedes sabe el resultado que quiere probar y se dispone a hacerlo con rigor matemático a través de una sucesión de teoremas (proposiciones 18-24).

El primer paso es probar que el segmento parabólico puede "agotarse" mediante una serie de triángulos. Sea QPq (figura 4.6) el segmento parabólico y sea PV el diámetro que corta en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas a la base Qq. Es intuitivamente claro, y se demuestra en la proposición 18, que la tangente en P es paralela a Qq. A continuación se toman QR y qS paralelos a PV y entonces el triángulo QPq es la mitad del paralelogramo QRSq, y así el triángulo QPq es mayor que la mitad del segmento parabólico.

Como corolario de este resultado, Arquímedes demuestra que el segmento parabólico se puede aproximar mediante un polígono tan cercano al mismo como se quiera, pues al construir un triángulo en el segmento limitado por PQ (figura 4.7), en el que P_1V_1 es el diámetro de ese segmento, se puede probar por métodos elementales de geometría (proposición 21) que (el área de) el triángulo $PP_1'q$, construido sobre Pq y que tiene las mismas propiedades que el que el triángulo PP_1Q, suman juntos ¼ del triángulo PQq; además, en virtud del resultado del párrafo anterior, los dos triángulos menores cubren mas de la mitad de cada uno de los segmentos parabólicos en los que están situados. El proceso de construir triángulos sobre las nuevas cuerdas QP_1, P_1P, PP_1' y $P_1'q$ puede continuarse. Esta parte de la demostración es completamente análoga a la parte correspondiente en el teorema de Euclides sobre las áreas de dos círculos.

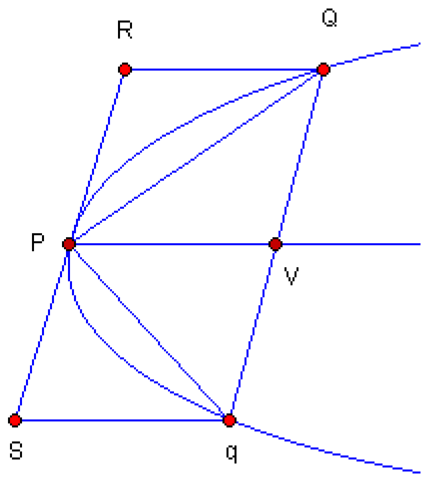


Figura 4.6

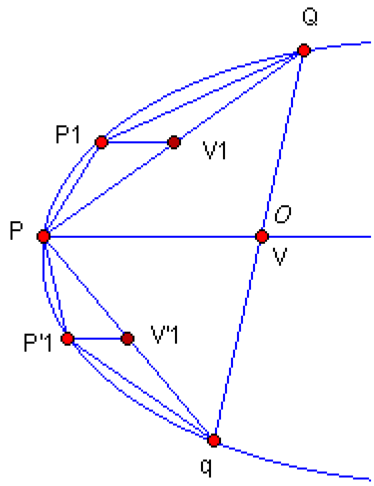


Figura 4.7

Así pues, tenemos condiciones suficientes para aplicar la proposición 1 del libro X de los *Elementos* de Euclides; es decir, podemos afirmar que el área de la figura poligonal obtenida al añadir triángulos al triángulo original PQq, es decir, el área con una cantidad finita de términos se aproxima al segmento parabólico tanto como se quiera; esto es, la diferencia entre el área del segmento y la suma finita (3) puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada previamente.

$$\Delta PQq + (1/4)\,\Delta PQq + (1/16)\,\Delta PQq + \ldots \qquad (3)$$

Arquímedes aplica ahora el método indirecto de demostración, que completa la prueba por el procedimiento de aproximaciones sucesivas. Demuestran en primer lugar que dados “n” términos de un progresión geométrica cuya razón es ¼, se tiene:

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n + (1/3)A_n = (4/3)\,A_1 \qquad (4)$$

Esto puede probarse con facilidad de varias maneras; se puede hacer con nuestra formula para la suma de “n” términos de una progresión geométrica. En la aplicación de (4), A_1, es el triángulo PQq.

Prueba entonces Arquímedes que el área A del segmento parabólico no puede ser ni mayor ni menor que (4/3) A_1. Su demostración consiste simplemente en que si el área A es mayor que (4/3) A_1 obtendría un conjunto (finito) de triángulos cuya suma S diferiría del área del segmento una cantidad menor que cualquier magnitud dada, por lo que la suma S seria mayor que (4/3) A_1. Así,

$$A > S > (4/3)\,A_1$$

Pero por (4) si S contiene “m” términos, entonces:

$$S + (1/3)\,A_m = (4/3)\,A_1$$

O bien:

$$S < (4/3)\,A_1$$

lo que es contradictorio.

Análogamente supongamos que el área A del segmento parabólico es menor que (4/3) $A_1 - A$ es un numero positivo. Como los triángulos trazados por Arquímedes son cada vez mas pequeños, podemos obtener una sucesión de triángulos inscritos tales que:

$$(4/3)\, A_1 - A > A_m \qquad (5)$$

donde A_m es el termino m-esimo de la sucesión y representa geométricamente la suma de 2^{m-1} triángulos. Pero como consecuencia de (4):

$$A_1 + A_2 + ... + A_m + 1/3\, A_m = 4/3\, A_1 \qquad (6)$$

Entonces:

$$4/3\, A_1 - (A_1 + A_2 + ... + A_m) = 1/3\, A_m$$

O bien:

$$4/3\, A_1 - (A_1 + A_2 + ... + A_m) < A_m \qquad (7)$$

Se sigue de (5) y (7) que:

$$A_1 + A_2 + ... + A_m > A$$

Pero toda suma formada por triángulos inscritos es siempre menor que el área del segmento. Luego (8) es imposible.

Evidentemente, Arquímedes había sumado una progresión geométrica infinita, ya que cuando “n” tiende a infinito en (4), A_n tiende a cero, y la suma de la progresión infinita es (4/3) A_1.

Los trabajos de Arquímedes sobre los métodos mecánico y matemático de calculo del área de un segmento parabólico ponen de manifiesto como distinguía con claridad entre los razonamientos físico y matemático. Su rigor es muy superior al que se puede encontrar en los trabajos de Newton y Leibniz.

En el trabajo *Sobre Espirales*, Arquímedes define la espiral como sigue: imaginemos que una línea (rayo) gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo permaneciendo siempre en un mismo plano, y un punto que, comenzando por el extremo fijo , se mueve a lo largo de la línea con velocidad constante; entonces el punto describirá una espiral. En nuestras coordenadas polares la ecuación de la espiral es $\varsigma = a\theta$.

Da la sensación de que, tras un estudio de sus trabajos geométricos, Arquímedes se dedica exclusivamente en este campo a la obtención de resultados útiles sobre áreas y volúmenes. Estos trabajos, y sus trabajos matemáticos en general, no son espectaculares en cuanto a conclusiones, ni especialmente nuevos en cuanto a métodos o temas, pero aborda problemas muy difíciles y originales. Dice a menudo que las sugerencias de los problemas vienen de la lectura de los trabajos de sus predecesores; por ejemplo, los trabajos de Eudoxo sobre la pirámide, el cono y el cilindro (que aparecen en los *Elementos* de Euclides) sugirieron a Arquímedes su trabajo sobre la esfera y el cilindro, y la cuestión de la cuadratura del segmento parabólico. El trabajo de Arquímedes sobre hidrostática, no obstante, es completamente innovador; y sus trabajos sobre mecánica son nuevos en tanto que da demostraciones matemáticas. Su escritura es elegante, ordenada , acabada y a punto.

4.2.2.- AREAS Y VOLUMENES EN LOS TRABAJOS DE HERON.

Herón, que vivió en algún momento entre los años 100 a.C. y 100 d.C., es de gran interés no solo desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, sino también para mostrar las características del periodo alejandrino. Proclo se refiere a Herón como *mecánico,* lo que podría significar un ingeniero mecánico de hoy y hable de él en conexión con Ctesibio, su maestro. Herón fue también un gran agrimensor.

Lo que más llama la atención de los trabajos de Herón es su mezcla de rigor matemático y lo aproximado de los métodos y formulas de los egipcios. Por otra parte, escribió un comentario sobre Euclides, uso los resultados precisos de Arquímedes (a los que se refiere con frecuencia), y en trabajos originales probo algunos teoremas nuevos de la geometría euclidea. Por otra parte, de dedicó a la geometría aplicada y la mecánica y dio todo tipo de resultados aproximados sin justificación. Uso formulas egipcias con libertad y gran parte de su geometría fue también egipcia en cuanto a su carácter.

En sus *Métrica* y *Geometría,* que han llegado hasta nosotros solamente a través de un libro que trata sobre su trabajo, Herón da teoremas y reglas para áreas planas, áreas se superficies y volúmenes de gran número de figuras. Los teoremas de estos libros no son nuevos. Para figuras con bordes curvilíneos utiliza los resultados de Arquímedes. Además, escribió de *Geodesia* y *Esteorometria* (cálculo de volúmenes de figuras), los cuales se refieren a las mismas cuestiones de los dos primeros libros. En todos estos trabajos esta interesado en resultados numéricos.

En su *Dioptra* (teodolito), un tratado de geodesia, Herón muestra como calcular la distancia entre dos puntos de los que solo uno es accesible y entre dos puntos visibles que no son accesibles. Muestra también como trazar una perpendicular desde un punto a una línea que no se puede alcanzar y como hallar el área de un campo sin entrar en él. La formula para el área de un triángulo, atribuida a él pese a ser debida a Arquímedes, es decir:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde *a,b* y *c* son los lados y *s* el semiperímetro, ilustra las ideas mencionadas con anterioridad. Esta formula aparece en la *Geodesia*, y la formula con una demostración está tanto en la *Dioptra* como en la *Métrica*. En la *Dioptra* muestra como excavar un túnel recto bajo una montaña trabajando simultáneamente desde ambos extremos.

Aunque algunas de sus formulas están demostradas, Herón da varias sin demostración y otras son aproximadas. Así, da una formula inexacta para el área de un triángulo junto con la anterior correcta. Un motivo por el que Herón da varias fórmulas egipcias puede ser que las formulas exactas precisan raíces cuadradas o cubicas y los agrimensores no ejecutaban tales operaciones. De hecho se distinguían entre geometría pura y geodesia métrica. El calculo de áreas y volúmenes pertenecía a la geodesia y no formaba parte de una educación general; estaba reservado a agrimensores, albañiles, carpinteros y otros técnicos. No hay ninguna duda de que Herón continuo y enriqueció la ciencia egipcia de la medida de campos; sus escritos sobre geodesia fueron utilizados durante varios siglos.

Herón aplico varios de sus teoremas y reglas al diseño de teatros, salas para banquetes y baños. Sus trabajos de aplicación incluyen *Mecánica, La Construcción de Catapultas, Mediciones, El Diseño de armas, Neumática* (la teoría y el uso del aire comprimido), y *Sobre el Arte de la Construcción de Autómatas*. Dio diseños para relojes de agua, instrumentos de medida, maquinas automáticas, maquinas elevadoras de pesos e ingenios de guerra.

4.2.3.- ALGUNAS CURVAS EXCEPCIONALES.

Pese a que los griegos clásicos introdujeron y estudiaron algunas curvas poco corrientes, como las cuadratices, la máxima atención de esa geometría estuvo dedicada a figuras que podían dibujarse con regla y compás y relego a aquellas curvas al olvido. Los alejandrinos, sin embargo, se sintieron liberados de tal restricción; así Arquímedes no dudo en introducir la espiral. Varias curvas mas fueron introducidas durante el periodo alejandrino.

Nicomedes (sobre el 200 a.C.) es conocido por su definición de la concoide. Comienza con un punto P y una línea AB; elige entonces una longitud *a* y coloca en todos los rayos que parten de P y cortan AB la longitud *a* partiendo del punto de intersección del rayo con AB, en la dirección que se aleja de P. Los puntos extremos así determinados son los puntos de la concoide.

Si b es la distancia perpendicular de P a AB y si las longitudes a se miden a lo largo de los rayos que parten de P, y comenzando en AB pero en la dirección de P, obtenemos otras tres curvas según sea $a>b$, $a=b$ o $a<b$. Luego hay cuatro tipos de concoides, todas ellas debidas a Nicomedes. La ecuación polar moderna es $r=a+b \sec \theta$. Nicomedes usó la curva para trisecar un ángulo y duplicar el cubo.

Se atribuye a Nicomedes el invento de un mecanismo para construir las concoides. La naturaleza del mecanismo es de mucho menos interés que el hecho de que los matemáticos de la época estuvieran interesados en inventarlo. Las concoides de Nicomedes, junto con la recta y el circulo son las curvas costruibles mas antiguas de las que se posee una información satisfactoria.

Diocles (final del siglo II a.C.), en su libro *Sobre los Espejos Ustorios* resuelve el problema de la duplicación del cubo introduciendo la curva llamada cisoide. La curva se define como: AB y CD son diámetros perpendiculares de un circulo (figura 4.8) y EB y BZ son arcos iguales. Se traza ZH perpendicular a CD y se traza entonces ED. La intersección de ZH y ED determina un punto P de la cisoide. Para Diocles la cisoide es el lugar geométrico de todos los puntos P determinados por todas las posiciones de E sobre el arco BC y Z sobre el arco BD con (arc BE) = (arc BZ). Se demuestra que:

$$CH:HZ = HZ:HD = HD:HP.$$

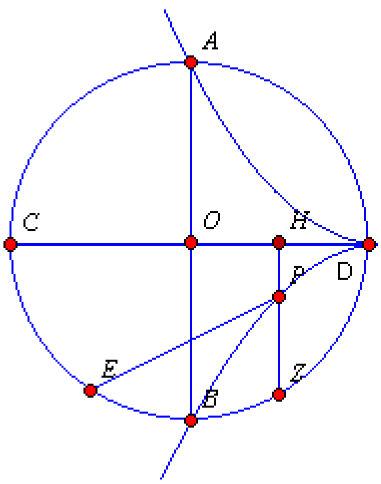


Figura 4.8

Así HZ y HD son dos medias proporcionales entre CH y HP. Esto resuelve el problema de Delos. La ecuación de la cisoide en coordenadas rectangulares es $y^2(a+x) = (a-x)^3$,donde O es el origen; *a* el radio del circulo, y OD y OA los ejes de coordenadas. Esta ecuación incluye las dos ramas de la curva que se muestran en la figura, las cuales no fueron consideradas por Diocles.

4.2.4.- EL NACIMIENTO DE LA TRIGONOMETRIA.

Completamente nueva en la geometría cuantitativa griega alejandrina fue la trigonometría, una creación de Hiparco, Menelao y Ptolomeo. Este trabajo estuvo motivado por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, y seria utilizada para predecir las trayectorias y posiciones de los cuerpos celestes y para ayudar a medir el tiempo, el cálculo del calendario, la navegación y la geografía.

La trigonometría de los griegos alejandrinos es lo que llamamos trigonometría esférica aunque, como se vera, incluye también las ideas básicas de la trigonometría plana. La trigonometría esférica presupone la geometría esférica, como por ejemplo las propiedades de los círculos máximos y los triángulos esféricos, muchas de las cuales ya eran conocidas. Los *Phaenomena*, de Euclides, basados asimismo en un antiguo trabajo, contienen algo de geometría esférica. Muchos de sus teoremas pretendían tratar sobre el movimiento aparente de las estrellas. Teodosio (sobre el 20 a.C.) recopilo los conocimientos aprovechables de entonces en su *Sphericae*, pero su trabajo no era numérico y por tanto no seria de utilidad para abordar el problema fundamental de la astronomía griega, es decir, medir el tiempo durante la noche mediante la observación de estrellas.

El fundador de la trigonometría es Hiparco, que vivió en Rodas y Alejandría y murió alrededor del año 125 a.C. Se conoce muy poco acerca de él. La mayor parte de lo que conocemos proviene de Ptolomeo, que atribuye a Hiparco muchas ideas de trigonometría y astronomía. Le debemos a él varias observaciones astronómicas y descubrimientos, la teoría astronómica con mayor influencia en la antigüedad y trabajos sobre geografía. De todos los trabajos de Hiparco solamente se ha conservado su *Comentario sobre los Phaenomena de Eudoxo y Aratus*.

El método de Hiparco de aproximarse a la trigonometría es el siguiente. La circunferencia de un circulo se divide en 360º, tal como hizo por primera vez Hypsides de Alejandría (sobre el 150 a.C.) en su libro *Sobre la Salida de los Astros* y por los babilonios de los últimos siglos antes de Jesucristo, y un diámetro se divide en 120 partes. Cada parte de la circunferencia y del diámetro se divide a su vez en 60 partes y cada una de ellas en otras 60, conforme al sistema babilónico de fracciones sexagesimales. Entonces, para un arco dado AB de un determinado numero de grados, Hiparco da el numero de unidades en la cuerda correspondiente AB. El método de calculo de estas unidades será descrito en la exposición del trabajo de Ptolomeo, que presenta de forma combinada sus pensamientos y resultados.

El numero de unidades de la cuerda correspondiente a un arco de un determinado numero de grados equivale a la función seno moderna. Si 2 α es el ángulo central del arco AB (figura 4.9), para nosotros sen α = AC/OA, mientras que, en vez de sen α , Hiparco da el numero de unidades en 2AC cuando el radio OA contiene 60 unidades. Por ejemplo, si la cuerda de 2 α es de 40 unidades, para nosotros sen α = 20/60, o, con mas generalidad,

$$\text{Sen } \alpha = 1/60 \cdot 1/2 \text{ cuerda } 2\alpha = 1/120 \text{ cuerda } 2\alpha \qquad (9)$$

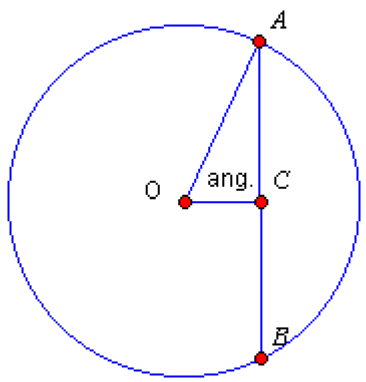


Figura 4.9

La trigonometría griega alcanzó una alta cota con Menelao (sobre 98 d.C.). Su *Sphaerica* es su obra capital, aunque parece ser que también escribió *Cuerdas en un Circulo* en seis libros y un tratado sobre la situación (o levantamiento) de arcos del Zodiaco. Los árabes le atribuyen algunas otras obras.

La *Sphaerica*, existente en versión árabe, esta en tres libros. En el primero, sobre geometría esférica, se encuentra el concepto de triángulo esférico, es decir, la figura formada por tres arcos de círculos máximos sobre una esfera, cada uno de ellos menor que una semicircunferencia. El objetivo del libro es probar teoremas para triángulos esféricos, análogos a los probados por Euclides para los triángulos planos. Así, la suma de dos lados de un triángulo esférico es mayor que el tercer lado y la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos. Lados iguales abarcan ángulos iguales. Entonces Menelao demuestra el teorema, que no tiene análogo en los triángulos planos, según al cual si los ángulos de un triángulo esférico coinciden con los de otro, los dos triángulos son congruentes. Da también otros teoremas de congruencia y teoremas sobre triángulos isósceles.

El segundo libro de la *Sphaerica* de Menelao trata fundamentalmente de astronomía y solo indirectamente se refiere a la geometría esférica. El tercer libro contiene algo de trigonometría esférica y bases para el desarrollo del primer teorema del libro, el cual supone que tenemos un triángulo esférico ABC y algún circulo máximo que corta los lados del triángulo (trazado donde convenga). Para establecer el teorema se usara nuestra moderna noción del seno, pero para Menelao el seno de un arco como AB (o el seno del ángulo central correspondiente en el centro de la esfera) se constituye por la cuerda del arco doble AB. En términos de nuestro seno, el teorema de Menelao afirma que:

$$\text{Sen } P_1A \cdot \text{sen } P_2B \cdot \text{sen } P_3C = \text{sen } P_1C \cdot \text{sen } P_2A \cdot \text{sen } P_3B$$

La demostración de este teorema se apoya sobre el teorema correspondiente para triángulos planos, llamado también teorema de Menelao. Para triángulos planos el teorema establece (figura 4.10) que:

$$P_1A \cdot P_2B \cdot P_3C = P_1C \cdot P_2A \cdot P_3B$$

Menelao no demuestra el teorema plano. Se puede concluir que ya era conocido o tal vez que Menelao lo había probado en un escrito anterior.

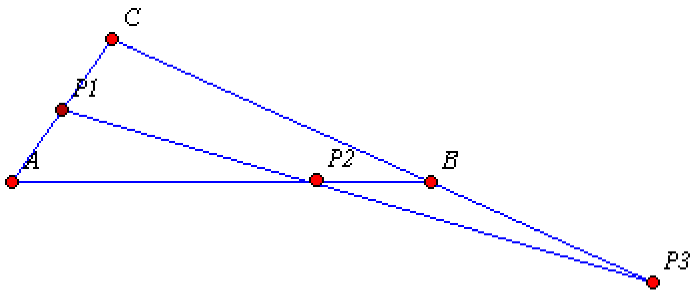


Figura 4.10

El segundo teorema del libro III, con la notación de que el arco *a* se opone al ángulo A en el triángulo ABC, dice que si ABC y A´B´C´ son dos triángulos esféricos y si A = A´ y C = C´ o C es suplementario de C´, entonces:

$$\frac{\text{sen } c}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } c'}{\text{sen } a'}$$

El teorema 5 del libro III utiliza una propiedad de los arcos que era presumiblemente conocida en tiempos de Menelao, que es: si cuatro arcos de círculo máximo parten de un punto O y ABCD y A´B´C´D´ son círculos máximos que cortan a los cuatro, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} AD}{\operatorname{sen} DC} = \frac{\operatorname{sen} BC}{\operatorname{sen} AB} = \frac{\operatorname{sen} A'D'}{\operatorname{sen} D'C'} = \frac{\operatorname{sen} B'C'}{\operatorname{sen} A'B'}$$

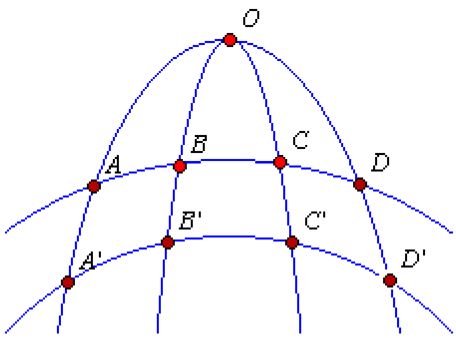


Figura 4.11

Se puede encontrar una expresión correspondiente a cada uno de los dos miembros reformulada bajo el concepto de razón armónica o razón doble en los trabajos de Pappus y en trabajos posteriores de geometría proyectiva. Se deben a Menelao muchos mas teoremas sobre trigonometría esférica.

El desarrollo de la trigonometría griega y sus aplicaciones a la astronomía tuvieron su culminación en los trabajos del egipcio Claudio Ptolomeo (muerto el 168 a.C.), que era miembro de la familia real de matemáticos aunque no era de la casa real de Egipto. Ptolomeo vivió en Alejandría y trabajo en el Museo.

En su *Sintaxis Matemática* o *Colección Matemática* (el trabajo fue titulado por los árabes como *Megale Syntaxis, Megiste* y finalmente *Almagesto*), Ptolomeo continua y completa los trabajos de Hiparco y Menelao en trigonometría y astronomía. La trigonometría y la astronomía están mezcladas en los trece libros del *Almagesto*, si bien el libro I trata con amplitud sobre trigonometría esférica y los restantes se dedican principalmente a la astronomía.

El *Almagesto* de Ptolomeo es esencialmente matemático, salvo en los lugares en que utiliza la física aristotélica para refutar la hipótesis heliocéntrica, sugerida por Aristarco. Afirma que, debido a que solamente el conocimiento matemático, abordado interrogativamente, dará a sus practicantes un conocimiento fiable, había decidido cultivar tanto como le fuera posible esta disciplina teórica. Ptolomeo dice también que desea fundamentar su astronomía " sobre los caminos incontrovertibles de la aritmética y la geometría ".

En el capitulo IX del libro I de Ptolomeo comienza calculando las cuerdas de los arcos de un circulo, con lo que extendía los trabajos de Hiparco y Menelao. Como ya se ha observado, la circunferencia se divide en 360 partes o unidades (no usa la palabra grado) y el diámetro en 120 unidades; propone entonces, dado un arco que contenga un determinado numero de las 360 unidades, encontrar la longitud de la cuerda expresada en términos del numero de unidades que contiene todo el diámetro, es decir, 120 unidades.

Comienza con el calculo de las cuerdas de los arcos de 36º y 72º. En la figura 1 ADC es un diámetro de un circulo con centro en D y BD es perpendicular a ADC. E es el punto medio de DC y F se elige de manera que EF=BE. Ptolomeo demuestra geométricamente que FD coincide con un lado del decágono regular inscrito y BF, con un lado del pentágono regular inscrito. Pero ED contiene 30 unidades y BD, 60 unidades. Como $EB^2 = ED^2+BD^2$, $EB^2 =4500$ y EB=67 4'55" (lo que expresa $67+4/60+55/60^2$). Ahora, EF=EB por lo que podemos conocer EF. Entonces FD=EF-DE=67 4'55"-30=37 4'55". Como FD es igual que el lado del decágono, es la cuerda de un arco de 36º. Luego conocemos la cuerda de este arco. Utilizando FD y el triángulo rectángulo FDB, podemos calcular BF: es igual a 70 32'3". Pero Bf es el lado del pentágono por lo que se tiene la cuerda del arco de 72º.

Naturalmente, para el lado de un hexágono regular, como coincide con el radio, se tiene evidentemente que la cuerda de longitud 60 pertenece al arco de longitud 60. Asimismo, como el lado del cuadrado inscrito se puede calcular de manera inmediata a partir del radio, se tiene la cuerda de 90º, que es 84 51'10". Además, puesto que el lado del triángulo equilátero inscrito puede calcularse también de manera inmediata a partir del radio, se obtiene que la cuerda de 120º es 103 55'23".

Con el uso de un triángulo ABC, sobre el diámetro AC se puede obtener inmediatamente la cuerda del arco suplementario AB si se conoce la cuerda del arco BC. Por tanto, como Ptolomeo conocía la cuerda de 36º podía calcular la de 144º, que resulta ser 114 7'37".

La relación que se ha establecido aquí es equivalente a $\text{sen}^2 A+\cos^2 A=1$, donde A es un ángulo agudo arbitrario. Esto puede verse como sigue: Ptolomeo ha probado que si S es un arco menor de 180º entonces:

$$(\text{ cuerda } S)^2 + [\text{ cuerda } (180-S)]^2 = 120^2$$

Pero por la relación (9) anterior:

$$(\text{ cuerda } S)^2 = 120^2 \text{ sen}^2 \; S/2$$

Luego se tiene

$$120^2 \text{ sen}^2 \text{ S}/2+120^2 \text{ sen}^2 \text{ (180-S)}/2=120^2$$

O bien

$$\text{sen}^2 \text{ S}/2+\text{sen}^2 \text{ [90- (S/2)]}=1$$

Es decir

$$\text{sen}^2 \text{ S}/2+\cos^2 \text{ S}/2=1$$

Ahora Ptolomeo demuestra lo que él llama un lema, pero que se conoce hoy en día como el teorema de Ptolomeo: dado cualquier cuadrilátero inscrito en un circulo (figura 4.12), demuestra que AB · BD= AB · DC + AD · BC. La demostración es inmediata. Toma entonces el cuadrilátero especial ABCD en el que AD es un diámetro (figura 4.13). Supongamos que conocemos AB y AC. Ptolomeo muestra ahora como calcular BC. El segmento BD es la cuerda del arco suplementario de AB, y CD es la cuerda del suplemento del arco AC. Si se aplica el lema, se ve que cinco de las seis longitudes involucradas en él son conocidas, por lo que la sexta, que en este caso es BC, se puede calcular. Pero (arco BC) = (arco AC) – (arco AB). Luego podemos calcular la cuerda de la diferencia de dos arcos cuando se conoce la cuerda de cada uno de ellos. Con la terminología moderna esto significa que si conocemos sen A y sen B podemos calcular sen (A-B). Ptolomeo apunta que, puesto que conoce las cuerdas de 72º y 60º, puede calcular la de 12º.

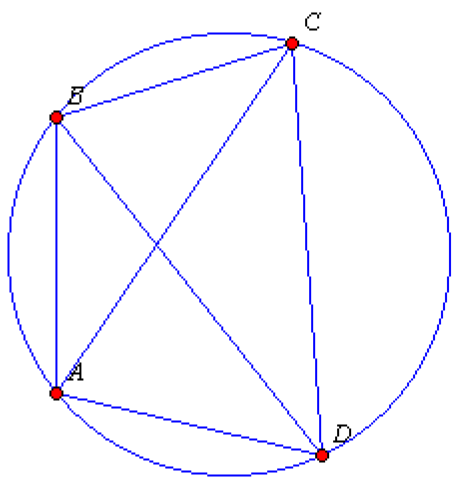


Figura 4.12

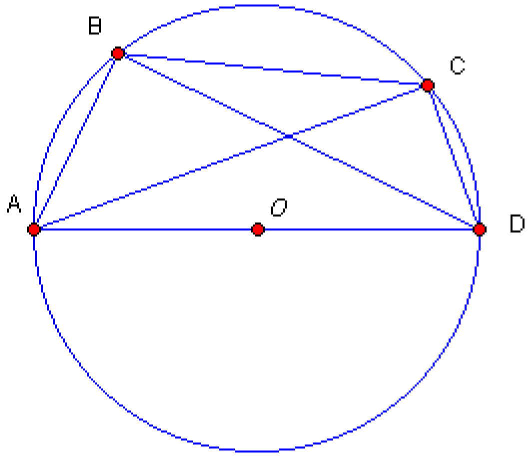


Figura 4.13

Prueba a continuación como, dada un acuerda cualquiera en un circulo, se puede calcular la cuerda del arco mitad de la cuerda dada. En términos modernos esto representa calcular sen A/2 a partir de sen A. Este resultado es potente, como afirma Ptolomeo, ya que podemos comenzar con un arco cuya cuerda es conocida y calcular las cuerdas de sus sucesivas mitades. Prueba también que si se conocen las cuerdas de dos arcos AB y BC se puede calcular la cuerda del arco AC. Esto representa, en nuestro lenguaje actual, la formula de sen (A+B). Como caso particular, se puede determinar, en términos modernos, sen 2A a partir de sen A.

Como Ptolomeo puede calcular la cuerda de 0.75 º a partir de la cuerda de 12º mediante divisiones sucesivas en mitades, puede añadir este arco de 0.75º o restarlo de cualquier arco de cuerda conocida, y en virtud de los teoremas anteriores, puede calcular la cuerda de la suma o la diferencia de dos arcos. Por lo tanto, esta en disposición de obtener las cuerdas de todos los arcos a intervalos de 0.75º. Sin embargo, desea obtener las cuerdas de arcos con saltos de 0.5º, lo que se dispone a hacer recurriendo a razonar con desigualdades. El resultado aproximado es que la cuerda de 0.5º es 0 31’25”.

Esta ahora en disposición de construir una tabla de las cuerdas de arcos, para arcos que difieren entre si 0.5º, desde 0º hasta 180º. Esta es la primera tabla trigonométrica.

Pasa entonces Ptolomeo a resolver problemas de astronomía, comenzando por encontrar arcos de círculos máximos sobre una esfera. Estos arcos son lados de triángulos esféricos, algunas de cuyas partes son conocidas bien por observación o mediante cálculos previos. Para determinar los arcos desconocidos, Ptolomeo prueba relaciones que son teoremas de trigonometría esférica, algunos de los cuales habían sido probados ya en el libro III de la *Sphaerica* de Menelao. El método básico de Ptolomeo consiste en usar el teorema de Menelao para triángulos esféricos. Así prueba, con nuestra anotación, que en el triángulo esférico con ángulo recto en C y con arco *a* que denota al lado opuesto al ángulo A:

$$sen\ a = sen\ c\ sen\ A$$

$$tg\ a = sen\ b\ tg\ A$$

$$cos\ c = cos\ a\ cos\ b$$

$$tg\ b = tg\ b\ cos\ A$$

Por supuesto, para Ptolomeo las distintas funciones trigonométricas son cuerdas de arcos. Para tratar triángulos oblicuángulos los descompone en triángulos esféricos rectángulos. No hay ninguna presentación sistemática de la trigonometría esférica; demuestra únicamente aquellos teoremas que necesita para resolver problemas astronómicos concretos.

El *Almagesto* pone la trigonometría en su forma definitiva, que perdurara alrededor de mil años. Generalmente hablamos de esta trigonometría como esférica, pero la distinción entre trigonometría plana y esférica es muy difusa si se observa lo hecho por Ptolomeo. Ciertamente, Ptolomeo trabaja con triángulos esféricos pero, por haber calculado las cuerdas de arcos, ha puesto realmente las bases de la trigonometría plana. Pues, conociendo sen A y, por tanto, cos A para cualquier A comprendido entre 0º y 90º, se pueden resolver triángulos planos.

Se observa que la trigonometría fue creada para ser usada en astronomía, y como la trigonometría esférica era de mayor utilidad para ese propósito, fue la primera en ser desarrollada. El uso de la trigonometría plana en mediciones indirectas y en agrimensura es ajeno a la matemática griega. Esto puede parecer extraño, pero es históricamente incuestionable, ya que la astronomía era el mayor objetivo de los matemáticos griegos. Los agrimensores hacen su aparición en el periodo alejandrino; pero un matemático como Herón, que estuvo interesado en la agrimensura y habría sido capaz de desarrollar la trigonometría plana, se contento con aplicar la geometría euclidea. Los agrimensores incultos no estaban en situación de crear la trigonometría necesaria.

4.2.5.-LA ACTIVIDAD GEOMETRICA TARDIA EN ALEJANDRIA.

La actividad matemática en general y geometría en particular, declinó en Alejandría aproximadamente a partir del comienzo de la era cristiana. Lo que se sabe acerca de los trabajos de geometría de la primitiva era cristiana viene de los principales comentaristas Pappus, Teón de Alejandría (fin del siglo IV d.C.) y Proclo.

En conjunto muy pocos teoremas originales se descubrieron en este periodo. Los geómetras dan la impresión de haberse ocupado principalmente del estudio y comprensión de los trabajos de los grandes matemáticos que les precedieron. Completaron demostraciones que los autores originales habían omitido, bien porque las habían considerado suficientemente sencillas para dejarlas a los lectores, bien porque fueron dadas en tratados que se habían perdido. Estas demostraciones recibieron el nombre de lemas, en un antiguo uso de la palabra.
Tanto Teón como Pappus informan acerca de Zenodoro, que vivió en algún momento entre el 200 a.C. y el 100 d.C. Al parecer, Zenodoro escribió un libro sobre figuras isoperimétricas, es decir, figuras con el mismo perímetro y en él probo los teoremas siguientes:

1. Entre los polígonos de *n* lados con el mismo perímetro, el polígono regular es el que tiene mayor área.
2. Entre los polígonos regulares con igual perímetro, el que tiene mas lados tiene mayor área.
3. El circulo tiene mayor área que un polígono regular del mismo perímetro.

4. De todos los sólidos con la misma superficie, la esfera tiene el mayor volumen.

El contenido de estos teoremas, que hoy en día llamaríamos problemas de máximos y mínimos, era novedoso en la matemática griega.

Al final del periodo alejandrino, las aportaciones de Pappus a la geometría aparecen como una especie de contrapunto. Los ocho libros de su *Colección Matemática* contienen algún material original. El nuevo trabajo de Pappus no fue de primer orden, pero algo del mismo merece ser tenido en cuenta.

El libro V da las demostraciones, resultados y extensiones de los trabajos de Zenodoro relativos a las áreas limitadas por curvas con el mismo perímetro. Pappus añade el teorema por el cual de todos los segmentos de un circulo que tienen el mismo perímetro, el semicírculo tiene mayor área. Prueba también que la esfera tiene mayor volumen que cualquier cono, cilindro o poliedro regular con la misma área de su superficie.

La proposición 129 del libro VII es un caso particular del teorema en el que la razón doble

$$\left. \frac{AB}{AD} \middle/ \frac{BC}{CD} \right.$$

es la misma para toda sección transversal de cuatro rectas que parten de O. Pappus exige que las dos líneas transversales pasen por A.

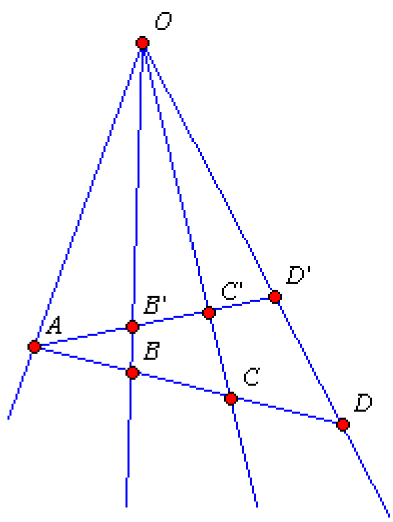


Figura 4.14

La proposición 130 afirma, en nuestro lenguaje, que si cinco de los puntos en los que los seis lados de un cuadrilátero completo (los cuatro lados y las dos diagonales) cortan una línea recta son fijos, el sexto también lo es. Así, si ABCD (figura 4.15) es un cuadrilátero tal que los seis puntos en los que sus seis lados cortan a una línea recta arbitraria EK son E, F, G, H, J y K, si cinco de ellos son fijos, también lo es el sexto. Pappus observa que estos seis puntos verifican la condición.

$$\frac{EK}{EH} \Big/ \frac{JK}{JH} = \frac{EK}{EF} \Big/ \frac{GK}{GF}$$

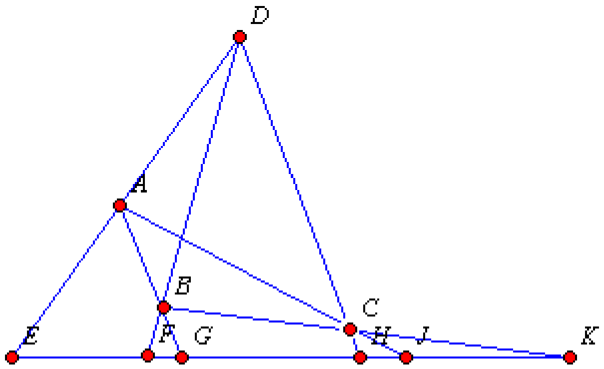


Figura 4.15

Esta condición establece que la razón doble determinada por E, K, J y H coincide con la razón doble determinada por E, K, G y F. La condición es equivalente a la que se puede encontrar, introducida por Desargues, que llama a seis puntos como los indicados, “ puntos de una involución ”.

La proposición 131 del libro VII equivale a la afirmación de que la diagonal de cualquier cuadrilátero queda cortada armónicamente por la otra diagonal y por la línea que une los puntos de intersección de los pares de lados opuestos. Así, ABCD es un cuadrilátero (figura 4.16); CA es una diagonal; CA queda cortada por la otra diagonal BD y por FH, que une la intersección de AD y BC con la intersección AB y CD. Entonces, los puntos C, E, A y G de la figura forman un conjunto armónico; es decir, E divide internamente a AC con la misma razón que G divide externamente a AC.

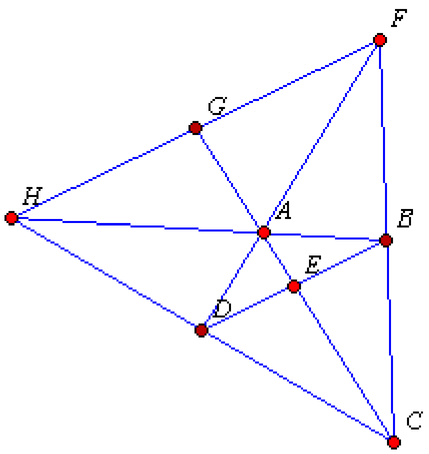


Figura 4.16

La proposición 139 del libro VII enuncia lo que se llama todavía teorema de Pappus. Si A, B y C son tres puntos de una recta (figura 4.17) y A', B' y C' son tres puntos de otra, entonces AB' y A'B, BC' y B'C, y AC' y A'C se cortan en tres puntos alineados.

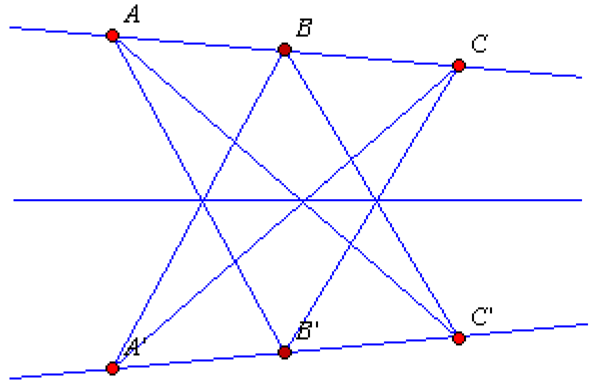


Figura 4.17

Uno de los últimos lemas, la proposición 238, establece una propiedad fundamental de las secciones cónicas: el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias desde un punto fijo (foco) y desde una línea fija (directriz) están en razón constante es una sección cónica. Esta propiedad fundamental de las cónicas no aparece en el libro de Apolonio *Secciones Cónicas*, pero, como ya se ha observado anteriormente, era probablemente conocida por Euclides.

En la introducción del libro VII, Pappus se apoya en la afirmación de Apolonio de que su método capacita para ayudar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos líneas es igual al producto de sus distancias a otras dos líneas por una constante. Pappus sabe (pero no demuestra) que el lugar es una cónica. Apunta también que el problema se puede generalizar también a cinco, seis o mas rectas.

El libro VIII es de especial importancia puesto que está dedicado esencialmente a la mecánica, la cual, conforme a los puntos de vista alejandrinos, se contempla como una parte de la matemática. En efecto, Pappus prologa el libro planteando esta cuestión. Cita a Arquímedes, Herón y otras figuras menos conocidas como las figuras de la mecánica matemática. El centro de gravedad de un cuerpo se define como el punto interior del mismo (no ha de ser necesariamente interior) tal que si el cuerpo se suspende desde el mismo, permanece en su posición inicial. Explica entonces procedimientos para la determinación del punto. Trata también sobre el movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado y aborda la cuestión de comparar la fuerza requerida para deslizar un cuerpo por un plano horizontal con la que se necesita para hacerlo en un plano inclinado.

El libro VII contiene también un famoso teorema llamado a veces teorema de Pappus y a veces teorema de Guldin (1577-1643) lo redescubrio de forma independiente. El teorema afirma que el volumen generado por la rotación completa de una curva cerrada plana totalmente situada a un lado del eje de rotación es igual al área limitada por la curva multiplicada por la circunferencia del circulo que pasa por el centro de gravedad. El resultado es muy general y Pappus era consciente de ello. No da una demostración del teorema y es muy posible que tanto el teorema como su demostración se conocieran con anterioridad a su tiempo.

En lo que se refiere a la geometría, el periodo alejandrino finaliza con los trabajos de varios comentaristas. Teón de Alejandría escribió un comentario sobre el *Almagesto* de Ptolomeo y nuevas ediciones de los *Elementos* y la *Optica* de Euclides. Su hija Hypatia (fallecida el 415), estudiante de matemáticas, escribió comentarios sobre Diofanto y Apolonio.

Proclo Diadoco, que se ha citado a menudo, escribió un comentario sobre el libro I de los *Elementos* de Euclides. Este comentario es importante porque Proclo había tenido acceso a trabajos ahora perdidos, incluyendo la *Historia de la Geometría* de Eudemo y el libro de Gémino que probablemente se titulaba la *Doctrina* o la *Teoría de la Matemática*.

Proclo recibió su educación en Alejandría y posteriormente se desplazo a Atenas, donde se convirtió en la cabeza de la Academia de Platón. Fue un avanzado neo-platónico y escribió varios libros sobre los trabajos de Platón y en general sobre filosofía; la poética ocupaba su interés tanto como la matemática. Igual que Platón, creía que la matemática era sierva de la filosofía. Es propedéutico, porque quiere limpiar los ojos del alma, eliminando los obstáculos que colocan los sentidos en el camino de los conocimientos universales.

Entre otros comentaristas, se pueden citar unos pocos. Simplicio, un comentarista de Aristóteles, estudio en Alejandría y en la Academia de Platón, y se desplazo a Persia cuando Justiniano cerro la Academia en al año 529. Reprodujo material de la *Historia* de Eudermo, incluyendo un largo resumen del intento de Antifon sobre la cuadratura del circulo y sobre la cuadratura de lúnulas de Hipócrates. Isidoro de Mileto (siglo VI), que al parecer tubo una escuela en Constantinopla (que se había convertido en la capital del Imperio Romano Oriental y en el centro de alguna actividad matemática) escribió comentarios y puede haber escrito una parte del decimoquinto libro de los *Elementos* de Euclides. Eutocio (siglo VI d.C.), probablemente discípulo de Isidoro, escribió un comentario sobre los trabajos de Arquímedes.

4.3.- ARITMETICA Y ALGEBRA.

4.3.1.- CRECIMIENTO INDEPENDIENTE DE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA.

Hemos estado revisando los métodos para hacer aritmética empleados por los griegos en los dos períodos, pero más especialmente en el período alejandrino cuando la geometría y la trigonometría se convirtieron en materias de carácter cuantitativo. Pero el principal asunto a que se dedica este capítulo es el nacimiento de la aritmética y el álgebra como materias *independientes* de la geometría. Los trabajos aritméticos de Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo fueron un paso en esta dirección, aunque usaron la aritmética para calcular cantidades geométricas. Se puede llegar a la conclusión de que los números estaban destinados a ello, debido a que representaban magnitudes geométricas y la lógica de las operaciones estaba garantizada por el álgebra geométrica. Pero no hay duda de que Herón, Nicómaco (sobre el 100), que fue probablemente un árabe de Gerasa en Judea, y Diofanto (sobre el 250), un griego de Alejandría, trataron los problemas aritméticos y algebraicos por sí mismos y no en dependencia de la geometría, ya sea como motivación, ya como auxiliar de la lógica.

Más significativo que el trabajo de Herón de calcular raíces cuadradas y cúbicas es el hecho de que formuló y resolvió problemas algebraicos mediante procedimientos aritméticos puros. No usaba símbolos especiales; la narración es verbal. Por ejemplo, trata el siguiente problema: dado un cuadrado tal que la suma de su área y su perímetro es 896 pies, determinar su lado. El problema, con nuestra notación, consiste en calcular x de manera que verifique $x^2 + 4x = 896$. Herón completa el cuadrado sumando 4 a cada miembro y tomando la raíz cuadrada. No demuestra nada, sino que simplemente describe las operaciones a realizar. Hay varios problemas de este tipo en sus trabajos. Evidentemente, éste es el viejo estilo egipcio y babilonio de representación, y no hay ninguna duda que Herón recogió mucho material de los antiguos textos egipcios y babilonios. Allí, recordémoslo, el álgebra era independiente de la geometría y, como en el caso de Herón, una prolongación de la aritmética.

En su Geométrica, Herón habla de sumar un área, una circunferencia y un diámetro. Cuando usa estas palabras quiere decir, por supuesto, que lo que quiere es sumar valores numéricos. Del mismo modo, cuando dice que multiplica un cuadrado por un cuadrado, quiere expresar que lo que está calculando es el producto de los valores numéricos respectivos. Herón tradujo también gran parte del álgebra geométrica de los griegos a procesos aritméticos y algebraicos.

Este trabajo de Herón (así como el uso que hace de las fórmulas egipcias de aproximación de áreas y volúmenes) se considera a veces como el principio del declive de la geometría griega. Es más correcto contemplarlo como una mejora helénica de las matemáticas babilonias y egipcias. Cuando Herón suma áreas y segmentos lineales, no está aplicando incorrectamente la geometría clásica griega sino que simplemente está continuando la práctica de los babilonios para quienes área y longitud eran exclusivamente palabras para ciertas incógnitas aritméticas.

Más notable desde el punto de vista del resurgimiento de una aritmética independiente es el trabajo de Nicómaco, que escribió la *Introductio Arithmetica* en dos tomos. Fue el primer libro de importancia en el que la aritmética (en el sentido de la teoría de números) estaba tratada con independencia absoluta de la geometría. Desde el punto de vista histórico, su importancia para la aritmética es comparable a la de los *Elementos* de Euclides para la geometría. Este libro no sólo fue estudiado, tomando como referencia y copiado por decenas de autores posteriores, sino que se reconoce como inspirador de varios libros por otros autores del mismo período, con lo que refleja el interés de la época. Los números representaban cantidades de objetos y dejaron ya de ser considerados como longitudes de líneas, como en Euclides. Nicómaco utiliza siempre palabras que Euclides. Nicómaco utiliza siempre palabras, mientras que Euclides emplea una letra, como A, o dos letras tales como BC –refiriéndose en el segundo caso a un segmento lineal- al hablar de números. Luego el lenguaje de Nicómaco es más torpe. Considera sólo números enteros y razones de números enteros.

Nicómaco era un pitagórico, y pese a que la tradición pitagórica no había muerto, la reanimó. De las cuatro materias destacadas por Platón –aritmética, geometría, música y astronomía- Nicómaco afirma que la aritmética es la madre de las demás. Esto es lo que mantiene:

"No solamente por que decimos que existía antes que las demás en la mente del Dios creador como algún plan universal y ejemplar, confiado en ella como un diseño y arquetipo, el creador del

universo puso en orden sus creaciones materiales y las hizo de acuerdo con sus propios fines; sino también porque es por su naturaleza anterior en su nacimiento..."

La aritmética, continúa, es esencial para las demás ciencias ya que éstas no existiría sí ella. Sin embargo, si las demás ciencias fueran abolidas, la aritmética seguiría existiendo.

La esencia de la *Introductio* está en los trabajos aritméticos de los primeros pitagóricos. Nicómaco considera números pares e impares, cuadrados, rectangulares y poligonales. Estudia también números primos y compuestos y números paralelepipédicos (de la forma $n^2(n+1)$) y define muchos más tipos. Da la tabla de multiplicar para números comprendidos entre el 1 y el 9 precisamente como la aprendemos nosotros.

Nicómaco repite varios enunciados pitagóricos, como que la suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto y recíprocamente. Va más allá que los pitagóricos al ver, aunque sin probarlas, relaciones de tipo general. Así, afirma, el (n – 1)-ésimo

$$\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n}{2}(3n-1)$$

número triangular sumado con el número k-gonal n-ésimo número da el número (k + 1)-gonal n-ésimo. Por ejemplo, el (n – 1)-ésimo número triangular sumado al número cuadrado n-ásimo da el n-ésimo número pentagonal.

Asimismo, el n-ésimo número triangular, el n-ésimo número cuadrado, el n-ésimo número pentagonal, y así sucesivamente forman una progresión aritmética cuya diferencia es el (n – 1)-ésimo número triangular.

Descubrió la siguiente proposición: Si escribimos los números impares:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,...

Entonces el primero es el cuadrado de 1; la suma de los dos siguientes, el cuadrado dos 2; la suma de los tres siguientes, el cuadrado de 3, y así sucesivamente. Hay otras proposiciones sobre progresiones.

Nicómaco da cuatro números perfectos, 6, 28, 496 y 8128 y repite la fórmula de Euclides para los mismos. Clasifica todo tipo de razones, incluidas m + 1: m, 2m + n: m + n, y mn + 1: n y les da nombre. Estas fueron muy importantes en música.

Estudia también la proporción, la cual, dice, es muy necesaria para "las ciencias naturales, la música, la trigonometría esférica y la planimetría, y en especial para el estudio de la matemática antigua". Da diversos tipos de proporciones, entre ellas la proporción musical.

$$a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$$

La *Introducctio* da también la criba de Eratóstenes; es un método para la obtención de números primos de manera rápida: se escriben todos los números impares a partir de 3 hasta donde se desee, entonces, se tachan todos los múltiplos de 3, es decir todos los números terceros mayores que 3. A continuación, se tachan todos los múltiplos de 5, contando los que se puedan haber tachado ya. Luego, todos los números séptimos mayores que 7, y así tachado. Estos son los números primos.

Nicómaco utiliza siempre números concretos para discutir las distintas categorías y proporciones. Los ejemplo ilustran y explican sus afirmaciones, pero no hay ningún apoyo tras los ejemplos para las afirmaciones generales. No utiliza el método deductivo de demostración.

La *Introductio* tuvo valor porque es una presentación sistemática, ordenada, clara y amplia de la aritmética de los enteros y las razones de enteros, liberada de la geometría. No era original en cuanto a las ideas pero fue una recopilación de gran utilidad. Incorporaba propiedades especulativas, estéticas, místicas y morales de los números, pero ninguna aplicación práctica. La *Introductio* fue el texto habitual de aritmética durante mil años. En Alejandría, a partir de la época de Nicómaco, la aritmética se convirtió en el tema de estudio favorito, por encima de la geometría.

En este tiempo, también el álgebra toma la delantera. Aparecen libros de problemas resueltos mediante técnicas algebraicas. Algunos de estos problemas eran exactamente los que aparecían en los textos babilónicos del 2000 a. C. o en el papiro Rhind. Estos trabajos griegos sobre álgebra fueron escritos en forma literaria y no se usa ningún simbolismo, ni tampoco de da ninguna demostración de los métodos empleados. A partir de la época de Nicómaco, los problemas que conducían a ecuaciones tenían la forma común de un rompecabezas. Entre cincuenta y sesenta de los mismos se conservan en el Códice Palatino de Epigramas Griegos (siglo X). Treinta de ellos como mínimo se atribuyen a Metrodoro (sobre el 500 d. C.), pero seguramente son más antiguos. Uno es el problema del ganado de Arquímedes, según el cual hay que calcular el número de bueyes y vacas de colores distinto conforme a la información dada. Otro se debe a Euclides e involucra a una mula y un asno que transportan grano. Otro se refiere al tiempo que deben emplear una cañerías para llenar una cisterna. Había problemas de edades, tal como aparecen en nuestros textos de álgebra.

El punto culminante del álgebra greco-alejandrina se alcanza con Diofanto. No sabemos casi nada cerca de sus orígenes y de su vida; probablemente fue griego. Un problema algebraico hallado en una colección griega de los siguientes hechos acerca de su vida: su infancia duró 1/6 de su vida; su adolescencia, hasta 1/12 más; se casó tras 17 más, y su hijo nació 5 años después. El hijo vivió la mitad de la edad de su padre y éste murió 4 años después que el hijo. El problema es determinar cuánto vivió Diofanto. La respuesta se calcula con facilidad y resulta ser 84. Su trabajo destaca por encima del de sus contemporáneos; por desgracia, apareció demasiado tarde para tener una gran influencia en su tiempo, ya que una corriente de destrucción estaba engullendo toda la civilización.

Diofanto escribió varios libros que se han perdido en su totalidad. Se conoce parte de un tratado *Sobre los Números Poligonales* en el que establece y demuestra teoremas pertenecientes a los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* con el método deductivo; sin embargo, los teoremas no son muy importantes. Su gran trabajo es la *Arithmetica*, la cual, dice Diofanto, comprende trece libros. Nosotros tenemos seis, procedentes de un manuscrito del siglo XIII que es una copia griega de otro más antiguo y de versiones posteriores.

La Arithmetica, como el papiro Rhind, es una colección de problemas independientes. La dedicatoria señala que fue escrito como una serie de ejercicios para ayudar a uno de sus estudiantes a aprender la materia. Uno de los hitos más importantes de Diofanto es la introducción del simbolismo en el álgebra. Debido a que no estamos en posesión del manuscrito escrito por él, sino de otro muy posterior, no conocemos los símbolos con exactitud. Se cree que el símbolo que usaba para la indeterminada era ς, que jugaba el papel de nuestra x. Esta ς puede haber sido la misma letra que la griega σ escrita al final de una palabra, como en α∂ιτμος (arithmos) y pudo haber sido elegida a causa de que no representaba ningún número en el sistema griego de servirse de letras para designar números. Diofanto llamó a la incógnita “ el número del problema”. Nuestra x^2 la escribe Diofanto como Δ^Y, la Δ por ser la primera letra de ∂υναμις (*dynamis,* “potencia”). X^3 es la K^Y; la K de κνβος (cubos). X^4 es $\Delta^Y\Delta$; x^5 es ΔK^Y; x^6 es K^YK. En este sistema K^Y no es exactamente el cubo de ς como x^3 lo es de x. Para Diofanto, $ς^x$ = 1/x. Usa también nombres para estas potencias, por ejemplo número para x, cuadrado para x^2, cubo para x^3, cuadrado-cuadrado (dynamodynamis) para x^4, cuarado-cubo para x^5 y cubo-cubo para x^6[2].

La aparición de este simbolismo es evidentemente notable, pero el uso de potencias superiores a tres es todavía más extraordinario. Los griegos clásicos no podían ni querían considerar productos de más de tres factores ya que tal producto no tenía ningún significado geométrico. En una base puramente aritmética, no obstante, tales productos tienen un significado; y ésta precisamente es la idea adoptada por Diofanto.

Para la sustracción emplea el símbolo “?”.

No existen símbolos para la adición, la multiplicación y la división como operaciones. El símbolo $ι^o$ se emplea (al menos en las versiones existentes de la *Arithmetica*) para designar la igualdad. Los coeficientes de las expresiones algebraicas son números concretos; no hay ningún símbolo para coeficientes generales. A causa del uso de símbolos, el álgebra de Diofanto recibe el nombre de sincopada, mientras que a la de los egipcios, los babilonios, Herón y Nicómaco se le llama retórica.

Diofanto redacta sus soluciones en un texto continuo, de la misma manera que nosotros escribimos prosa. Su ejecución de las operaciones es completamente aritmética; es decir, no hay ninguna llamada a la geometría para ilustrar o justificar sus afirmaciones. Así (x – 1)(x – 2) se interpreta algebraicamente, igual que lo hacemos nosotros. Aplica también identidades algebraicas tales como

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = pq$$

a expresiones tales como (x + 2) en sustitución de *p* y (x + 3) por *q*. Esto es, da pasos en los que utiliza las identidades pero estas identidades propiamente dichas no aparecen.

El primer libro de la *Arithmetica* consiste fundamentalmente en problemas que conducen a la determinación de ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas. Los cinco libros restantes tratan principalmente de ecuaciones indeterminadas de segundo grado. Pero esta separación no es estricta. En el caso de ecuaciones determinadas (es decir, ecuaciones con solución única) con más de una incógnita, emplea la información dada para eliminar todas las incógnitas menos una y, al final, termina con ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2=b$. Por ejemplo, el problema 27 del libro I dice: encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto 96. Diofanto procede así: sea 20 la suma; 96, es producto, y 2x, la diferencia entre los números buscados. Luego, los números son 10 + x, 10 – x. Por tanto, $100 - x^2 = 96$. Entonces, x = 2 y los números buscados son 12 y 8.

La característica más sorprendente del álgebra de Diofanto es su solución de las ecuaciones indeterminadas. Tales ecuaciones habían sido consideradas con anterioridad, como por ejemplo en el trabajo pitagórico para las soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$, así como en el problema arquimediano del ganado, que conduce a siete ecuaciones con ocho incógnitas (más dos condiciones suplementarias), y en otros escritos curiosos. Diofanto, no obstante, trata las ecuaciones indeterminadas extensamente y es el creador de esta rama del álgebra llamada en la actualidad, efectivamente, análisis diofántico.

Resuelve ecuaciones lineales con dos incógnitas, como

$$x + y - 5 = 0$$

En estas ecuaciones da un valor a una indeterminada y resuelve la ecuación para un valor racional positivo de la otra. Reconoce que el valor asignado a la primera incógnita es estrictamente accidental. (En el análisis diofántico moderno solamente se calculan soluciones enteras.) Muy poco es lo hecho con este tipo de ecuación y el trabajo es apenas significativo puesto que las soluciones racionales positivas se calculan de golpe.

Resuelve entonces cuadráticas, cuya forma más general es (en nuestra notación)

$$Y^2 = Ax^2 + Bx + C \qquad (1)$$

Diofanto no escribe y^2 pero dice que la expresión cuadrática debe ser igual a un número cuadrado (cuadrado de un número racional). Considera (1) para valores especiales de A, B y C y estudia estos tipos en casos separados. Por ejemplo, cuando no aparece C toma Y = mx/n, donde m y n son números enteros concretos, obtiene

$$Ax + bx = \frac{m^2}{n^2}x^2,$$

Y entonces simplifica x y la resuelve. Cuándo A y C no se anulan pero $A=a^2$, supone y = ax – m. Si $C = c^2$, pone y = (mx – c). En todos los casos m es un número determinado.
Estudia también el caso de ecuaciones cuadráticas simultáneas, como

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C \quad (1)$$
$$z^2 = Dx^2 + Ex + F \quad (2)$$

Aquí también considera solamente casos particulares, es decir, cuando A, B,... , F son números determinados o verifican condiciones especiales, y este método consiste en asignar a "y" y a "z" expresiones en términos de x, y a continuación resolver en x.

De hecho, está resolviendo ecuaciones determinadas en una incógnita. Lo que ocurre, sin embargo, es que al elegir expresiones para "y" y "z" en (2) y (3) y para Y en (1), está dando soluciones totalmente significativas y los valores asignados a "y" y "z" son arbitrarios.

Tiene también problemas en los que expresiones cúbicas y de mayor grado de x deben ser iguales a un número cuadrado, por ejemplo:

$$Ax^3 + bx^2 + Cx + d^2 = y^2$$

Aquí toma y = mx + d y fina m de manera que se anule el coeficiente de x. Como el termino d^2 se simplifica y puede dividir por x^2 toda la ecuación, obtiene una ecuación de primer grado en x. Hay también casos especiales en que una expresión cuadrática en x es igual a y^3.

Reduce todas estas ecuaciones cuadráticas en x a los tipos

$$ax^2 = bx, ax^2 = b, ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx, ax^2 = bx + c$$

Y resuelve cada uno de ellos. Solamente resuelve una ecuación cúbica en x, de escasa importancia.

Las ecuaciones anteriores muestran los tipos de problemas que resuelve Diofanto. El lenguaje real de los problemas se ilustra con los ejemplos siguientes:

• *Libro I*, problema (. Dividir un número cuadrado dado en dos cuadrados.

Aquí toma el 16 como el número cuadrado dado y obtiene 256/25 y 144/25. Este es el problema que generalizó Fermat y que da lugar a la afirmación de que la ecuación $x^m + y^m = z^m$ no es resoluble para m mayor de 2.

• *Libro II*, problema 9. Dividir un número dado que es la suma de dos cuadrados en la suma de otros cuadrados distintos de los anteriores.

Toma 13 ó 4 + 9 con números dado y obtiene 324/25 y 1/25.

• *Libro III*, problema &. Encontrar tres números tales que su suma y la suma de dos cualesquiera de ellos sea un cuadrado perfecto.

Diofanto da los tres números 80, 320 y 41.

• *Libro IV*, problema 1. Dividir un número dado en dos cubos tales que la suma de sus lados es un número dado.

Con el número 370 y la suma de los lados igual a 10, encuentra el 43 y el 27. Los lados son las raíces cúbicas de los cubos.

• *Libro IV*, problema 29. Expresar un número dado como la suma de cuatro cuadrados más la suma de sus lados.

Dado el número 12, Halla 121/100, 49/100, 361/100 y 169/100 como los cuatro cuadrados; sus lados son las raíces cuadradas de cada cuadrado.

En el libro VI Diofanto resuelve problemas que hacen referencia a los lados (racionales) de un triángulo rectángulo. El uso del lenguaje geométrico es accidental, incluso cuando aparece el término área. Lo que busca son números racionales a, b, c tales que $a^2 + b^2 = c^2$ y sujetos a alguna otro condición. Así, el primer problema es hallar un triángulo rectángulo (de lados racionales) tal que la hipotenusa menos cada uno de los catetos es un cubo. En este caso llega a obtener la solución entera 40,96 y 104. Sin embargo, en general obtiene soluciones racionales.

Diofanto da muestras de una gran habilidad para reducir ecuaciones de los diferentes tipos a formas que pueda manejar. No sabemos cómo llego a sus métodos. Como prescinde totalmente de la geometría, no es probable que se inspirara en los procedimientos empleados por Euclides para resolver ecuaciones cuadráticas. Además, Euclides no estudia problemas indeterminados, que, como tales, aparecen con Diofanto. Debido a que carecemos de información acerca de la continuidad del pensamiento en los finales del período alejandrino, no podemos hallar indicios de los trabajos de Diofanto en sus predecesores. Dentro de lo que se puede asegurar, sus trabajos en álgebra pura son notablemente distinto de trabajos precedentes.

Acepta solamente raíces racionales positivas e ignora cualesquiera otras. Incluso cuando una ecuación cuadrática tiene dos raíces negativas o imaginarias, la rechaza y dice que no es resoluble. En el caso de raíces irracionales, recompone sus pasos y prueba como modificando la ecuación se puede obtener otra con raíces racionales. Aquí Diofanto se aparta de Herón y Arquímedes. Herón era un agrimensor y las cantidades geométricas que buscaba podían ser irracionales, por lo que las aceptaba, aunque naturalmente las aproximaba para obtener valores útiles. Arquímedes buscaba también soluciones exactas, y cuando eran irracionales determinaba desigualdades para acortarlas. Diofanto es un algebrista puro, y como el álgebra de su tiempo no admitía lo números irracionales, ni los negativos, ni los complejos, rechazaba las ecuaciones que tenían tales soluciones. Es, no obstante, digno de destacar que las fracciones, para Diofanto, eran números y no una razón entre dos números enteros.

No tenía método general. Cada uno de los 189 problemas de la *Arithmetica* está resuelto por un procedimiento distinto. Hay más de 50 tipos diferentes de problemas. Pero no se hace ningún intento de clasificarlos. Sus métodos son más cercanos a los de los babilonios que a los de su antecesores griegos y hay indicios de influencias babilonias, puesto que, en efecto, resuelve algunos problemas como lo hacían los babilonios. Sin embargo, no se ha probado la existencia de una conexión directa entre los trabajos de Diofanto y el álgebra babilonia. Sus adelantos en álgebra respecto de los babilonios consisten en la utilización de simbolismo y la resolución de ecuaciones indeterminadas. En ecuaciones determinadas no hizo mucho más que ellos, pero su Arithmetica se parecía a la logística, que Platón, entre otros, había proscrito de la matemática.

La variedad de métodos de Diofanto para cada uno de los problemas deslumbra más que deleita. Fue un virtuoso sagaz y clarividente pero en apariencia no profundizó lo suficiente en sus procedimientos para darles generalidad. (Es también cierto que el análisis diofántico es un conjunto de problemas independiente.) Al contrario de un investigador especulativo que busca ideas generales, Diofanto buscaba solamente soluciones correctas. Hay algunos resultados que podrían llamarse generales, como que ningún número primo de la forma 4n +3 puede ser la suma de dos cuadrados. Euler atribuyó a Diofanto métodos generales del mismo que no parecían tales debido a que no tenía coeficientes literales, y otros creyeron que su material pertenecía a una ciencia abstracta y básica. Pero este punto de vista no fue compartido por todos. Sin embargo, sus trabajos, contemplados como un todo, son un monumento algebraico.

Un elemento de la matemática que es de gran importancia hoy en día, y que faltaba en el álgebra griega, es el uso de letras para representar una clase de números como, por ejemplo, los coeficientes de las ecuaciones. Aristóteles utilizó letras del alfabeto griego para indicar un tiempo arbitrario o una distancia cualquiera y en la discusión del movimiento empleaba frases tales como “la mitad de B”. Euclides, asimismo usaba letras para designar clases de números en los libros VII a IX de los Elementos, una práctica continuada por Pappus. Sin embargo, no hubo ningún reconocimiento de la enorme contribución que podían aportar las letras para aumentar la efectividad y la generalidad de la metodología algebraica.

5.- EL FINAL DEL MUNDO GRIEGO.

5.1.- RESEÑA DE LAS REALIZACIONES GRIEGAS.

Aunque la civilización greco-alejandrina perduró hasta el año 640 d.C., en el que finalmente fue destruida por los mahometanos, es evidente que, a causa de su productividad decreciente, la civilización había entrado ya en declive durante los primeros siglos de la era cristiana. Antes de entrar a considerar las razones de este declive es importante resumir las realizaciones y las imperfecciones de la matemática griega y tomar nota de los problemas que han dejado para generaciones futuras. Los griegos alcanzaron grandes metas, y la continuación de la matemática, cuando fue retomada por los europeos tras pequeñas incursiones a cargo de hindúes y árabes, estuvo tan completamente determinada por el legado de los griegos que es importante tener claro donde se sitúa su matemática.

Los griegos se caracterizaron por hacer matemática abstracta. Esta contribución principal es de una relevancia y un valor inconmensurable por el hecho de que un mismo triángulo abstracto o una misma ecuación algebraica se puede aplicar a cientos de situaciones físicas diferentes, que es donde se ha demostrado que radica el secreto de la potencia de la matemática.

Los griegos insistieron en las demostraciones deductivas. Este fue sin duda un avance extraordinario. De los cientos de civilizaciones que habían existido, alguna habían desarrollado algún tipo rudimentario de aritmética y de geometría. Sin embargo, ninguna civilización, aparte de los griegos concibió la idea de establecer conclusiones exclusivamente a través del razonamiento deductivo. La decisión de exigir demostraciones deductivas esta en contraposición absoluta con los métodos utilizados por el hombre hasta entonces en los demás campos; es, de hecho, casi irracional, porque casi todo el conocimiento altamente fiable se adquiría a través de la experiencia, la inducción, el razonamiento por analogía y la experimentación. Pero los griegos buscaban verdades y vieron que solamente las obtendrían por los métodos infalibles del razonamiento deductivo. Comprendieron también que para llegar a verdades seguras debían partir de verdades y estar seguros de no suponer ningún hecho no garantizado. Por tanto, establecieron todos sus axiomas de forma explícita y además adoptaron la practica de situarlos muy al principio de sus trabajos para que de esta manera pudieran ser examinados de golpe con sentido critico.

Después de concebir este plan enormemente importante para asegurar un conocimiento seguro, los griegos introdujeron una sofisticación que difícilmente podía esperarse de los innovadores. Su conciencia de que los conceptos no podían ser contradictorios y de que no se puede construir una estructura solo consistente trabajando con figuras no existentes (tales como un poliedro regular de diez caras) pone de manifiesto una agudeza de pensamiento casi sobrehumana y ciertamente sin precedentes. Como sabemos ahora, su método para establecer la existencia de los conceptos, con lo que podían trabajar con ellos, era demostrar que podían construirse con el uso de regla y compás.

La potencia de los griegos para intuir teoremas y demostraciones queda atestiguada pe el hecho de que los *Elementos* de Euclides contienen 467 proposiciones y las *Secciones Cónicas* de Apolonio, 487, obtenidas todas ellas a partir de 10 axiomas enunciados en los *Elementos*. La coherencia que proporcionan las estructuras deductivas no ofrece ninguna duda, ni siquiera secundaria en cuanto a su importancia, ni quizá secundaria en cuanto a atención. Aun la posibilidad de obtener los mismos resultados a partir de numerosos conjuntos de axiomas distintos (si bien igualmente fiables) podría dar una versión del conocimiento menos manejable y asimilable.

La contribución griega al contenido de la matemática (geometría plana y del espacio, trigonometría plana y esférica, los comienzos de la teoría de los números, la ampliación de la aritmética y el álgebra de Egipto y Babilonia) es enorme, especialmente si se tiene en cuenta el reducido número de personas dedicadas a ellas y a los escasos siglos a los que se extendió su actividad. A estas contribuciones debemos añadir el álgebra geométrica, que esperaba solamente el reconocimiento de los números irracionales y la instauración del lenguaje simbólico para convertirse en la base del gran parte del álgebra elemental. Por otra parte, el estudio de figuras curvilíneas por el método exhaustivo, a pesar de que formaba parte de su geometría, merece una mención especial ya que constituye el comienzo del calculo.

El atractivo estético de la matemática no fue pasado por alto. En la época griega, las matemáticas eran consideradas también como un arte; la belleza, la armonía, la sencillez, la claridad y el orden eran reconocidas en ellas. La aritmética, la geometría y la astronomía se tomaban como el arte de la mente y la música, el del espíritu. Platón se complacía con la geometría; Aristóteles no separaría las matemáticas de la estética, pues el orden y la simetría eran para él elementos importantes de belleza, y estos los encontraba en las matemáticas. Evidentemente, los intereses racionales y estéticos, así como los morales, son difícilmente separables en el pensamiento griego. Leemos una y otra vez que la esfera es el cuerpo con la forma más bella y es, por tanto, divina y buena. El circulo participaba junto con la esfera de esta llamada a la estética; parecía obvio por tanto que el circulo fuera el camino de aquellos cuerpos que representaban lo inmutable, el orden eterno del cielo, mientras que el movimiento lineal prevalecía sobre la tierra imperfecta. No hay duda de que fue la estética de las matemáticas lo que dio lugar a que los matemáticos griegos prosiguieran la exploración de temas concretos una vez utilizados para la comprensión del mundo físico.

5.2.- LAS LIMITACIONES DE LA MATEMATICA GRIEGA.

Pese a sus logros maravillosos, las matemáticas griegas eran defectuosas. Sus limitaciones señalan los caminos del progreso al que, sin embargo, todavía no estaban abiertas.

La primera limitación fue la incapacidad para admitir el concepto de número irracional. Esto significaba no solamente una restricción de la aritmética y el álgebra, sino también una vuelta a la geometría y el énfasis en ella, ya que el pensamiento geométrico evitaba una presentación explícita de lo irracional como un número. Si los griegos hubieran afrontado el número irracional podrían habré adelantado el desarrollo de la aritmética y el álgebra; e incluso, si ellos mismos no lo hubieran hecho, no habrían impedido que lo hicieran generaciones posteriores, que fueron inducidas a pensar que solamente la geometría ofrecía un fundamento seguro para el estudio de magnitudes cuyos valores podían incluir irracionales. Arquímedes, Herón y Ptolomeo comenzaron a trabajar con los irracionales como números, pero no modificaron el carácter de las matemáticas griegas ni la impronta subsiguiente del pensamiento griego. El echo de que los griegos se concentraran en la geometría nubló la visión de otras generaciones al enmascarar la correspondencia intima entre los conceptos geométricos y los aritméticos y las operaciones. El fracaso a la hora de definir, aceptar y conceptualizar los irracionales como números forzó una distinción entre número y magnitud. En consecuencia, el álgebra y la geometría fueron contempladas como disciplinas sin ninguna relación mutua.

De haber estado menos dedicados a ser lógicos y rigurosos, los griegos podían haber aceptado (y operado con) los números irracionales, igual que lo hicieron los babilonios y otras civilizaciones que sucedieron a los griegos. Pero la base intuitiva de la idealización no estaba clara, y la construcción lógica no entraba de lleno en sus poderes. La virtud de los griegos de insistir en la exactitud de los conceptos y las definiciones constituía un defecto en lo que concierne a la matemática creativa.

La restricción del rigor matemático solo a la geometría (además de a la teoría de los números) dio lugar a otra desventaja importante: el uso de métodos geométricos condujo a demostraciones cada vez mas complicadas a medida que las matemáticas se iban ampliando, particularmente en el área de la geometría del espacio. Además, incluso en las demostraciones más sencillas, hay una ausencia de métodos generales, lo cual es claro para nosotros ahora por estar en posesión de la geometría analítica y del cálculo. Cuando se consideran las dificultades que encontró Arquímedes para hallar el área de un segmento parabólico o el área subtenida por un arco de su espiral, y se compara esto con los métodos modernos de cálculo, se aprecia la efectividad de estos últimos.

Los griegos no solo restringieron las matemáticas en gran medida a la geometría, sino que incluso limitaron esta disciplina a las figuras que se podían obtener a partir de la línea recta y el circulo. De acuerdo con esto, las únicas superficies admitidas eran aquellas que se podían obtener haciendo girar líneas rectas y círculos alrededor de un eje, como por ejemplo el cilindro, el cono y la esfera, formados por la revolución de un rectángulo, un triángulo y un circulo, respectivamente, alrededor de una recta; el prisma, que es un cilindro especial, y la pirámide, que resulta de la descomposición de un prisma. Las secciones cónicas se introdujeron al cortar conos mediante un plano. Curvas como la cuadratriz de Hipias, la concoide de Nicomedes y la cisoide de Diocles quedaron como algo marginal de la geometría; recibieron, en este caso, el calificativo de mecánicas, mas que geométricas.

La clasificación de las curvas a cargo de Pappus es un intento de mantener unos limites fijos. Los griegos, conforme a los criterios de Pappus, distinguían las curvas como sigue: los lugares planos o curvas planas eran los que se podían construir a partir de líneas rectas y círculos; las cónicas recibían el nombre de lugares sólidos puesto que se originaban a partir del cono; las curvas lineales, como cuadratices, concoides, cisoides y espirales formaban la tercera clase. Análogamente, distinguían entre problemas planos, sólidos y lineales. Los problemas planos se resolvían mediante rectas y círculos; los problemas sólidos, a través de una o más secciones cónicas. Los problemas que no podían resolverse mediante líneas rectas, círculos o cónicas se llamaban lineales, debido a que utilizaban líneas (curvas) que tenían un origen mas complicado o menos natural que las anteriores. Pappus destaco la importancia de resolver problemas mediante lugares planos o sólidos ya que entonces se podía dar el criterio para una solución efectiva.

¿ Por que los griegos se limitaron su geometría a la recta, el circulo y a figuras derivadas directamente de ellos? Una razón es que de esta manera resolvían el problema de determinar la existencia de figuras geométricas. Como ya se ha visto, Aristóteles, en particular, señalaba que debemos estar seguros de que los conceptos introducidos no son autocontradictorios; es decir, hemos de demostrar que existen. Para aclarar este punto, los griegos, al menos en un principio, admitían exclusivamente aquellos conceptos que se podían construir. La recta y el circulo se admitían como construtibles en los postulados, pero las demás figuras debían poderse construir con la recta y el circulo.

Otro motivo para la restricción a la recta, el circulo y otras figuras derivadas de ellos parte de Platón, ya que de acuerdo con sus ideas tenia que estar claro lo que era aceptable. Mientras el número entero parecía ser aceptable como una idea clara en si misma, pese a que nunca fue explícitamente definida por los griegos, las figuras geométricas tenían que construirse con precisión. Rectas y círculos, así como figuras que se derivan de ellos estaban claros, mientras que las curvas introducidas mediante instrumentos mecánicos (distintos de la regla y el compás) no lo estaban, por lo que eran inadmisibles. La restricción a figuras claramente definidas dio lugar a una geometría simple, ordenada, armoniosa y bella.

Al insistir en una unidad, una completitud y una sencillez para su geometría y al separar el pensamiento especulativo de la utilidad, la geometría clásica griega limito sus logros.

Restringió la visión de las gentes y cerro sus mentes a nuevos pensamientos y métodos. Llevaba en si misma la semilla de su propia muerte. La estrechez de su campo de acción, la exclusividad de su punto de vista y la demanda estética sobre ella pudieron haber detenido su evolución, si no fuera por las influencias de la civilización alejandrina, que ensancho las perspectivas de los matemáticos griegos.

Los griegos tampoco consiguieron comprender lo infinitamente grande, lo infinitamente pequeño y los procesos infinitos. Ellos "se atemorizaban ante el silencio de los espacios infinitos". Los pitagóricos asociaron lo bueno y lo malo con lo limitado y lo ilimitado respectivamente. Aristóteles dice que el infinito es imperfecto, inacabado y en consecuencia inabordable; no tiene forma y es confuso. Los objetos tienen una naturaleza únicamente cuando están delimitados y son distinguibles.

Puesto que recelaban de los procesos infinitos, omitieron el proceso de paso al limite. Al aproximar un circulo mediante un polígono se contentaban con hacer que la diferencia fuera menor que cualquier cantidad dada previamente, pero se exigía que fuera siempre estrictamente positiva. De esta manera el proceso queda claro para la intuición; el paso al limite, por otra parte, habría llevado consigo la consideración de lo infinitamente pequeño.

5.3.- LOS PROBLEMAS LEGADOS POR LOS GRIEGOS.

Las limitaciones del pensamiento matemático griego conducen de manera casi automática a los problemas que dejaron para las generaciones futuras. El fracaso a la hora de aceptar los irracionales como números dejó ciertamente abierta la cuestión de sí se podía asignar un número a razones inconmensurables, con lo que estas podrían estudiarse desde el punto de vista de la aritmética. Con el número irracional, el álgebra se ampliaría también. En vez de regresar a la geometría para resolver ecuaciones cuadráticas, o de otro tipo, que podían tener raíces irracionales, estos problemas se podrían abordar en términos numéricos y el álgebra se desarrollaría a partir de situación en que la dejaron los egipcios y los babilonios o donde la dejo Diofanto, que rechazo la idea de considerar los irracionales como números.

Incluso para los números enteros y las razones de números enteros, los griegos no tenían ninguna base lógica; la sustituyeron por algunas definiciones bastante vagas, establecidas por Euclides en los libros VII y IX de los *Elementos*. La necesidad de un fundamento lógico del sistema de números se vio acrecentada por el uso libre de los números, incluidos los irracionales, por parte de los alejandrinos; a este respecto continuaron estrictamente las tradiciones empíricas de egipcios y babilonios. Por tanto, los griegos legaron dos ramas de las matemáticas completamente distintas y desigualmente desarrolladas. Por una parte estaba la rigurosa, deductiva y sistemática geometría y por otra, la heurística y empírica aritmética y su extensión al álgebra.

La incapacidad para la construcción de un álgebra deductiva significa que el rigor matemático quedo confinado a la geometría; de echo, este siguió siendo el caso hasta los siglos XVII y XVIII, cuando el álgebra y el cálculo ya se habían extendido. Incluso entonces se entendía todavía que las matemáticas rigurosas se referían a la geometría

La segunda tarea era ampliar los criterios para la existencia. La posibilidad de ser construido como medio de probar la existencia se convirtió en algo excesivamente restrictivo para los conceptos con los que iban a trabajar las matemáticas (y con los que más tarde lo hicieron). Además, como algunas longitudes no se pueden construir, la recta euclidea es incompleta; es decir, no contiene, en sentido estricto, las longitudes no construibles. Para ser internamente completas y más útiles al estudio del mundo físico, las matemáticas debían liberarse a si mismas de una limitación técnica para el establecimiento de la existencia de los conceptos.

Otro problema importante legado para la posteridad fue el cálculo de áreas limitadas por curvas y volúmenes limitados por superficies. Los griegos, especialmente Eudoxo y Arquímedes, no solamente habían abordado la cuestión sino que, como se ha visto, lograron progresos considerables usando el método de exhaucion. Pero el procedimiento presentaba dificultades como mínimo en dos aspectos: en primer lugar, cada problema requería algún esquema ingenioso para aproximar el área o el volumen en cuestión; sin embargo, la inventiva humana simplemente no disponía de suficientes recursos para las áreas y volúmenes que tenia que calcular después. En segundo lugar, el resultado al que llegaban los griegos consistía habitualmente en probar la equivalencia del área o volumen deseados con el área o volumen de alguna figura más sencilla cuya medida todavía no era conocida cuantitativamente. Pero es precisamente este conocimiento cuantitativo el que requieren las aplicaciones.

5.4.- LA DESAPARICION DE LA CIVILIZACION GRIEGA.

Comenzando aproximadamente con el principio de la era cristiana, la vitalidad de la actividad matemática griega declino rápidamente. Las únicas contribuciones importantes de la nueva era fueron las de Ptolomeo y Diofanto. Los grandes comentaristas Pappus y Proclo merecen también la atención, pero en realidad son los que cierran la nomina. El declive de esta civilización, que durante cinco o seis siglos aporto contribuciones que sobrepasan en gran medida, tanto en expansión como en brillantez, las de cualquier otra, requiere una explicación.

Desgraciadamente, los matemáticos están sujetos a los designios de la historia, igual que el último labrador. Basta con familiarizarse con los hechos más superficiales de la historia política de Alejandría para darse cuenta de que no solo las matemáticas, sino cualquier tipo de actividad cultural, estaban destinadas a sufrir. Mientras la civilización greco-alejandrina estuvo gobernada por los Ptolomeos, floreció. El primer desastre fue el advenimiento de los romanos, cuyo único papel en la historia de las matemáticas fue el de agentes de destrucción.

Antes de discutir su impacto sobre la cavilación greco-alejandrina, se deben ver algunos hechos acerca de las matemáticas en Roma y la naturaleza de la civilización romana: las matemáticas romanas apenas si son dignas de mención. El periodo durante el cual los romanos figura en la historia comprende los años que van desde aproximadamente el 750 a.C. hasta el 476 de nuestra era, mas o menos el mismo tiempo durante el cual floreció la civilización griega. Además, a partir del 200 a.C. los romanos estuvieron en estrecho contacto con los griegos. Con todo, en los once siglos no hubo ningún matemático romano; además de otros detalles este hecho habla virtualmente por si mismo de toda la historia de las matemáticas en Roma.

Volviendo de nuevo al papel que jugaron los romanos en la historia política y militar de Grecia, tras haber asegurado el control del centro y el norte de Italia, conquistaron las ciudades griegas del sur de Italia y Sicilia (recordemos que Arquímedes contribuyo a la defensa de Siracusa cuando los romanos atacaron la ciudad y murió a manos de un soldado romano). Los romanos conquistaron Grecia propiamente dicha el año 146 a.C. y Mesopotamia el 64 a.C. Al intervenir en las luchas internas de Egipto entre Cleopatra, la ultima de la dinastía Ptolomea, y su hermano, César manipulo para asegurarse un dominio sobre el país. El año 47 a.C., César prendió fuego a la flota Egipcia que navegaba y estaba anclada en el puerto de Alejandría; el fuego se extendió a la ciudad e incendio la Biblioteca. Dos siglos y medio de recolección de libros y medio millón de manuscritos, que representaban el esplendor de la antigua cultura, fueron borrados. Afortunadamente un excedente de libros que no habían podido ser colocados en la repleta Biblioteca estaban almacenados en el templo de Serapis y estos no fueron incendiados. Asimismo, Atalo III de Pérgamo, que murió en el 133 a.C., había legado a Roma su gran colección de libros. Marco Antonio regalo esta colección a Cleopatra y se sumaron a los libros del templo. La colección resultante volvió a ser enorme de nuevo.

La historia del final del imperio romano es también relevante. El emperador Teodosio (gobernó entre el 379 y el 395) dividió su ancho imperio entre sus dos hijos, Honorio, que fue el que gobernó Italia y Europa Occidental, y Arcadio, que gobernó Grecia, Egipto y el Oriente Próximo. La parte occidental fue conquistada por los godos durante el siglo V y su historia posterior pertenece ya a la de Europa Medieval. La parte oriental, que incluía Egipto (durante un tiempo), Grecia y lo que en la actualidad es Turquía, conservó su independencia hasta que fue conquistada por los turcos en el año 1453. Puesto que el Imperio Romano de Oriente, conocido también como el Imperio Bizantino, incluida Grecia propiamente dicha, la cultura y las obras griegas fueron conservadas en alguna medida.

Desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, la aparición del cristianismo tubo consecuencias poco afortunadas. Pese a que los jefes cristianos adoptaron varios mitos y costumbres griegas y orientales con al intención de hacer el cristianismo más aceptable a los conversos, se opusieron a las enseñanzas paganas y ridiculizaron las matemáticas, la astronomía y la física; se prohibió a los cristianos a contaminarse con las enseñanzas griegas. A pesar de la persecución cruel de la que fueron objeto por parte de los romanos, el cristianismo se difundió y llegó a tener tal importancia que el emperador Constantino (272-337) se vio obligado a adoptarlo como la religión oficial del Imperio Romano. Así, los cristianos fueron capaces de llevar a cabo una mayor, destrucción de la cultura griega. El emperador Teodosio proscribió a las religiones paganas y, en 392, dio la orden de que los templos griegos fueran destruidos. Muchos de ellos fueron convertidos en iglesias, a pesar de que a menudo estaban adornados todavía con esculturas griegas. Los paganos fueron atacados y asesinados por todo el Imperio. El destino de Hipatia, una matemática alejandrina de relevancia, e hija de Teón de Alejandría, simboliza el fin de la era. Como consecuencia de haberse negado a abandonar la religión griega, los fanáticos cristianos la apresaron en las calles de Alejandría y la despedazaron.

Los libros griegos fueron quemados a millares. El año en que Teodosio prohibió las religiones paganas, los cristianos destruyeron el templo de Serapis, que todavía albergaba la única gran colección de obras griegas. Se estima que fueron destruidos 300.000 manuscritos. Muchos mas trabajos escritos en pergaminos fueron requisados por los cristianos y usados para sus propios escritos. El año 529 el emperador romano de Oriente, Justiniano, cerró todas las escuelas griegas de filosofía, incluida la Academia de Platón. Muchos sabios griegos abandonaron el país y algunos (por ejemplo Simplicio) se asentaron en Persia.

El último suspiro para Alejandría fue la conquista de Egipto por los rebeldes mahometanos el año 640. Los libros que todavía quedaban fueron destruidos basándose en la proclama dada por Omar, el conquistador árabe. “ Los libros, o bien contienen lo que ya esta en el Corán, en cuyo caso no tenemos que leerlos, o bien contienen lo contrario de los que esta en el Corán, en cuyo caso no debemos leerlos.” Como consecuencia de esto los baños de Alejandría se calentaron con el fuego de los rollos de pergamino.

Tras la captura de Alejandría por los mahometanos, la mayoría de los sabios emigraron a Constantinopla, que se había convertido en la capital del Imperio Romano de Oriente. Pese a que no florecía ninguna actividad respecto de las líneas del pensamiento griego en la atmósfera hostil de Bizancio, este flujo de eruditos y sus trabajos de relativa calidad incrementaron el tesoro del conocimiento que llego hasta Europa 800 años después.

Resulta quizá fuera de lugar contemplar lo que podía haber sido. Pero no se puede dejar de considerar que la civilización grecoalejandrina termino su activa vida científica en los umbrales de la era moderna. Fue la poco habitual combinación de intereses teóricos y prácticos que demostró ser fecunda 1000 años después. Durante los últimos siglos de su existencia, gozaron de libertad de pensamiento, que es también esencial para una cultura floreciente y abordaron y llevaron a cabo avances de gran relevancia en varios campos que fueron los que se convirtieron en primordiales durante el Renacimiento: geometría cuantitativa plana y del espacio, trigonometría, álgebra, calculo y astronomía.

Se dice que el hombre propone y Dios dispone. Es mas acertado decir que los griegos y Dios propusieron y el hombre dispuso.

BIBLIOGRAFIA:

- ***PAGINAS WEB CONSULTADAS:***

1.- http://wwwcaminantes.net/web/biografias.htm

2.- http://www.terra.es/personal/jjtjjt/biografias/Apolonio.htm

3.- http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/pagjor/cuadro.htm

4.- http://www.memo.com.co/fenonimo/aprenda/biogresult.php3?bio=571

5.- http://www.alephv.clartu.edu/~djoice/hcme.html**.**

- ***LIBROS DE TEXTO CONSULTADOS:***

1.- ***Elementos*** **Libros I-IV. Editorial:Biblioteca Clásica Gredos.**

2.- ***Elementos*** **Libros V-IX. Editorial:Biblioteca Clásica Gredos.**

3.- ***Historia de las Matemáticas*****. Autor: Julio Rey Pastor.**

4.- ***Historia de las Matemáticas*****. Autor: Jean-Paul Collette.**

5.- ***Lecciones de Historia de las Matemáticas*****. Autor: H. Wussing.**

6.- Historia de la Filosofía Griega. Editorial: Gredos; Autor: W.K.C. Gunthrie.

7.- Historia de la Matemática. Editorial: Alianza Editorial; Autor: B. Carl Boyer.

8.- La Historia de los Matemáticos Griegos. Editorial: Oxford University Press.

Todos estos libros pueden ser revisados en la Biblioteca de Castilla-La Mancha situada en el Alcázar de Toledo.