

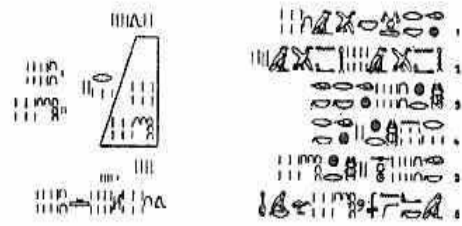
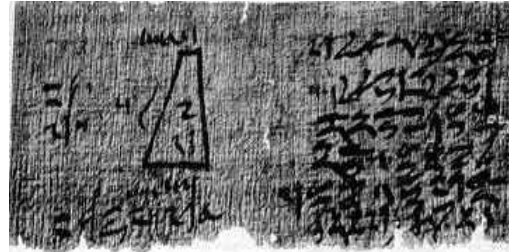
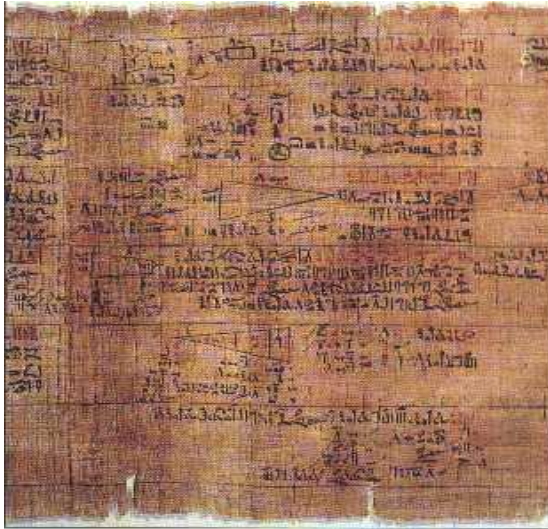


**INDICE:**

1. INTRODUCCIÓN.	1
2. EL PAPIRO DE RHIND.	4
2.1. PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN DE LOS MÁS REPRESENTATIVOS.	12
3. EL PAPIRO DE MOSCÚ.	31
3.1. PROBLEMAS MÁS INTERESANTES.	35
4. OTROS PAPIROS DE INTERÉS.	37
5. CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LOS PAPIROS.	41
5.1. NÚMEROS CARDINALES.	41
5.2. LOS NOMBRES DE LOS NÚMEROS	44
5.3. NÚMEROS ORDINALES.	45
5.4. ARITMÉTICA. OPERACIONES BÁSICAS.	46
5.5. FRACCIONES.	51
5.6. ARITMÉTICA DE FRACCIONES.	57
5.7. EL ÁLGEBRA.	62
5.8. REPARTOS PROPORCIONALES, REGLA DE TRES Y PROGRESIONES.	65
5.9. GEOMETRÍA. Calculo de areas.	67
5.10. TRIGONOMETRÍA.	72
5.11. UNIDADES, PESOS Y MEDIDAS.	73
 BIBLIOGRAFÍA	 78

## 1. INTRODUCCIÓN.

Los conocimientos que tenemos sobre la matemática egipcia se basan



en 2 documentos: **el papiro de Moscú**, y **el papiro de Rhind**. El primero se encuentra en un museo de la ciudad de Moscú y el segundo en el Museo Británico de Londres. Este último debe su nombre al anticuario escocés Henry Rhind. Los papiros están compuestos de planteamientos de problemas y su resolución. En el papiro de Moscú tenemos **25 y 87** en el papiro Rhind. Es de suponer que ambos tenían una intención puramente pedagógica, con ejemplos de resolución de problemas triviales. Los papiros datan del año 1650 a.C. (Rhind) y 1800 a.C. (Moscú), pero los conocimientos que en ellos aparecen bien podrían fecharse en el años 3000 a.C.

El papiro Rhind es también conocido como papiro de Ahmes, escriba autor de la obra y comienza con la frase: "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". El papiro de Moscú es de autor desconocido. Otros papiros complementarios son el rollo de cuero, con 26 operaciones de sumas de fracciones de numerador 1, y los de Kahun, Berlín, Reiner y Ajmin.

Como en todos los aspectos cotidianos los egipcios fueron fieles a sus tradiciones, y la evolución producida a lo largo de 2000 o 3000 años fue mínima. En matemáticas los conocimientos demostrados a mediados del primer milenio eran posiblemente los mismos que en el tercer milenio. Las

operaciones se realizaban de una determinada forma porque siempre se había hecho así. Los antiguos métodos de sumas, divisiones o resolución de ecuaciones simples se seguían empleando durante el Reino Nuevo, y hasta la llegada de la matemática griega.

Ciertamente sobre la base de los 2 papiros más importantes de matemáticas no podemos sacar unas conclusiones claras de los conocimientos reales de los escribas egipcios en cuestiones de cálculo. Ya hemos dicho que los papiros tenían una intención puramente pedagógica muy básica. Está básicamente destinado a la enseñanza de contabilidad a los funcionarios del estado, y no es para nada una obra de conocimientos matemáticos. De ellos no podemos extraer mas que conocimientos básicos de matemáticas. No sabemos si realmente los egipcios conocían sistemas mas avanzados de cálculo, pero sí que la base de sus matemáticas era bastante árida. Como ya veremos más adelante los métodos empleados para el cálculo de sumas de fracciones o multiplicaciones básicas no eran para nada sencillas. No se puede afirmar que los conocimientos matemáticos egipcios se cerrasen con lo que aquí vamos a explicar, o lo que aparece en el papiro Rhind, pero tampoco tenemos pruebas de que fuesen más allá ni de que existiesen sistemas más avanzados, si bien es cierto que debían conocerlos, al menos los arquitectos y técnicos.

En el papiro Rhind tenemos operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números enteros y fracciones, potencias, raíces cuadradas, resolución de problemas con una incógnita, áreas de triángulos y trapecios y cálculo de algunos volúmenes. Los métodos se usaban tal y como durante generaciones se habían aprendido sin más. Existía una fórmula para el cálculo de ciertas áreas o volúmenes igual que existía un método para sumar o restar, pero esa fórmula cometía los mismos errores de precisión que 1000 años antes y nadie se debió molestar en encontrar otra más precisa. ¿Por qué?. ¿Quiere esto decir que la fórmula era lo bastante exacta para las mediciones cotidianas?. ¿Existía algún sistema de corrección de estos errores?. El cálculo de la superficie del círculo se realizaba como el cuadrado de  $\frac{8}{9}$  del diámetro. Si consideramos un círculo de radio 100 obtendríamos un valor de la superficie de 7901.23. Esto nos daría un valor de pi de 3.160492. pi es un número

irracional con un valor, considerando los primeros 7 decimales de 3.1415926. El valor obtenido por los egipcios es realmente cercano, el error cometido es aproximadamente 2 centésimas (3.1625). Resolvían ecuaciones de segundo grado y raíces cuadradas para aplicarlas a los problemas de áreas.

Aunque la suma funcionaba bien, el sistema de numeración egipcio presentaba algunas dificultades aritméticas, entre las que destacaba la práctica imposible de organizarlos para multiplicar. Sin embargo, consiguieron que la aritmética fuera su fuerte; la multiplicación y las fracciones no tenían secretos para ellos. La multiplicación se realizaba a partir de duplicaciones y sumas, y en la división utilizaba la multiplicación a la inversa. El sistema de numeración egipcio, era un sistema decimal (de base 10) por yuxtaposición.

Los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es uno y cuyo denominador es 2,3,4,..., y las fracciones  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{4}$ , y con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo.

Dominaban perfectamente los triángulos gracias a los anuladores. Los anuladores egipcios hacían nudos igualmente espaciados que servían para medir; fueron los primeros en observar que uniendo con forma de triángulo, cuerdas de distintas longitudes se obtiene un ángulo recto, también conseguían mediante estos nudos triángulos rectángulos.

Los Papiros nos han dejado constancia de que los egipcios situaban correctamente tres cuerpos geométricos: el cilindro, el tronco de la pirámide y la pirámide. La utilidad de cálculo volumétrico resultaba fácil: se precisaba, entre otras cosas, para conocer el número de ladrillos necesarios para una construcción.

## **2. EL PAPIRO RHIND.**

En 1858 el egiptólogo escocés A. Henry Rhind visitó Egipto por motivos de salud (padecía tuberculosis) y compró en Luxor el papiro que actualmente se conoce como papiro Rhind o de Ahmes, y que se encontró en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Rhind murió 5 años después de la compra y el papiro fue a parar al Museo Británico. Desgraciadamente en esa época gran parte del papiro se había perdido, aunque 50 años después se encontraron muchos fragmentos en los almacenes de la Sociedad histórica de Nueva York. Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres. Comienza con la frase "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios".

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y su resolución. Nos da información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el 1650 a.C. a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica Ahmes al principio del texto, aunque nos resulta imposible saber qué partes corresponden a estos textos anteriores y cuáles no.



\* Papiro de Rhind.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para nosotros representa una guía de las matemáticas del Antiguo Egipto, pues es el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores, importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los problemas aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomadas de las propias experiencias de los escribas, representa una fuente de información valiosísima.

En realidad, se puede considerar este papiro como un tratado de aritmética. Una especie de "Manual del calculista". Tiene partes teóricas, en particular sobre las progresiones, y da ejemplos de problemas algebraicos que llevan a ecuaciones de primer grado. En buenas cuentas, no da ningún método para resolver los problemas sino que, solamente, se encuentran sus soluciones.

No se ve en ellos un procedimiento deductivo sino, únicamente, muestran una especie de tablas o recetas para resolverlos. Así, por ejemplo, aparece en el papiro mencionado la costumbre egipcia de expresar toda fracción en una suma de fracciones de numerador la unidad. De esta forma, aparece la fracción  $2/47$  descompuesta de la siguiente forma

$$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$$

Es necesario hacer notar que ellos no escribían  $2/47$  sino que la descomposición anotada. Esto nos induce a pensar que tenían el concepto de solo una parte alícuota ( $1/47$ ) pero no de dos ( $2/47$ ). Aparece una serie de fracciones de esta forma, algunas son correctas y otras falsas. No había, por supuesto, un procedimiento general para hacer estas descomposiciones sino que, sin duda, se ha procedido solo por tanteos.

Contiene el papiro una tabla que da la descomposición de todas las fracciones de la forma  $2/(2n-1)$  siendo  $1 < n < 49$ . Es decir todas las fracciones de denominador impar desde  $2/3$  hasta  $2/97$ .



Por otro lado, presenta una especie de álgebra de aspecto muy pintoresco, existiendo una serie de símbolos para representar a los actuales. En efecto, se encuentra que nuestros signos + y – estaban representados por dos piernas en actitud de caminar y dirigidas hacia la derecha e izquierda, respectivamente. Hay en esto, pues, un principio de dirección, de un sentido geométrico. El signo de la incógnita estaba representado por un montón o bien por un ibis escarbando el suelo. La igualdad estaba representada por  $\frac{3}{4}$ , o por un escarabajo, símbolos del devenir. Ahora, el símbolo indicado significa "mayor o igual".

Las fórmulas que aparecen en este papiro son solo aproximadas. Se toma en cuenta la forma de las figuras, rectilínea o circular, y la longitud de las líneas que la limitan.

Las figuras que aquí se encuentran limitadas por rectas son, en su mayoría, triángulos rectángulos, triángulos equiláteros y trapezios isósceles.

Una de las formulas que da referente al triangulo isósceles de lado a y base c es su área  $S = ac/2$ .

Para un trapezoide de lados a, b, c y d aparecen la formula  $S = (a+c)/2 \cdot (b+d)/2$ . Pero esta formula es exacta cuando el trapezoide se transforma en un rectángulo.

Para la superficie del circulo se encuentra la expresión  $S = (8/9 d)^2$ , siendo d el diámetro. Si en esta fórmula se expresa el diámetro en función del radio, obtenemos  $S = 256/81 r^2$ , la cual implica el valor 256/81 para nuestro p, que da aproximadamente 3,1604. La formula dada por los egipcios es empírica y puede decirse que, prácticamente tiene el mismo valor de la que usamos nosotros.

Asimismo, se encuentran en el papiro la resolución de otros problemas que se basan en la semejanza de figuras.

Se sabe, además que las parcelaciones eran rectangulares y que, por lo tanto, tenían la necesidad de trazar ángulos rectos. Para este fin, se valían de

un instrumento especial que consistía en un triángulo rectángulo hecho de cordeles, el cual les permitía construir perpendiculares en el terreno. Los lados de este triángulo estaban en la razón 3:4:5. En un cordel, ellos aplicaban a partir de un punto tres veces cierta magnitud cualquiera, y hacían un nudo; enseguida, la aplicaban cuatro y después cinco veces, haciendo cada vez un nudo. Según lo dicho, se podría pensar que ellos conocían el Teorema de Pitágoras, pero la verdad es que no se tiene ni se ha encontrado entre ellos un triángulo rectángulo que este construido por otros lados que no sean los mencionados anteriormente. En consecuencia, no cabe duda que el triángulo rectángulo que usaron lo encontraron por experiencias, prácticamente. Los especialistas en el manejo de esta cuerda con nudos eran los Harpedonautas, que corresponden a los agrimensores o literalmente a los "estiradores de cuerda".

Aparecen también, en este papiro, problemas sobre el cálculo de alturas de pirámides, mediante procedimientos gráficos. Por ejemplo, para el caso de una pirámide triangular, de la cual al conocerse sus caras puede determinarse su altura: separaban las caras y las colocaban en un plano.

En cuanto al autor, poco se conoce de él. Por su escritura parece que Ahmes no era un simple escriba, pero se desconocen los detalles de su educación.

El contenido del papiro Rhind, publicado por Richard J. Gillins en "Mathematics in the Time of the Pharaohs" es el siguiente:

Problemas	
1 - 6	Reparto de 1,2,6,7,8 y 9 barras entre 10 hombres
7 - 20	Multiplicación de fracciones
21 - 23	Sustracción

24 - 29	Búsqueda de números (28 y 29) y ecuaciones resueltas por "regula falsi" (24 a 27)
30 - 34	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante divisiones.
35 - 38	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante la regla de la falsa posición
39 - 40	Progresiones aritméticas
41 - 46	Volúmenes
47	Tabla de fracciones de 1 hekat en fracciones ojo de Horus
48 - 55	Áreas de triángulos, rectángulos., trapecios y círculos
56 - 60	Pendientes, alturas y bases de pirámides
60 - 61B	Tabla de una regla para encontrar $\frac{2}{3}$ de impares y fracciones unitarias
62	Peso de metales preciosos
63	Repartos proporcionales
64	Progresión aritmética
65	División proporcional de granos en grupos de hombres
69 - 78	Intercambios, proporción inversa, cálculos de "pesu"
79	Progresión geométrica
80 - 81	Tablas de fracciones ojo de Horus de grano en términos de hinu
82 - 84	Problemas, no claros, sobre cantidades de comida de gansos, pájaros y bueyes
85	Escritura enigmática. En el papiro aparece al revés.

86 - 87	Memorandum de ciertas cuentas e incidentes, gran parte perdida.
---------	---

Antes de proponer el primer problema Ahmes da una tabla de descomposición de  $n/10$  para  $n = 1, \dots, 9$ , para facilitar los cálculos de los siguientes problemas y otra en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. Estas tablas son las siguientes:

**Tabla 2/n**

5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	40,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195
19	12,76,114	67	40,335,536
21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710
25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162

35	30,42	83	60,332,415,498
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

**Tabla 1/10**

1/ 10	1/10
2/10	1/5
3/10	1/5 + 1/10
4/10	1/3 + 1/5
5/10	1/2
6/10	1/2 + 1/10
7/10	2/3 + 1/30
8/10	2/3 + 1/10 + 1/30
9/10	2/3 + 1/5 + 1/30

## 2.1. PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN DE LOS MÁS REPRESENTATIVOS.

### Problemas 1 a 6: Reparto de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 barras entre 10 hombres.

Los problemas 1 a 6 se refieren a repartos de 1,2,6,7,8,9 hogazas de pan entre 10 hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias y  $2/3$ . En ellos el escriba da el resultado y se limita a comprobar que la solución es la correcta. Nos llama la atención la forma en la que Ahmes comprueba el resultado para el caso de  $n=1$ , el **problema 1**. Esta es la resolución del problema:

*Cada hombre recibe  $1/10$  de hogaza.*

*Multiplica  $1/10$  por 10 hazlo de esta forma.*

1 —  $1/10$

2 —  $1/5$

4 —  $1/31/15$

8 —  $2/3 \ 1/10 \ 1/30$

En efecto siguiendo el método de multiplicación hace  $8 \rightarrow + 2 = 10$   
 $1/5 + 2/3 + 1/10 + 1/30 = 1$  luego la solución es correcta, pues  $10 * 1/10 = 1$ .

Vemos que Ahmes parece complicarse un poco la vida con este tipo de demostraciones, pero debemos tener en cuenta que los egipcios no manejaban los conceptos aritméticos tal y como podemos hacerlo ahora que nuestra instrucción es superior. Efectivamente, aunque nos parezca una comprobación innecesaria, hay que tener en cuenta que es lo que se enseñaba a los niños de hace 4000 años.

**Problema 3.** Repartir 6 barras de pan entre 10 hombres.

Aquí Ahmes da como resultado  $1/2 + 1/10$  y así lo escribió:

1	→	1	$1/10$
*2	→	1	$1/5$
	→		
	→		

---

4	2	1/3	1/15
*8	4	2/3	1/10 1/30

10  $\rightarrow$  6 luego el resultado es correcto.

**Problema 6.** Repartir 9 barras de pan entre 10 hombres.

En este caso Ahmes sólo da la solución al problema, afirmando que el resultado es  $2/3 + 1/5 + 1/30$  y verificando que al multiplicar el resultado anterior por 10 se obtiene 9.

**Problemas 7 a 20: Multiplicación de fracciones.**

Son problemas referidos a multiplicaciones de números expresados mediante fracciones unitarias. Reproducimos aquí los problemas 9 y 14, con multiplicación directa y empleo de los números rojos.

**Problema 9:** Multiplica  $1/2 + 1/14$  por  $1+1/2+1/4$

Reproducimos este problema porque en él aparece aplicada la **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma. El escriba multiplica  $1/2 + 1/14$  por cada uno de los multiplicandos y luego suma los resultados.

$$1\text{-----} 1/2 + 1/14$$

$$1/2\text{-----} 1/4 + 1/28$$

$$1/4\text{-----} 1/8 + 1/56$$

---


$$1 \ 1/2 \ 1/4 \text{ ---- } 1/2 \ 1/4 \ 1/8 \ 1/14 \ 1/28 \ 1/56$$

y suma los resultados parciales obteniendo como producto 1. El método empleado es sumar primero  $1/14 \ 1/28 \ 1/56$  ( $= 1/8$ ). La suma queda reducida ahora a  $1/2 \ 1/4 \ 1/8 \ 1/8$  y después realiza sumas equivalentes para poder aplicar el método de reducción

$$1/ \ 1/4 \ 1/8 \ 1/8 = 1/2 \ 1/4 \ 1/4 = 1/2 \ 1/2 = 1$$

**Problema 14:** Debe multiplicarse  $1/28 * (1 + 1/2 + 1/4)$ . EN este problema el escriba hace uso de los números rojos, explicados anteriormente. El inicio de la solución emplea el mismo método anterior

1-----1/28

1/2-----1/56

1/4-----1/128

Y ahora en lugar de proceder como en el caso anterior selecciona el "número rojo" 28, de forma que al aplicarlo a las fracciones de la derecha pueda obtener fracciones sencillas. El razonamiento es el siguiente:

1/28 partes de 28 es 1

1/56 partes de 28 es 1/2

1/128 partes de 28 es 1/4

Y ahora debemos determinar cuantas partes de 28 son iguales a  $1 + 1/2 + 1/4$ , es decir hemos de buscar un número tal que al multiplicarlo por  $1 + 1/2 + 1/4$  nos de 28. Ahora nos encontramos con una solución bastante sencilla, en otros casos no es tan obvia, aunque para el alumno no debía existir solución sencilla, y se limitaba a aplicar lo que le habían enseñado. El razonamiento es:

1 -----  $1 + 1/2 + 1/4$

2 -----  $3 + 1/2$

4 ----- 7

8 -----14

16 ----- 28

Luego el número buscado en este caso es el 16. Esto significa que la solución del problema es 16.

¿El alumno, e incluso el escriba comprendían lo que estaban haciendo, o se limitaban a aplicar lo que les habían enseñado, cambiando los números según las necesidades?. Es difícil responder, pero quizás el "profesor" pudiese ver más allá, y comprender el procedimiento, pero si fuese así logicamente el método de la multiplicación lo debía tener totalmente asumido y en ese caso



deberían haber encontrado una forma más sencilla de resolver este tipo de problemas.

**Problema 13.** Multiplica  $1/16 + 1/112$  por  $1 + 1/2 + 1/4$

En este problema se da el resultado  $1/8$ .

**Problemas 21 a 23: Sustracción.**

Los problemas 21, 22 y 23 son de sustracciones de fracciones y los 3 se resuelven mediante el uso de los números rojos.

**Problema 21:** Averigua la cantidad que falta a  $2/3 + 1/15$  para obtener la unidad.

Ahmes toma como número rojo el 15 (buscando la simplificación) y aplica:

$$2/3 \text{ de } 15 = 10$$

$$1/15 \text{ de } 15 = 1$$

Entonces ahora tenemos que  $2/3$  de 15 +  $1/15$  de 15 es 11. Como 15, el número rojo, supera a 10 en 4 unidades, hemos de calcular el número de partes de 15 que da un total de 4, es decir  $4:15$ .

1	15
$1/10$	$1 \frac{1}{2}$
$1/5$	3
$1/15$	1

como 4 (el dividendo) =  $3 + 1 \rightarrow 4/15 = 1/5 + 1/15$

**Problema 22.** Averigua la cantidad que falta a  $2/3 + 1/30$  para obtener 1

En este caso se toma como número rojo el 30. Según "la teoría de los números rojos" se aplica el razonamiento:  $2/3 + 1/30$  de 30 es 21. Como 30 supera a 21 en 9 unidades debemos determinar el número de partes de 30 que dan un total de 9, es decir debemos dividir  $9/30$ . Siguiendo el procedimiento

habitual para la división obtenemos:

$$1 \quad 30$$

$$1/10 \quad 3$$

$$1/5 \quad 6$$

Entonces  $6+3 = 9 \rightarrow 9/30 = \mathbf{1/10 + 1/5}$  que es la solución buscada.

La solución no siempre es tan sencilla, y en ocasiones las operaciones se complican bastante.

**Problema 23.** Completa  $1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45$  hasta  $2/3$

En este caso Ahmes selecciona el 45 como número rojo, y aplica la misma teoría anterior.

$$1/4 \text{ de } 45 \text{ es } 11 + 1/4$$

$$1/8 \text{ de } 45 \text{ es } 5 + 1/2 + 1/8$$

$$1/10 \text{ de } 45 \text{ es } 4 + 1/2$$

$$1/30 \text{ de } 45 \text{ es } 1 + 1/2$$

$$1/45 \text{ de } 45 \text{ es } 1$$

$$2/3 \text{ de } 45 \text{ es } 30$$

Sumando ahora las cantidades correspondientes al enunciado obtenemos  $1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45 = 23 + 1/2 + 1/4 + 1/8$ , es decir faltan  $6 + 1/8$  para llegar a 30 ( el valor correspondiente a  $2/3$  con el número rojo 45). Ahora hemos de averiguar cuantas partes de 45 son  $6 + 1/8$ , o lo que es lo mismo dividir  $6 + 1/8$  entre 45.

$$1 \quad 45$$

$$1/10 \quad 4 \quad 1/2$$

$$1/20 \quad 2 \quad 1/4$$

$$1/40 \quad 1 \quad 1/8$$

$$1/9 \quad 5$$

$5 + 1 + 1/8 = 6 + 1/8$  que es la cantidad buscada -> la solución es  **$1/9 + 1/40$**

A pesar de que aquí he puesto los cálculos directos, tal y como aparecen en el original, no debe pensarse que el escriba llegaba a estas conclusiones tan fácilmente, y posiblemente necesitase gran cantidad de operaciones intermedias que no aparecen reproducidas en el papiro.

**Problemas 24 a 29: Búsqueda de números, ecuaciones resueltas por “regula falsi” (24 – 27).**

Se refieren a ecuaciones lineales de una incógnita. El método empleado para la resolución es el “regula falsi”, o regla de la falsa posición. El sistema consiste en calcular el valor buscado a partir de uno estimado.

**Problema 24.** Una cantidad mas  $1/7$  de la misma da un total de 19. ¿Cuál es la cantidad?

El problema se limita a resolver la ecuación  $x + x/7 = 19$

Ahmes parte en este caso de un valor estimado de 7 y calcula  $7 + 7/7 = 8$ . Entonces ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 19, es decir hay que dividir  $19/8$ . El valor buscado entonces será  $7 \cdot N$

$$1 \quad 8$$

$$2 \quad 16$$

$$1/2 \quad 4$$

$$1/4 \quad 2$$

$$1/8 \quad 1$$

$16 + 2 + 1 = 19 \rightarrow 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$ . Este es el valor a multiplicar por 7 para obtener la x buscada.

$$1 \ 2 + 1/4 + 1/8$$

$$2 \ 4 + 1/2 + 1/4$$

$$4 \ 9 + 1/2$$

Entonces el valor buscado es  $2 + 1/4 + 1/8 + 4 + 1/2 + 1/4 + 9 + 1/2 = 16 + 1/2 + 1/8$

**Problema 26.** Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, y se pide calcular la cantidad.

Para nosotros este problema se traduce en resolver la ecuación  $x + 1/4x = 15$ . Reproducimos los pasos del papiro, y más abajo la explicación de cada uno de ellos. Ahmes escribe:

1.- "Toma el 4 y entonces se hace 1/4 de él en 1, en total 5"

Ahmes parte en este caso de un valor estimado de  $x=4$ , el más sencillo para anular la fracción, y calcula  $4 + 1/4 * 4 = 5$ .

2.- "Divide entre 5 15 y obtienes 3"

Ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 15, es decir  $5*N = 15$ ,  $N=15/5 = 3$

3.- "Multiplica 3 por 4 obteniendo 12"

El valor buscado es el resultado de multiplicar la N anterior por el valor estimado inicial, estos es  $3 \times 4$  que es la cantidad buscada.

Ahmes sigue después: "cuyo (referido al 12 anterior) 1/4 es 3, en total 15"

**Problemas 30 a 34: Ecuaciones lineales mas complicadas resueltas mediante divisiones.**

Se refieren a ecuaciones lineales mas complicadas resueltas mediante divisiones.

**Problema 31.** Literalmente dice: "Una cantidad, sus  $\frac{2}{3}$ , su  $\frac{1}{2}$ , su  $\frac{1}{7}$ , su totalidad asciende a 33"

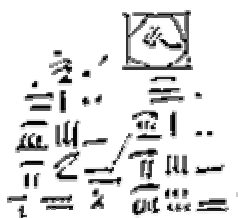
Para nosotros esto significa una ecuación  $\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33$  ,  
x=cantidad

Ahmes resuelve el problema mediante complicadas operaciones de división.

**Problemas 48 a 55: Áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos.**

Estos 8 problemas se refieren al cálculo de áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos. Reproducimos el 51 y el 52 correspondientes a áreas de triángulos y los problemas 48 y 50 por ser unos de los más importantes del papiro, ya que es en estos en los que calcula el área del círculo.

**Problema 48.** Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito.




Este problema tiene gran importancia por 2 razones. Por una parte

representa el primer intento de una geometría basada en la utilización de figuras sencillas, cuyo área se conoce, para obtener el área de figuras más complicadas, y por otra parte puede ser la fuente del cálculo del área del círculo con un valor de  $\pi = 3.1605$  que aparece en el problema 50.

La resolución es la siguiente:

El escriba considera un diámetro igual a 9 y calcula el área del círculo como la de un cuadrado de lado 8 ( como hace en el problema 50). Obtiene así un valor de 64 setat.

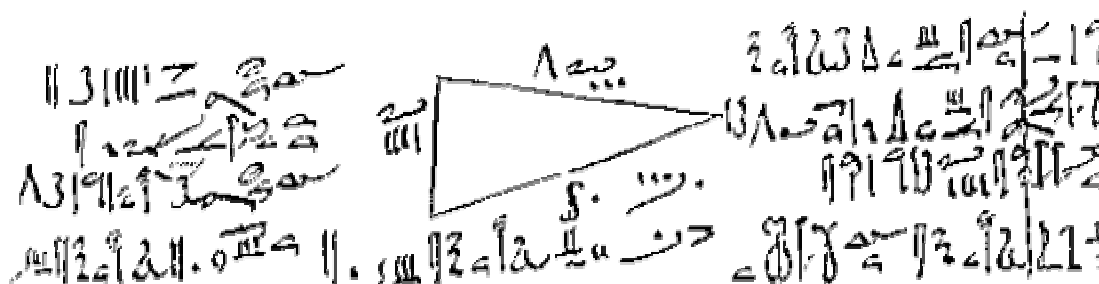
Según se ve en la figura del problema, en el cuadrado de 9 jet de lado  se dividen los lados en tres partes iguales formando luego un octógono. Ahmes elimina los triángulos formados en los vértices del cuadrado. El área del octógono es  $A = 9^2 - 4 * (3*3)/2 = 63$ . Quizás Ahmes pensó que el área del círculo circunscrito era algo mayor que la del octógono representado.

**Problema 50.** Calcular el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 jet.

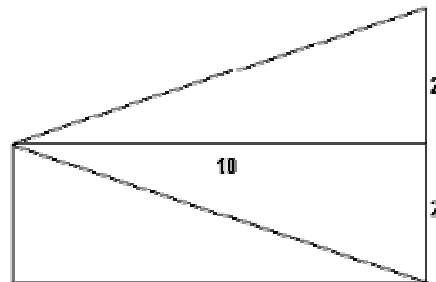
Aquí Ahmes se limita a calcular el área del círculo considerándolo igual a la de un cuadrado de lado 9. Ahmes dice: Resta al diámetro 1/9 del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Este es el área del círculo.

El escriba está empleando la siguiente fórmula  $A = (d - 1/9d)^2$  Si comparamos esta fórmula con la real.  $A = (\pi * d^2)/4$  se obtiene un valor para  $\pi = 256/81 = 3.1605$  o como aparece en muchos sitios  $4*(8/9)^2$ . No se sabe como Ahmes llega a esta aproximación, y se ha considerado que quizás sea la resolución del problema 48 la que le lleva a estas conclusiones. Este mismo valor  $4*(8/9)^2$  es empleado posteriormente para resolver un problema en el que se pide hallar el volumen de un cilindro de diámetro 9 y altura 6.

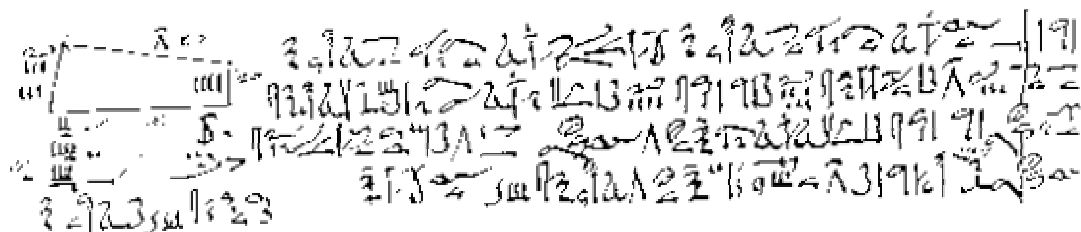
**Problema 51.** ¿Cuál es el área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet?



Según esta resuelto el problema, parece que el triángulo es isósceles y queda dividido en 2 partes iguales por la altura, con las que forma un rectángulo, siendo la altura lo que Ahmes llama lado. El escriba lo resuelve así: Toma la mitad de 4 para formar un rectángulo. Multiplica 10 veces 2 y el resultado 20 es el área buscada.

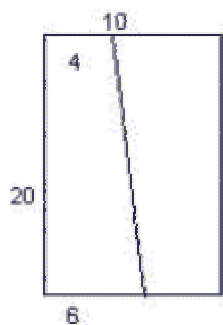


**Problema 52.** ¿Cuál es el área de un triángulo truncado de 20 jet de lado, 6 jet de base y 4 jet en su línea de sección?



Ahmes lo resuelve de la siguiente manera: Suma su base a su segmento de corte; se obtiene 10. Toma la mitad de 10, que es 5, para formar un rectángulo. Multiplica a continuación 20 veces 5 y el resultado, 100, es el área buscada.

Si observamos la resolución se deduce que el triángulo truncado es un trapecio isósceles obtenido mediante una recta paralela a la base. a partir de la cual se construye el rectángulo. En el siguiente dibujo, no a escala, podemos verlo



**Problemas 56 a 60: Pendientes, alturas y bases de pirámides.**

Pendientes, alturas y bases de pirámide. El problema 56 es importante porque contiene aspectos de trigonometría y de una cierta teoría de semejanza de triángulos.

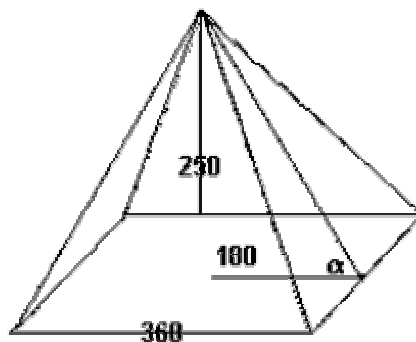
**Problema 56.** ¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado en la base?.

El seqt es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. En mediciones verticales se utilizaba como unidad de medida el codo y en horizontales la mano o palmo, que equivalía a  $1/7$  del codo.

La resolución presentada por Ahmes es:

- Calcula  $1/2$  de 360 que da 180.
- Multiplica 250 hasta obtener 180, que da  $1/2 + 1/5 + 1/50$ .
- Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora 7 por  $1/2 + 1/5 + 1/50$  que da  $5 + 1/25$ . Luego el seqt es **5+1/25 palmos por codo**

Si representamos una figura con los datos del problema:





El seqt efectivamente coincide con la cotangente de  $\alpha$ , es decir es la pendiente de las caras laterales de la pirámide.

**Problema 60.** ¿Cuál es el seqt de una pirámide de 15 cubits de base y 30 cubits de altura?.

Este problema es resuelto de la misma forma que el anterior, pero con una salvedad; hay un error, el escriba olvidó multiplicar el resultado de dividir la mitad de la base entre la altura por 7. El resultado que da es por tanto erróneo.

### **Problema 62 . Pesado de metales preciosos**

Este problema es el único del papiro Rhind en el que se mencionan pesos. Una bolsa contiene el mismo peso de oro, plata y plomo. El valor total es de 84 shaty. Se da el valor por deben de cada uno de los metales, siendo el oro 12 shaty, la plata 6 shaty y el plomo 3 shaty. Se pide calcular el valor de cada metal y se resuelve así:

Valor total = 84 shaty

Valor total para 1 deben de oro, 1 deben de plata y 1 deben de plomo = 21 shaty

Peso de cada metal =  $84/21 = 4$  deben

Valor del oro =  $12 \cdot 4 = 48$  shaty

Valor de la plata =  $6 \cdot 4 = 24$  shaty

Valor del plomo =  $3 \cdot 4 = 12$  shaty

### **Problema 63**

Repartos proporcionales. Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a  $2/3$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  y  $1/4$

Como ya vimos en el capítulo 8 los cálculos para repartos proporcionales se basan en las propiedades de las proporciones numéricas.

$$x/a = y/b = z/c = (x+y+z) / (a+b+c) \cdot N / (a+b+c)$$

La solución que da Ahmes es la siguiente:

- Halla la suma  $2/3 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 1 + 1/2 + 1/4$
- Divide  $1 / ( 1 + 1/2 + 1/4 )$

$$1 \quad 1 + 1/2 + 1/4$$

$$1/2 \quad 1/2 + 1/4 + 1/8$$

Considerando  $1/2$  el resultado de la división es  $1/2 + 1/4 + 1/8$  con una diferencia de  $1/8$ . Entonces ahora debe determinarse que cantidad hay que multiplicar por  $1 + 1/2 + 1/4$  para obtener  $1/8$ .

Toma 8 como número rojo. Entonces tenemos

$$8 \cdot (1 + 1/2 + 1/4) = 14$$

$$8 \cdot 1/8 = 1$$

por lo que la cantidad buscada es  $1/14 \rightarrow 1 / ( 1 + 1/2 + 1/4 ) = 1/2 + 1/14$ .

- Multiplica el resultado por 700

$$1 \quad 700$$

$$1/2 \quad 350$$

$$1/4 \quad 50$$

$700 \cdot (1/2 + 1/14) = 350 + 50 = 400$ , y este es el número buscado. Ahora solo queda repartir.

- Multiplica cada uno de los repartos por 400 se obtiene el resultado buscado:

$$400 \cdot 2/3 = 266 + 2/3$$

$$400 \cdot 1/2 = 200$$

$$400 \cdot 1/3 = 133 + 1/3$$

$$400 \cdot 1/4 = 100$$

#### Problema 64.

Progresión aritmética. Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea  $1/8$  de hekat. ¿Que parte le corresponde a cada hombre?

Si aplicamos la formulación actual para progresiones aritméticas tenemos que si  $a$  son los  $n$  términos de la progresión,  $d$  la diferencia y  $S$  la suma:

$$S = (a_1 + a_n) \cdot n / 2 \rightarrow a_n = S/n + (n-1) \cdot (d/2)$$

Así es, exactamente, como lo resuelve Ahmes, no sabemos si por propio razonamiento lógico o aplicando una formulación conocida. Hace:

- El número de diferencias es 9, una menos que el número de hombres.
- Multiplica este número por la mitad de la diferencia ( $1/16$ ).  $9 \cdot 1/16 = 1/2 + 1/16$
- Suma este resultado al promedio de las partes  $1 + 1/2 + 1/16$
- Para obtener las partes restantes resta sucesivamente la diferencia  $1/8$  a esta cantidad. Se obtiene:

$1 + 1/2 + 1/16$ ,  $1 + 1/4 + 1/8 + 1/16$ ,  $1 + 1/4 + 1/16$ ,  $1 + 1/8 + 1/16$ ,  $1 + 1/16$ ,  
 $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$ ,  $1/2 + 1/4 + 1/16$ ,  $1/2 + 1/8 + 1/16$ ,  $1/2 + 1/16$ ,  $1/4 + 1/8 + 1/16$ . Si  
 sumamos todos los términos obtenemos precisamente 10.

### **Problemas 69 a 78: Intercambios, proporción inversa, cálculos de “pesu”.**

Intercambios, proporción inversa. Aquí, aunque Gillins establece una familia de problemas iguales, se puede hacer una subdivisión. Los 4 primeros problemas se refieren a cálculos de pesu de pan o cerveza y el resto a intercambios, en los que se emplea también el pesu.

**Problema 69.**  $3 \frac{1}{2}$  hekats de harina dan lugar a 80 barras. Encuentra la cantidad de harina en cada barra y el pesu.

Para resolver el problema Ahmes lo primero que hace es averiguar el número de **ro** in  $3 \frac{1}{2}$  hekats. En cada hekat hay 320 ro. Entonces multiplica  $3 \frac{1}{2}$  por 320

1 →	320
2 →	640
$1/2 \rightarrow$	160

luego en  $3 \frac{1}{2}$  hekats habrá 1120 ro.

Ahora divide 1120 entre 80 barras

1	→	80
10	→	800
2	→	160
4	→	320

luego  $1120 = 800 + 320 \rightarrow 1120/80 = 10 + 4 = 14$

Tiene por tanto 14 ro por cada barra. Ahora para determinar el pesu de cada barra divide 80 entre  $3 \frac{1}{2}$ .

1	→	$3 \frac{1}{2}$
10	→	35
20	→	70
2	→	7
$\frac{2}{3}$	→	$2 \frac{1}{3}$
$\frac{1}{21}$	→	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$	→	$\frac{1}{2}$

$70 + 7 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 80 \rightarrow 80 / (3 \frac{1}{2}) = 20 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{7}$   
**=  $22 \frac{2}{3} \frac{1}{7} \frac{1}{21}$  es el pesu.**

**Problema 71.** Este es un problema curioso sobre pesu. En una jarra de cerveza se tira  $\frac{1}{4}$  del contenido que se reemplaza por agua. Se pide averiguar el nuevo pesu de la cerveza, suponiendo que la cerveza original era el producto de medio hekat de grano.

Se resta  $\frac{1}{4}$  del original ( $\frac{1}{2}$ ) a  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} - (\frac{1}{4} * \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  hekat y ahora este resultado se divide 1 entre este resultado obteniendo un pesu de  $2 + \frac{2}{3}$ .

Este problema es importante por el uso del inverso. El escriba no apunta como se obtiene ese inverso aunque podemos hacer los cálculos según el sistema ya conocido. Debemos dividir  $1 / (\frac{1}{4} + \frac{1}{8})$

$$1 \longrightarrow 1/4 + 1/8$$

$$2 \longrightarrow 1/2 + 1/4$$

$$2/3 \longrightarrow 1/6 + 1/12$$

de la columna derecha obtenemos  $1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1 \longrightarrow 1/(1/4 + 1/8) = 2 + 2/3$

**Problema 72.** ¿Cuántas hogazas de pesu 45 equivalen a 100 hogazas de pesu 10?.

En este problema, que se resolvería actualmente por una simple regla de tres, Ahmes complica el proceso y aplica el siguiente criterio (lógicamente no aparece así representado en el papiro).

$$100/10 = x/45 = (x-100)/(45-10) \longrightarrow x = 100 + ((45-10)/10) * 100$$

Tenemos que 100 hogazas de pesu 10 se obtienen a partir de  $100/10 = 10$  hekat de harina

10 hekat de harina producirían  $10 \times 45 = 450$  hogazas de pesu 45

Pero Ahmes efectúa los pasos a partir del exceso de pesu:

- Halla el exceso de 45 respecto de 10, 35
- Divide  $35 / 10$  para obtener el exceso por barra

$$1 \quad 10$$

$$2 \quad 20$$

$$1/2 \quad 5$$

$35/10 = 3 + 1/2$  es el exceso por barra

- Multiplica  $100 * (3 + 1/2) = 350$  total de exceso sobre las 100 barras
- Suma 100 a esta última cantidad y ese es el resultado (450)

**Problema 73.** Este es un típico problema de intercambio comercial. El enunciado es "100 barras de pesu 10 se intercambian por barras de pesu 15. ¿Cuántas barras de pesu 15 debe haber?"

Ahmes escribe: "Calcula la cantidad de harina en las 100 barras. Es decir divide 100 entre 10, esto nos da 10 hekats. El número de barras de pesu 15 de 10 hekats es 150, luego este es el número de barras de pesu 15 que se deben intercambiar".

Al tratarse de un intercambio lo que hace Ahmes es igualar en hekats. Para ello basta con calcular los hekats empleados en las 100 barras de pesu 10. 1 barra de pesu 10 significa que con 1 hekat se hacen 10 barras, luego con 10 hekats se hacen 100 barras. Para igualar el intercambio deben emplearse al menos esos mismos 10 hekats. Una barra de pesu 15 significa que por cada hekat se obtienen 15 barras, luego con 10 hekats se obtendrán 150 barras, y ese es el número.

### **Problema 79.**

#### *Progresiones geométricas.*

Este es el único problema sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos hemos conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7, pero planteado de una forma extraña. En el problema se dice " 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano". Hay que suponer que Ahmes se refería a un problema, posiblemente ya conocido, en el que en cada casa hay 7 gatos, cada uno de los cuales se come 7 ratones, cada uno de los cuales se ha comido 7 espigas de grano, cada una de las cuales había producido 7 hekat de grano. Ahmes aquí no sólo da la cantidad de hekat de grano ahorrado sino que además da la suma del número de casas mas gatos mas ratones mas espigas mas hekat. Realmente es difícil interpretar el objetivo del escriba con este problema, pues la suma de todos los términos no es un objetivo lógico. Lo que si parece constituir este problema es la base de la canción infantil:

Según iba a St. Ives  
encontré a un hombre con 7 esposas  
cada esposa tenía 7 sacos,  
cada saco tenía 7 gatos,

cada gato tenía 7 gatitos

Gatitos, gatos, sacos y esposas.

**Problemas 82 a 84: Problemas, no claros, sobre cantidades de comida, de gansos, pájaros y bueyes.**

Estos problemas son relativos a la alimentación de ganado y pollos. El mayor interés estriba en la información que dan sobre la cantidad de comida a cada animal bajo diferentes condiciones. El problema 82 da el ejemplo de 10 gansos que son engordados por alimentación por fuerza y que reciben  $2 + \frac{1}{2}$  hekat de harina, en pan, por día. En el 82b el coeficiente es la mitad. En el problema 83 el mismo número de pájaros, sin un tratamiento especial, deben recibir sólo 1 hekat de grano, y los pájaros enjaulados  $\frac{1}{4}$ , debido a su menor actividad.

### **3. EL PAPIRO DE MOSCÚ.**

El papiro de Moscú, es junto con el de Rhind el más importante documento matemático del Antiguo Egipto. Fue comprado por Golenishchev en el año 1883, a través de Abd-el-Radard, una de las personas que descubrió el escondite de momias reales de Deir el-Bahari. Originalmente se le conocía como Papiro Golenishchev pero posteriormente, cuando fue a parar al Museo de Bellas Artes de Moscú, en 1917, con el número 4576, se conoce como Papiro de Moscú. Con 5 metros de longitud, y tan sólo 8 cm de anchura consta de 25 problemas, aunque algunos se encuentran demasiado dañados para poder ser interpretados. El papiro fue escrito en hierática en torno al 1890 a.C. (XII dinastía) por un escriba desconocido, que no era tan meticuloso como Ahmes, el escriba del papiro Rhind. Se desconoce el objetivo con el que fue escrito. En la imagen que mostramos se puede ver el original en hierática y la traducción en jeroglífico.

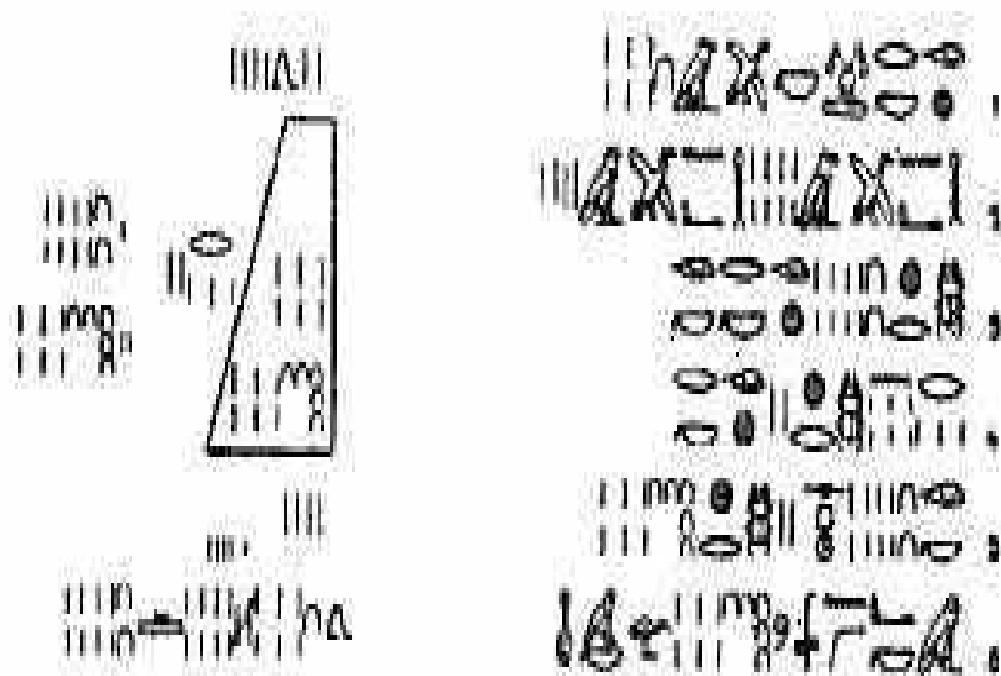
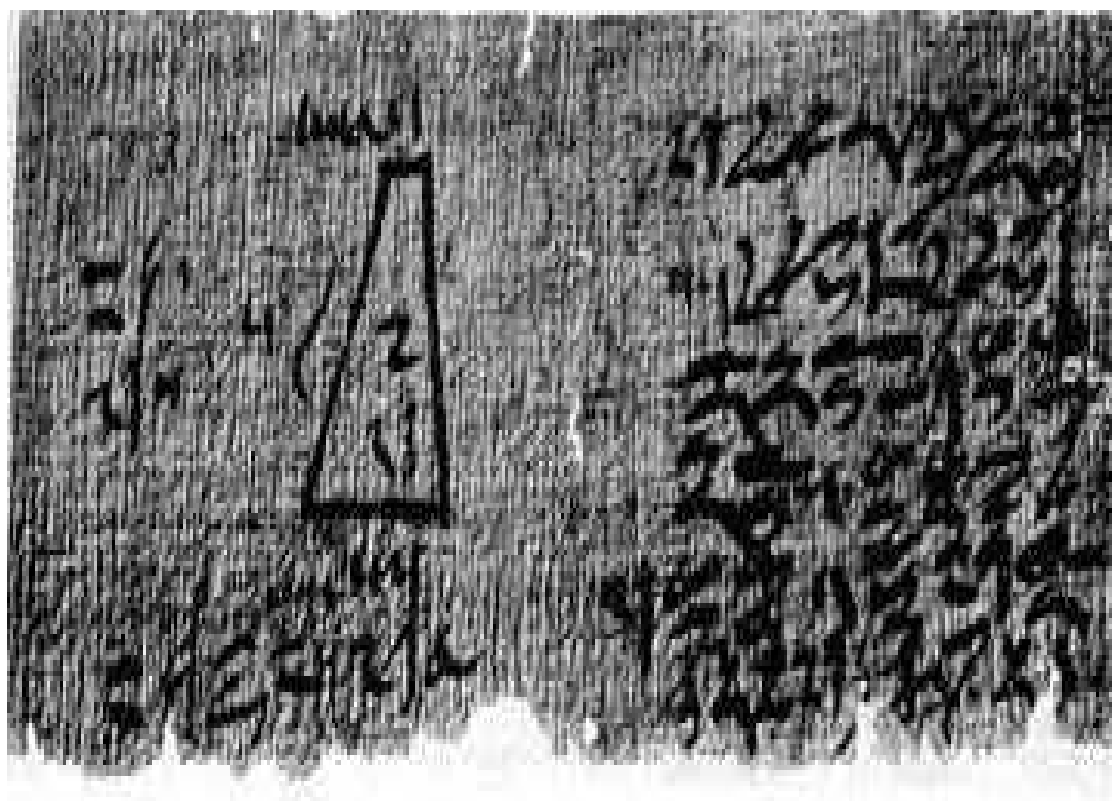
Aparece una expresión exacta para el volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas.

Fueron estas propiedades geométricas las que utilizaron los antiguos arquitectos egipcios en la construcción de sus monumentos y en el trazado de bóvedas, cúpulas, etc.

El valor de  $p = 4/\sqrt{k}$  donde  $k$  es el número áureo fue utilizado (probablemente de modo inconsciente) por los egipcios, en la construcción de la gran pirámide de Kheops. Es, en efecto, cierto que quisieron que las caras de la pirámide estuvieran formadas por las dos mitades de un rectángulo áureo; pero esta elección determinaba la altura total del monumento. Un arqueólogo demasiado entusiasta, que buscaba por todas partes mensajes científicos en la famosa tumba, observo, jugando con los números que había acumulado, que el perímetro de la base era aproximadamente el de un círculo de radio igual a  $p$ . De esta coincidencia era imprudente decir que se trataba de una cuadratura aproximada del círculo, por otra parte, muy buena, realizada por los sabios faraones como testimonio de su ciencia.



De los 25 problemas de que consta hay 2 que destacan sobre el resto; son los relativos al cálculo del volumen de una pirámide truncada (problema 14, que aparece en la imagen anterior), y el área de una superficie parecida a un cesto (problema 10). Este último es uno de los problemas más complicados de entender, pues no está clara la figura, y si la figura buscada fuese un cesto o un hemisferio entonces sería el primer cálculo de tal superficie conocido.



\* Papiro de Moscú.

El contenido del Papiro de Moscú publicado por Richard J. Gillins en "Mathematics in the time of the pharaons" es el siguiente

Problema	Descripción
1-2	Ilegibles
3	Altura de un poste de madera
4	Área de un triángulo
5	"Pesu" de barras y pan
6	Área del rectángulo
7	Área de un triángulo
8-9	"Pesu" de barras y pan
10	Área de una superficie curva
11	"Barras y cestos" (?)
12	"Pesu" de cerveza
13	"Pesu" de barras y cerveza
14	Volumen de una pirámide truncada
15-16	"Pesu" de cerveza
17	Área de triángulo
18	Mediciones en palmos y codos.
19	Ecuación lineal

20	Fracciones de Horus
21	Mezcla de pan sacrificial
22	"Pesu" de barras y cerveza
23	Cálculo del trabajo de un zapatero. Oscuro
24	Intercambios
25	Ecuación $2x+x = 9$

Los problemas que aparecen en el papiro de Moscú no están tan trabajados como los que escribió Ahmes. Una prueba de ello es el problema número 21, referente al cálculo de pan para sacrificios. En este problema el escriba dice: Método para calcular la mezcla de pan para sacrificios. Si te dicen 20 medidas como  $1/8$  de hekat y 40 medidas como  $1/16$  de un hekat, calcula  $1/8$  de 20. Resulta  $2 \frac{1}{2}$ .

Calcula ahora  $1/16$  de 40. Resulte  $2 \frac{1}{2}$ . El total de ambas mitades es 5. Calcula ahora la suma de las otras mitades. El resultado es ahora 60. Divide 5 entre 60. Resulta  $1/12$ . Entonces la mezcla es  $1/12$ . (Si a primera vista no lo entiendes no te preocupes, pero la verdad es que es así de oscuro).

### **3.1. PROBLEMAS MÁS INTERESANTES.**

#### **Problema 10: Área de una superficie curva.**

En este problema se pide calcular el área de una superficie que en principio parece un cesto de diámetro 4.5. La resolución parece emplear la fórmula  $S = (1 - 1/9)^2 (2x)*x$ , siendo  $x = 4.5$ . El resultado final que aparece es de 32 unidades. Si tenemos en cuenta que  $(1 - 1/9)^2$  es el valor correspondiente a  $\pi/4$  para  $\pi=3 \frac{1}{6}$  que como hemos visto, en el capítulo referente a geometría, era el valor empleado, entonces la superficie a analizar podría corresponderse perfectamente con una semiesfera de diámetro 4.5. Si esto fuese así, tal y como se pensó originalmente en 1930, sería el primer resultado de cálculo del

área de un hemisferio, anterior en 1500 años a los primeros cálculos conocidos sobre el área de una esfera. Posteriormente se sugirió que la figura que aparece representada podría ser un tejado semicilíndrico de diámetro 4.5 y longitud 4.5, cuya resolución es más lógica y sencilla que la de la esfera. En cualquier caso, tanto si se trata de un hemisferio como de un tejado semicilíndrico lo que si es cierto es que es uno de los primeros intentos de cálculo del área de una superficie curvilínea.

**Problema 14: Volumen de una pirámide truncada.**



En este problema se pide calcular el área de la figura. La figura parece ser un trapecio isósceles, pero realmente se refiere a un tronco de pirámide cuadrangular. Alrededor de la figura pueden verse los signos hieráticos que definen las dimensiones. En la parte superior aparece un 2, en la inferior un 4 y dentro de la figura un 56 y un 6. Según se desarrolla el problema, parece ser que lo que se busca es calcular el volumen del tronco de pirámide cuadrangular de altura 6, y 2 y 4 las bases superior e inferior. El desarrollo es el siguiente:

- Elevar al cuadrado 2 y 4
- Multiplicar 2 por 4
- Sumar los resultados anteriores
- Multiplicar el resultado anterior por un tercio de 6. El resultado es 56

El escriba finaliza diciendo "Ves, es 56; lo has calculado correctamente".

Analizando el desarrollo vemos que lo que se ha aplicado es la fórmula:

$$V = h(a^2 + b^2 + ab) / 3$$

Que por supuesto no aparece escrita en el papiro. Si consideramos ahora  $b=0$ , como se hace en el cálculo del volumen que aparece representado en Edfú, entonces se obtiene el volumen de una pirámide.

#### 4. OTROS PAPIROS DE INTERÉS.

- **Papiro de Berlín:** Debemos destacar la resolución de 2 problemas que suponen un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una de las cuales es además de segundo grado. Aunque los problemas son muy sencillos y de resolución directa no por eso tienen menos importancia, pues son la única prueba de intentos de resolver problemas de sistemas de ecuaciones y una demostración del empleo de raíces cuadradas.

**Problema.** Te dicen que el área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros 2 cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es  $1/2 + 1/4$  del otro. Averigua los lados de los cuadrados.

Para nosotros este problema se transforma en resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = (1/2 + 1/4)x$$

con x, y los lados de los cuadrados buscados.

El papiro plantea la resolución por aproximación inicial. Desarrollamos la solución tal y como aparece en el papiro.

Supón que uno de los cuadrados tiene lado 1 codo. El otro entonces será de  $1/2 + 1/4$  de codo. Las áreas son: para el primero 1 codo cuadrado y para el segundo el resultado de elevar al cuadrado  $1/2 + 1/4$ :

$$1 \quad 1/2 \quad 1/4$$

$$1/2 \quad 1/4 \quad 1/8$$

$$1/4 \quad 1/8 \quad 1/16$$

Aplicando el método de multiplicación el resultado es :  $1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 = 1/2 + 1/16$ . Entonces la suma de las 2 áreas de los cuadrados es  $1 + 1/2 + 1/16$  de codo. La raíz cuadrada de esta suma es  $1+1/4$ . Como la raíz cuadrada de 100 es 10 debemos encontrar un número N tal que al multiplicarlo por  $1+1/4$  nos de 100. Es decir hay que dividir 100 entre  $1+ 1/4$ .

$$1 \ 1 \ 1/4$$

$$2 \ 2 \ 1/2$$

$$4 \ 5$$

$$8 \ 10$$

El número buscado es 8. Entonces  $x = 8$ . Para calcular el otro cuadrado se multiplica  $1/2 + 1/4$ .

$$1 \ 8$$

$$1/2 \ 4$$

$$1/4 \ 2$$

Entonces el otro cuadrado tendrá un lado de **6 codos**.

**- Rollo de Cuero:** Fue comprado por A.H. Rhind al mismo tiempo que el Papiro de Ahmes. En muy mal estado no fue analizado hasta 60 años después de su compra y es un duplicado de otra obra matemática. Dividido en 4 partes, es un trabajo sobre equivalencias de fracciones unitarias (26). No aporta conocimientos matemáticos y parece ser el cuaderno de notas de un estudiante. Reproducimos algunas de las que aparecen en el texto:

Primer grupo	Segundo grupo	Tercer grupo
$1/3 + 1/3 = 2/3$	$1/9 + 1/18 = 1/6$	$1/4 + 1/12 = 1/3$
$1/6 + 1/6 = 1/3$	$1/12 + 1/24 = 1/8$	$1/5 + 1/20 = 1/4$
$1/10 + 1/10 = 1/5$	$1/15 + 1/30 = 1/10$	$1/10 + 1/40 = 1/8$
$1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$	$1/18 + 1/36 = 1/12$	.....
.....	$1/21 + 1/42 = 1/14$	.....
.....	$1/24 + 1/48 = 1/16$	.....
.....	$1/30 + 1/60 = 1/20$	.....
.....	$1/45 + 1/90 = 1/30$	.....
.....	$1/48 + 1/96 = 1/32$	.....
.....	$1/96 + 1/192 = 1/64$	.....
.....	$1/4 + 1/12 = 1/3$	.....
.....	$1/5 + 1/20 = 1/4$	.....
.....	$1/6 + 1/30 = 1/5$	.....

- = **Papiro de Kahun:** Perteneciente a la XII dinastía, actualmente se encuentra en Londres.
- = **Papiro de Ajmin:** Escrito en 2 tablillas de madera y fechado en el 400 a.C. por lo que pertenece al periodo de dominación persa. Actualmente se encuentra en el Museo de El Cairo.











## 5. CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LOS PAPIROS.

### 5.1. NÚMEROS CARDINALES.

#### Representación de números cardinales

Los egipcios utilizaban para sus cálculos el sistema decimal. Tenían 7 símbolos básicos que representaban las unidades, decenas, centenas, etc. Los símbolos empleados para la numeración fueron los siguientes:

	1
	10
	100
	1.000
	10.000
	100.000
	1.000.000, infinito

Para representar un número se incluían estos símbolos escribiéndolos de derecha a izquierda, y representando tantos de cada uno como unidades tuviese el número. El sistema es en base 10 pero no es posicional, sino aditivo. Así para representar el número 52 se escribía 2 veces uno y 5 veces 10 dando lugar a . Este sería el método más básico. Al igual que en la escritura se intentaba obtener una mejor representación gráfica, por lo que un número como **2235** no se escribiría



sino como



Vemos como incluso en la escritura de números se complica la transliteración precisamente por ese intento de que las representaciones fuesen lo más estéticas posibles. Si encontramos una representación del tipo:



sería 966. Cuando aparece más de un símbolo cardinal el conjunto debe leerse de arriba a abajo.

El jeroglífico empleado para un millón se empleaba para designar también infinito o mucho. Este pronto cayó en desuso y se empleó otro método, consistente en representar el número como una serie de operaciones aritméticas (sumas y multiplicaciones) de valores inferiores.

Cuando el número a representar va seguido de un sustantivo se escribía primero el símbolo correspondiente al nombre y luego el número (en transcripciones se escriben los números 1 y 2 detrás del nombre y el resto antes que este ). Así para representar **2 jarras** emplearíamos:



El nombre puede aparecer en su forma singular o plural, pero nunca si el número es 1 ó 2, o si se refiere a indicaciones de tiempo o medida. En estos casos aparece, como regla general, en singular.

Hemos visto la representación jeroglífica de los números cardinales. La escritura hierática y la demótica diferían bastante de la jeroglífica. En este caso el sistema ya no es aditivo, sino que se trata de un sistema numeral codificado, que incluye símbolos para las primeras 9 unidades, 9 decenas, 9 centenas, etc. En la siguiente tabla se da una relación desde el 1 al 9000:

1	1	100	1
2	2	200	2
3	3	300	3
4	4	400	4
5	5	500	5
6	6	600	6
7	7	700	7
8	8	800	8
9	9	900	9
10	10	1000	10
20	20	2000	20
30	30	3000	30
40	40	4000	40
50	50	5000	50
60	60	6000	60
70	70	7000	70
80	80	8000	80
90	90	9000	90

Para representar el número 5417, en hierática se escribiría como:

7 1 4 5

## 5. 2. LOS NOMBRES DE LOS NÚMEROS.

Los nombres de los números raramente se emplearon y las excepciones están referidas casi siempre al Egipto Medio correspondiente al lenguaje escrito del I Período Intermedio y el Reino Medio. Este período es considerado como el clásico y se mantuvo en literatura, textos religiosos e inscripciones monumentales hasta la llegada de los griegos.

A continuación, damos una tabla con los nombres de algunos de los números según aparecen en los textos de las pirámides. Puede observarse en la tabla que las decenas, desde el número 50 son plurales de las unidades equivalentes ( 70 = Sefejiu, 7 = Sefej).

Al final de la página aparece la representación jeroglífica de los números extraída del libro "La Momia" de Wallis Budge.





1 Ua (wa)	2 Senu (Snw)	3 Jemet (xmt)	4 Fedu (fdw)	5 Diu (diu)
6 Seresu (SrSw)	7 Sefej (Sfx)	8 Jemenu (xmn)	9 Pesedyu (pSD)	10 Medyu (md)
20 Dyebati	30 Maba (mabA)	40 Jem (Hm)	50 Diiu (diyw)	60 Seresiu (Sr)
70 Sefejiu (Sfx)	80 Jemeniu (xmn)	90 Pesedyiu (pSDyw)	100 Shet (St)	1.000 Ja (xA)

10.000	100.000	1.000.000		
Dyeba	Jefen	Jej		
(Dba)	(xfn)	(xx)		

1.	I	=	
2.	II	=	
3.	III	=	
4.	IIII	=	
5.	IIIII	=	
6.	IIII I	=	
7.	IIII II	=	
8.	IIII III	=	
9.	IIII III I	=	
10.	𐍌	=	
20.	𐍌𐍌	=	
30.	𐍌𐍌𐍌	=	
40.	𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
50.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
60.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
70.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
80.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
90.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
100.	𐍌𐍌	=	
200.	𐍌𐍌𐍌	=	
1,000.	𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
10,000.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
100,000.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	
1,000,000.	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌	=	

**5. 3. NÚMEROS ORDINALES.**

Los números ordinales se empleaban fundamentalmente en fechas, el primero era "tepi"(tpy). El resto de números del 2 al 9 se formaban añadiendo

la terminación "nu" (nw)  para masculinos o nut ( nwt)  para femeninos, al cardinal correspondiente, así cuarto era **fedunu** y tercero **jemetnu**. A partir del décimo se formaban con el prefijo "mH" (masculino )  o "mHt" (femenino) 

Ejemplos:

  Segundo	  Sexta	 Décima
---	---	---

Esta es la norma general en la construcción de los ordinales, pero en algunas ocasiones puede verse tercero escrito como

  *hmt-nw*

y segundo como

  *sn-nw*

#### 5.4. ARITMÉTICA. OPERACIONES BÁSICAS.

Como ya hemos visto en la introducción las matemáticas egipcias se basaban en un sistema decimal, pero no posicional, como el nuestro, sino aditivo. Las operaciones básicas de sumar y restar se limitaban a una combinación o cancelación de símbolos. La **adición** era la base del conocimiento matemático, puesto que las operaciones de multiplicación y división se basaban en adiciones.

Para **sumar** simplemente se añadían los símbolos correspondientes. Como los símbolos se podían repetir desde 1 a 9 veces, si se excedía de 9 se

eliminaban todos y se añadía el siguiente. El funcionamiento es similar al ábaco. Así:

$$\overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | | | | | | | | + \overset{\circ}{\circ} | | | | = \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | | | | | | | | | |$$

Al obtener 11 símbolos  $|$  no hay más que eliminar 10 y añadir el equivalente ( $\overset{\circ}{\circ}$ ) obteniendo

$$\begin{array}{c} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} | \\ \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \end{array}$$

Como se ve el sistema es bastante trivial. Para la **resta** sencillamente se eliminaban los símbolos a restar. Si has usado alguna vez un ábaco chino, el funcionamiento es exactamente el mismo, pero en lugar de con columnas, con símbolos.

Las operaciones de multiplicación y división se basaban en el mismo proceso aditivo. Para **multiplicar** se empleaba un sistema de duplicación-adición, que requiere un poco de práctica. El sistema se basa en la propiedad de que cualquier número natural puede expresarse como una suma de potencias de 2, que quizás los egipcios ya hubiesen descubierto por métodos empíricos. Si queremos multiplicar por ejemplo  $n \times m$ , el sistema es el siguiente:

- Se escribe una tabla de 2 columnas por  $n$  filas. Cada fila se obtiene por duplicación de la anterior. Si se quiere multiplicar  $n \times m$  la primera fila consta del número 1 y  $m$ . La segunda se compondrá del 2 y  $2 \times m$ . La tabla se construye hasta que el siguiente valor es mayor que  $n$ , entonces se puede obtener el número  $n$  como suma de todos o algunos de los números de la primera columna. El resultado de la operación  $n \times m$  es logicamente la suma de todos los miembros de la segunda columna o de los equivalentes a los que suman  $n$  en la primera columna. Por ejemplo para multiplicar  $n \times m$  se escribirá:

$$\begin{array}{ll} 1 & m \\ 2 & m1=2 \times m \end{array}$$

$$4 \quad m_2 = 2 \cdot m_1$$

$$8 \quad m_3 = 2 \cdot m_2$$

.. .....

$$2^i \quad m_i = 2 \cdot m_{(i-1)}$$

La tabla continúa hasta que el siguiente valor es mayor que  $n$ ,  $2^{(i+1)} > n$ . Una vez hecho esto se trata de descomponer el número  $n$  como suma de  $j$ -números de la primera columna, de manera que el número de sumandos sea el menor posible. Para conseguirlo se resta al valor  $n$  el último obtenido, y a este resultado el mayor posible de la tabla, y así sucesivamente hasta obtener el 0. El resultado de la multiplicación será entonces la suma de los elementos de la segunda columna equivalentes a los de la primera que suman  $n$ . Como ejemplo el Papiro de Rhind recomienda que para multiplicar  $41 \times 59$  se realicen las siguientes operaciones:

1.- Se construye la tabla:

$$1 \quad 59$$

$$2 \quad 118$$

$$4 \quad 236$$

$$8 \quad 472$$

$$16 \quad 944$$

$$32 \quad 1888$$

2.- El siguiente valor 64 es mayor que 41, por lo que no se continúa con la tabla. Empieza ahora el método de sustracción. Se trata de encontrar la forma de expresar 41 como suma del menor número de sumandos. Para ello se resta al valor original 41 el último (32) obteniendo 9. Ahora a 9 hay que



restarle el mayor posible de la columna de la izquierda, en este caso 8, obteniendo 1 y se repite la operación hasta que el resultado de 0.

$$41 - 32 = 9; 9 - 8 = 1; 1 - 1 = 0 \rightarrow 41 = 32 + 8 + 1 \rightarrow 41 \times 59 = 1888 + 472 + 59 = 2419$$

Lo primero a tener en cuenta en este sistema es elegir como multiplicando el más pequeño de los 2 números a multiplicar, pues se simplifica el número de potencias de dos y por tanto el de operaciones a realizar.

Cuando se tenía que efectuar una multiplicación por 10, 100, 1000,.. sencillamente se desplazaban todos los símbolos una, dos, tres ... unidades hacia la derecha según la tabla siguiente.

$$10 \times 10 = 100$$

El método empleado para la **división** es realmente curioso. Se basa en la multiplicación y siempre se obtenían cantidades enteras o fracciones exactas. No podemos asegurar que desconociesen totalmente el resto, pero no tenemos pruebas de divisiones en las que aparezca.

Si se quiere dividir  $n/m$  entonces la idea consiste en obtener el número de  $m$  y de partes de  $m$  que suman  $n$ . Como ya hemos comentado el sistema se basa en la multiplicación, pero ahora es el divisor el número que se duplica. Se genera una tabla de 2 columnas que tiene en la primera fila el número 1 y el denominador ( $m$ ). La idea se basa en obtener en la columna de la derecha el número  $n$  con la construcción de sucesivas filas obtenidas por duplicación o división. El dividendo se obtiene, entonces, como la suma de los elementos duplicados de la columna del divisor, y el cociente es la suma de los números elegidos en la columna base de la duplicación. Por ejemplo para dividir  $21 / 3$  se hacía:

$$2 \quad 6$$

$$4 \quad 12$$

Al igual que en la multiplicación el siguiente número sería 8 y correspondería a 24 que es mayor que 21. Por tanto no se sigue con la tabla. Si el número 21 se puede obtener como suma de los valores de la columna de la derecha, entonces ya está. En este caso

$$12 + 6 + 3 = 21 \rightarrow 21 / 3 = 4 + 2 + 1 = 7$$

Este ejemplo es el más sencillo, pues la división es entera. El problema surgía cuando no se obtenían divisiones enteras, y había que utilizar fracciones. Como veremos en el capítulo siguiente el uso de fracciones se basaba en la reducción a fracciones de numerador 1. Para dividir  $21 / 6$  se hacía el mismo proceso anterior, pero cuando se obtiene un número mayor que el numerador, si este no se puede obtener como suma de valores de la columna de la derecha, se continúa la tabla, dividiendo por 2.

$$1 \quad 6$$

$$2 \quad 12$$

$$1/2 \quad 3 (*)$$

$$6 + 12 + 3 = 21 \rightarrow 21/6 = 1+2+1/2 = 3.5$$

(\*) Ahora ya no tiene sentido poner 4--->24 porque  $24 > 21$ . Tampoco se puede obtener el valor 21 como suma de valores de la columna de la derecha; por tanto se continúa con divisiones,  $(1/2, 1/4, \dots)$

Lógicamente el tema se puede complicar bastante más. ¿Qué pasa si llegamos a un punto en el que no tenemos números enteros en la columna de la derecha?. En el capítulo referente a fracciones se explica la representación y los métodos empleados para realizar operaciones aritméticas con fracciones

que pueden aclarar este punto. Por ahora simplemente vamos a emplear estos métodos para resolver el la división  $100 / 13$ . El problema es el número 65 del papiro Ahmes que se resuelve de la siguiente forma.

#### 1.- Obtenemos la tabla inicial


1	13
2	26
4	52
$2/3$	$8 + 2/3$
$1/13$	1
$1/39$	$1/3$

2.-  $13 + 26 + 52 + 8 + 2/3 + 1/3 = 100 \rightarrow 100/13 = 1 + 2 + 4 + 2/3 + 1/39$





Como puede apreciarse el mayor problema lo representa la elección de los números. Si empleamos el método de la duplicación llega un momento en el que no podemos continuar y aquí es donde se presenta el problema. ¿Qué número elegir?. Los escribas no dejaban constancia de los procedimientos intermedios que seguían, pero debieron emplear un método para seleccionar los números. Si analizamos la resolución advertimos que el uso de  $1/3$  es innecesario, sin embargo el escriba lo emplea, ¿por qué?. Hemos visto que se emplean números enteros innecesarios para seguir un método, el de duplicación. El empleo de fracciones innecesarias nos lleva a pensar que


efectivamente se empleaba un método para seleccionar los números, pero desgraciadamente se desconoce cual era.

## **5.5. FRACCIONES.**

El uso de fracciones es sin duda el rasgo más peculiar de la matemática egipcia. El método empleado por los escribas egipcios para operar con fracciones es mucho más complicado que el nuestro. La base de la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1, **todas distintas**. En la representación de fracciones se empleaba el símbolo  (r) que en hierática se convirtió en un punto, y que significaba "parte". Cuando se quería escribir un valor fraccionario, se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador.

$$\begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{|||} \end{array} = 1/5 \text{ (jeroglífica)} \quad \text{loop} = 1/5 \text{ (Hierática)}$$

y tenía el sentido de un ordinal, nunca de un cardinal. Se traduciría, literalmente, como "parte 5". Las únicas excepciones eran 1/2, 2/3, 1/4 y 3/4, que se representaban con un jeroglífico especial:  (gs) "lado",  (rwy)  (Hsb) y  respectivamente. Así como los signos para 1/2, 2/3 y 1/4 si son frecuentes, raramente se empleó el de 3/4. En aritmética sólo se usaba

la fracción 2/3, que en hierática se representaba como . Era muy frecuente el uso de las fracciones denominadas "fracciones ojo de Horus", que representaban cada una de las partes en las que fue seccionado el ojo de Horus durante su batalla con Seth. Estas fracciones eran: Las cejas equivalían a 1/8, la pupila era 1/4, la parte izquierda de la pupila era 1/2, la parte derecha de la pupila era 1/16, la parte inferior vertical bajo el ojo era 1/32 y la parte inferior diagonal del ojo representaba 1/64.

Las fracciones con numerador distinto de 1 se reducían a sumas de fracciones conocidas, con numerador 1, pero siempre los sumandos tenían que ser diferentes. Así Ahmes en el Papiro de Rhind escribe 2/5 como 1/3 + 1/15 y nunca se podría emplear 1/5 + 1/5. La propia expresión 2/5 no tenía sentido en

el pensamiento egipcio. Cualquier cantidad se expresaba como una parte entera mas una suma de fracciones unitarias, y a lo sumo  $2/3$ . El símbolo "+" no se empleaba y las fracciones aparecían secuencialmente. Lógicamente el problema era encontrar estas reducciones. Actualmente conocemos y podemos encontrar algoritmos de cálculo que nos permiten tales adiciones, pero hace 4000 años los escribas no conocían un método rápido para efectuar las transformaciones, por lo que se limitaban a emplear tablas ya escritas o a efectuar el proceso de división aprendido. Cuando un egipcio se encontraba con una fracción  $5/8$  no pensaba ¿como puedo transformar  $5/8$  en una suma de fracciones unitarias?, sino que se limitaba a dividir 5 entre 8 utilizando la técnica de este tipo de fracciones

El Papiro de Rhind incluye, al principio, una tabla en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. Como es lógico se eliminan las descomposiciones en las que el denominador es par. La siguiente tabla es una reproducción de la escrita por **Ahmes**. En la primera y tercera columna aparecen los denominadores de las fracciones  $2/n$  y en la segunda y cuarta las fracciones unitarias cuya suma da  $2/n$ .

5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	4,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195
19	12,76,114	67	40,335,536

21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710
25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162
35	30,42	83	60,332,415,498
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

Posiblemente la tabla escrita por Ahmes no fuese producto de métodos empíricos, sino que sigue un razonamiento lógico. No pretendemos aquí hacer un análisis de la tabla 2/n de Ahmes, pero si podemos sacar algunas conclusiones del sistema de reducción.

- Lo primero que vemos es que todas las fracciones de la forma  $2/3k$  están expresadas como suma de fracciones unitarias de la forma  $1/2 + 1/6k$ .
- El segundo grupo lo forman las fracciones de la forma  $2/5k$  en las que la reducción es  $1/3k + 1/5k$  excepto la correspondiente a  $2/95$  ( $k= 19$ ).

Estos 2 ejemplos anteriores no son únicos, y con un poco de esfuerzo pueden sacarse más conclusiones, pero el propósito de este artículo no es analizar matemáticamente la tabla de Ahmes, aunque estos 2 ejemplos nos hacen pensar que conocían ciertas relaciones matemáticas y quizás algún método para generar la tabla en el caso de números mayores. Para expresar  $2/61$  la tabla da el siguiente valor:



$$= 1/4 + 1/244 + 1/488 + 1/610$$

El método más sencillo para descomponer una fracción del tipo  $2/n$  es como  $1/n + 1/n$ , pero en las operaciones nunca se empleaban fracciones iguales.

Ahmes reduce todas las fracciones a sumas de fracciones de numerador 1 y 2. Así para escribir la fracción 7 dividido por 29 (traducción literal del papiro) realiza las siguientes operaciones:

$7/29$  ;  $7 = 2 + 2 + 2 + 1$  ; Ahmes emplea la tabla para convertir  $2/29$  en suma de fracciones de numerador 1. Con las sustituciones correspondientes y las posteriores adiciones obtiene:

$$7/29 = 1/6 + 1/24 + 1/58 + 1/87 + 1/232$$

Ahora bien  $7/29 = 1/29 + 1/5 + 1/145$  pero en la tabla sólo aparecen fracciones de numerador 2 por lo que el escriba emplea este método y no otro. No se trata de encontrar la reducción más simple sino de emplear el método que se había enseñado durante milenios y que no había razón para cambiar, pero ¿Cómo los egipcios descubrieron y elaboraron estas tablas?. Actualmente no existen evidencias de que conociesen y aplicasen un método para la construcción de la tabla.

Hemos visto en el capítulo dedicado a la aritmética el método empleado en la división. Si ahora intentamos dividir 3200 entre 365 siguiendo este método de duplicidad o división por 2 llegamos a un punto en el que necesitamos el conocimiento de las fracciones para poder obtener un resultado. Siguiendo el método de la división obtenemos:

1	365
2	730
4	1460
8	2920
2/3	243 1/3
1/10	36 1/2
1/2190	1/6

Entonces  **$3200/365 = 8 + 2/3 + 1/10 + 1/2190$** , puesto que  $2920 + 243 + 1/3 + 36 + 1/2 + 1/6 = 3200$ .

Pero nos quedaría por resolver una cuestión importante. ¿Existía realmente un método para seleccionar una u otra fracción?. ¿Por qué probar con la fracción 1/10 y no con 1/4?. Realmente parece que las operaciones de división se basaban en la práctica. Existía un método claro de empleo de números enteros por duplicidad (se usaban hasta que la siguiente duplicidad excedía el numerador), pero no para las pruebas de fracciones. En ningún sitio vemos una regla genérica que por ejemplo diga usa primero 2/3, luego 1/4, luego 1/6,... . No, desconocemos totalmente el criterio de selección de estas fracciones unitarias. Los escribas tenían que ser unos virtuosos de la duplicación y mediación de fracciones, y, aunque en los papiros que han llegado hasta nosotros parece que acertaban a la primera en la selección, la






realidad tuvo que ser bastante diferente y para realizar una división tendrían que probar gran cantidad de fracciones. Si intentamos desarrollar la división siguiendo el método de fracciones unitarias podemos perder mucho tiempo en encontrar una combinación adecuada. Se ha propuesto como posible método intentar expresar el numerador como una suma de enteros mas fracciones unitarias que sumen 1. Es decir si necesito dividir  $N$  debo buscar una descomposición tal que  $N = e_1 + e_2 + \dots + e_n + f_1 + f_2 + \dots + f_m$ , siendo  $e_i$  enteros y  $f_i$  fracciones unitarias, y tales que  $e_1 + e_2 + \dots + e_n = N - 1$  y  $f_1 + f_2 + \dots + f_m = 1$ , pero existen divisiones en las que no parece que se haya empleado este método.

Además estos métodos no nos resuelven todas las divisiones que se nos pueden plantear en la vida cotidiana, porque es obvio que los egipcios en algún momento se encontraron con los números irracionales, y en tal caso ¿qué hacían?. Hemos de suponer que no siempre obtenían un resultado para la división, y en ocasiones debían aproximarlos. Quizás también aproximasen en el caso de operaciones extremadamente largas o complicadas.

¿Por qué usaban los egipcios las fracciones unitarias en sus cálculos?. Realmente es difícil suponer una aritmética basada en fracciones unitarias hoy en día. Actualmente el concepto  $3/5$  nos es familiar, pero para los egipcios esto parecía representar un problema. Se han dado diferentes teorías para justificar el uso de este tipo de fracciones en Egipto. En matemática moderna se emplea el uso de fracciones unitarias en determinadas situaciones, y el argumento más convincente para el empleo por parte de los egipcios es la facilidad de dividir un todo en  $n$  partes. Si tenemos 3 panes y queremos dividirlos entre 5 personas, nosotros aceptamos que a cada persona le corresponde exactamente  $3/5$  del total, pero si aplicamos el método de fracciones unitarias a  $3/5$  obtenemos  $3/5 = 1/3 + 1/5 + 1/15$  por lo que para empezar podemos dividir un pan en tres partes iguales, los otros 2 en 5 partes y luego cada una de las 5 partes de uno de estos últimos la dividimos a su vez en 3 partes. Este concepto es más sencillo para un niño que fácilmente aprende a dividir un todo en  $n$  partes iguales y tomar una de ellas que un intento de aplicar  $3/5$  directamente o bien como suma de  $2/5 + 1/5$ .

Por último damos a continuación 3 ejemplos de sumas de fracciones del Papiro de Rhind, extraídos del libro "Egyptian Grammar" de Sir Alan Gardiner

	$5 + 1/2 + 1/7 + 1/14 = 5 + 5/7$
	$2 + 1/2 + 1/4 + 1/14 + 1/28 = 2 + 6/7$
	$2 + 2/3 + 1/6 + 1/12 + 1/36 + 1/54 = 2 + 26/27$

En la descripción de los problemas del Papiro de Rhind pueden verse más ejemplos de problemas con fracciones.

## **5.6. ARITMÉTICA DE FRACCIONES.**

Vamos a analizar en este capítulo los métodos de multiplicación, división y sustracción de fracciones y números expresados como suma de fracciones unitarias. Los problemas 7 al 20 del Papiro de Rhind se refieren a estas operaciones y pueden verse en la descripción de problemas.

**La multiplicación** de expresiones fraccionarias se hacía de manera directa o mediante el empleo de los "números rojos". Estos son unos números auxiliares que aparecen de color rojo en el papiro. El método directo aparece en el problema número 9 y consiste en aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Para multiplicar  $(1/2+1/14)*(1+1/2+1/4)$  se multiplica cada fracción del primer multiplicando por cada una de las del segundo.

$$1 \quad 1/2 + 1/14$$

$$1/2 \quad 1/4 + 1/28$$

$$1/4 \quad 1/8 + 1/56$$

y el resultado es la suma de los resultados parciales de la columna, es decir 1.

El ejemplo anterior es uno de los más sencillos pues no hay más que aplicar las divisiones por 2, que tan bien manejaban los egipcios y los resultados parciales constan de fracciones sencillas.

El método de los números rojos es algo más complicado. Consiste en aplicar un número auxiliar (**el número rojo**) a cada una de las fracciones de la columna derecha cuando en esta se obtienen resultados no sencillos. Aparece por ejemplo en el problema 14 en el que el escriba propone calcular  $1/28 * (1 + 1/2 + 1/4)$ . Este es el procedimiento seguido: Se aplica el método normal obteniendo:

$$1 \quad 1/28$$

$$1/2 \quad 1/56$$

$$1/4 \quad 1/112$$

Ahora en lugar de sumar las fracciones de la derecha, siguiendo el método aprendido, se selecciona un número tal que al aplicarlo a estas se obtengan otras más sencillas. En este caso se selecciona el 28 y el razonamiento es el siguiente:

$1/28$  partes de 28 es igual a 1

$1/56$  partes de 28 es igual a  $1/2$

$1/112$  partes de 28 es igual a  $1/4$

Y hay que conseguir saber cuántas partes de 28 son iguales a  $1 + 1/2 + 1/4$ , esto es ¿cuál es el número por el que hay que multiplicar  $1 + 1/2 + 1/4$  para obtener 28?. Es decir hay que dividir 28 entre  $1 + 1/2 + 1/4$ . Se hace, entonces, la siguiente tabla (hemos reproducido la notación egipcia, eliminando el signo + de la columna de la derecha)

$$1 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1/4$$

$$2 \quad 3 \quad 1/2$$

$$4 \quad 7$$

$$8 \quad 14$$

$$16 \quad 28$$

y el resultado es 16  $\longrightarrow$  **1/16** partes de 28 es precisamente  $1+1/2+1/4$ .

Para una mentalidad actual el método de los números rojos puede parecer una forma absurda de complicarse la vida, pero hay que tener en cuenta que aunque los egipcios controlaban las fracciones una expresión como la obtenida en el primer ejemplo sí era fácil, pero una del tipo  $1/28 \quad 1/56 \quad 1/112$  no era considerada manejable, mientras que el concepto de  $1/16$  si podían controlarlo

**La resta de fracciones** está explicada con ejemplos en los problemas 21 a 23 del Papiro de Rhind, y en todos se emplean los "números rojos". Para hacer la operación  $1 - (2/3 + 1/30)$  se siguen los siguientes pasos

- Se elige como número auxiliar el 30
- $2/3 + 1/30$  partes de 30 es 21
- $30 > 21$  en 9 unidades  $\rightarrow$  Hay que obtener cuantas partes de 30 dan 9.

$$1 \quad 30$$

$$1/10 \quad 3$$

$$1/5 \quad 6$$

- como  $6+3 = 9 \rightarrow$  la respuesta es  $1/5 + 1/10$ .

Lógicamente esta es la "teoría", pero los cálculos pueden complicarse enormemente siguiendo este método. En el capítulo dedicado a los problemas del Papiro de Rhind puedes ver ejemplos más complejos del método.

**La división de fracciones** aparece en los problemas 30 a 34 del Papiro de Rhind. En todos los problemas el escriba hace uso de los números rojos. No son problemas directos de divisiones, sino problemas en los que hay que aplicar estas divisiones. Si queremos dividir  $N/D$  siendo  $D$  una fracción, el método consiste en efectuar las duplicaciones sucesivas del denominador hasta que la siguiente duplicidad exceda el numerador, como en el proceso de división de números enteros. Se selecciona la mejor aproximación al numerador como suma de los valores obtenidos en la columna de la derecha, que llamaremos  $C$ . Se calcula la diferencia que resta ( $N-C$ ) y ahora se trata de saber cuantas partes de  $D$  son iguales a  $C$ , que llamaremos  $F$ . El resultado final será la suma de las cantidades de la columna de la izquierda mas este valor  $F$ .

Por ejemplo en el problema 30 hay que dividir  $10 / (2/3 + 1/10)$ . En este caso  $N = 10$ ,  $D = 2/3 + 1/10$

Para obtener el resultado se hace lo siguiente:

$$1 \quad 2/3 + 1/10$$

$$2 \quad 1 + 1/3 + 1/5$$

$$4 \quad 3 + 1/15$$

$$8 \quad 6 + 1/10 + 1/30$$

Si ahora sumamos los valores de la derecha obtenidos para 1,4 y 8 obtendremos

$$2/3 + 1/10 + 3 + 1/15 + 6 + 1/10 + 1/30 = 9 + 2/3 + 1/5 + 1/15 + 1/30 \rightarrow C = N - 9 + 2/3 + 1/5 + 1/15 + 1/30 \rightarrow C = 1/30$$

Hay que ver ahora cuantas partes de  $D$  son iguales a  $C$ , es decir cuantas partes de  $2/3 + 1/10$  son iguales a  $1/30$

Se selecciona ahora el número rojo 30 y hacemos el proceso anterior:

$$2/3 + 1/10 \text{ de } 30 \text{ es } 23 \text{ y } 1/30 \text{ de } 30 \text{ es } 1 \rightarrow 1/23 \text{ partes de } 2/3 + 1/10 \text{ es igual a } 1/30. \rightarrow F = 1/23$$

El resultado de la división será por tanto  $8 + 4 + 1 + 1/23 = \mathbf{13 + 1/23}$

Como en ejemplos anteriores en este caso hemos llegado a esta conclusión directamente para no reproducir todos los pasos necesarios, pero el escriba que quisiese hacer este problema aplicando los métodos que conocía hasta ese momento debía realizar gran cantidad de operaciones de multiplicaciones y restas de fracciones antes de obtener el resultado final.

## **5.7. EL ÁLGEBRA.**

En los papiros que se conservan con problemas matemáticos existe un grupo que podríamos incluir dentro del concepto de álgebra actual. El egipcio no distinguía entre problemas meramente aritméticos y estos en los que se pide resolver ecuaciones lineales de la forma  $x + ax = b$  o  $x + ax + bx = c$ . Para él todo eran matemáticas y se limitaba a seguir procedimientos aritméticos. Por supuesto no se empleaba esta notación que usamos nosotros sino que se pedía por ejemplo buscar un número, que ellos llamaban "**aha**" o montón tal que... El problema más conocido del Papiro de Rhind sobre estas cuestiones es el número 24 en el que se pide calcular el valor del aha si el aha y una séptima parte del aha es 19. Este tipo de problemas aparecen resueltos con unas someras instrucciones que llevan al resultado buscado, sin dar ninguna explicación sobre por qué usar el procedimiento.

La resolución de estos problemas se efectúa por el método que hoy conocemos como "**regla de la falsa posición**" o "regula falsi". Este método consiste en presuponer un valor para el *aha* y efectuar las operaciones de la ecuación. A menos que tengas mucha suerte no acertarás con el valor del *aha* a la primera, pero tampoco importa, porque una vez efectuadas las operaciones se comparan el resultado con el que debería obtenerse y con el uso de proporciones se halla el valor correcto.

Por ejemplo en el problema 24 hay que resolver la ecuación  $x + x/7 = 19$ .

Se supone un valor de 7 (el más fácil de aplicar)  $\rightarrow x + x/7 = 8$  y ahora basta con calcular un número  $n$  tal que  $19 = 8 \cdot n$ , y el valor buscado será  $x = 7 \cdot n$ . Se divide  $19/8$ . Efectuando las operaciones de división obtenemos:

$$1 \quad 8$$

$$2 \quad 16$$

$$1/2 \quad 4$$

$$1/4 \quad 2$$

$$1/8 \quad 1$$

$16 + 2 + 1 = 19 \rightarrow 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8 \rightarrow n = 2 + 1/4 + 1/8 \rightarrow x = 7 \cdot n \rightarrow x = 7 \cdot (2 + 1/4 + 1/8)$ . Ahora se efectúa la multiplicación:

$$1 \quad 2 + 1/4 + 1/8$$

$$2 \quad 4 + 1/2 + 1/4$$

$$4 \quad 9 + 1/2$$

luego  $x = 16 + 1/2 + 1/8$

Visto el empleo de este procedimiento podemos apreciar que los problemas de división de cantidades fraccionarias podrían resolverse también siguiendo este mismo método, bastante más simple, en la mayoría de los casos. Pero no sabemos por qué se elegía uno u otro, ni si el escriba lo hacía dependiendo de algún factor.

A pesar de que este es el método más empleado en la resolución de ecuaciones lineales, Ahmes emplea un método de factorización en el **problema 30**, en el que hay que resolver la ecuación:

$$x + (2/3)x + (1/2)x + (1/7)x = 37$$

Para resolverla factoriza el primer miembro y divide luego 37 entre  $(1 + 2/3 + 1/2 + 1/7)$  obteniendo un valor de  $x = 16 + 1/56 + 1/679 + 1/776$ .

Los problemas de ecuaciones lineales son frecuentes en la matemática egipcia y aparecen en varios papiros, pero llaman la atención especialmente dos problemas del **Papiro de Berlín** que representan un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una de las cuales es además de segundo grado. Estos problemas son los más sencillos, del tipo  $ax^2=b$  o incluso en el de 2 incógnitas una de ellas se da en función de la otra, con lo que el problema queda reducido igualmente a uno del tipo  $ax^2=b$ . Curiosamente se utiliza la raíz cuadrada para resolver el problema, aunque no tenemos constancia de si tenían procedimientos para calcularlas. Algunos autores suponen que debieron existir tablas de números cuadrados, calculadas por un simple procedimiento de multiplicación del número por él mismo, y que podrían leerse en ambos sentidos de modo que permitirían calcular raíces cuadradas. Lo que sí sabemos es que existía un símbolo especial para representarla (𐀓) conocido como 'la esquina'. El problema al que antes nos hemos referido consiste en resolver:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = (1/2 + 1/4)x$$

## **5.8. REPARTOS PROPORCIONALES, REGLA DE TRES Y PROGRESIONES.**



Además de los problemas sobre aritmética básica y ecuaciones lineales, existe una serie de problemas referidos a repartos proporcionales, progresiones aritméticas y aplicación de la regla de tres.

El método para resolver **repartos proporcionales** está basado en las propiedades de las proporciones numéricas. Estos cálculos eran muy importantes a la hora de distribuir las raciones, por ejemplo, en los templos, donde no todo el mundo recibía la misma cantidad de comida y bebida.

Para repartir una cantidad  $C$  en partes proporcionales a 3 números  $n1$ ,  $n2$  y  $n3$ , si  $x1$ ,  $x2$  y  $x3$  expresan cada una de esas partes proporcionales entonces:

$$x1/n1 = x2/n2 = x3/n3 = (x1+x2+x3 / (n1 + n2 +n3) = C / (n1 +n2 +n3)$$

El papiro sigue este mismo método. Para distribuir una cantidad  $N$  en partes proporcionales  $n1$ ,  $n2$ ,  $n3$  y  $n4$ :

- 1.- Se suman las partes proporcionales  $n1+n2+n3+n4$  obteniendo  $C$
- 2.- Se divide  $1 / C = D$
- 3.- Se multiplica este valor  $D$  por  $N$  obteniendo el numero  $d$
- 4.- Se aplica el número  $d$  a cada una de las partes

El ejemplo siguiente corresponde al **problema número 63 de Ahmes**. En el capítulo dedicado al Papiro de Rhind se da una explicación más detallada de las operaciones. En él hay que repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a  $2/3$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  y  $1/4$ .

- 1.- Se calcula la suma  $C$

$$C = 2/3 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 1 + 1/2 + 1/4$$

- 2.- Se calcula  $D = 1/C$

$$1 \quad 1 + 1/2 + 1/4$$

$$1/2 \quad 1/2 + 1/4 + 1/8$$

$$D = 1/C = 1 / ( 1 + 1/2 + 1/4 ) = 1/2 + 1/14.$$

3.- Se multiplica este resultado por 700 y resulta un valor de **d** = 400, por lo que el reparto será:

4.- Se aplica **d** a cada fracción

$$2/3 \text{ de } 400 = 266 + 2/3$$

$$1/2 \text{ de } 400 = 200$$

$$1/3 \text{ de } 400 = 133 + 1/3$$

$$1/4 \text{ de } 400 = 100$$

**La regla de 3** aparece en el problema 72 del Papiro de Ahmes. Los egipcios no encontraban diferencia entre la aplicación de este método para la resolución de problemas y la aritmética. Empleaban el método cuando los problemas se presentaban de forma similar a prácticas que habían realizado, pero posiblemente el concepto de regla de 3 se les escapase totalmente. Sencillamente aplicaban lo que habían aprendido en la Casa de la Vida o en situaciones similares.

Como veremos en el capítulo dedicado a la resolución de los problemas, Ahmes se hace un pequeño lío en la búsqueda de la solución de la regla de 3. Para calcular la siguiente regla de 3

$$n1 - v1$$

$$x - v2$$

Ahmes hace lo siguiente.

- 1.- Halla el exceso de **n1** respecto de **v1**, obteniendo un valor **e1**.
- 2.- divide ahora **e1** entre **v1** y obtiene **e2**
- 3.- multiplica **e2** por **v2** (**e3**)
- 4.- suma **v2** + **e3** y esa es la solución.

Realmente está aplicando el siguiente criterio  $v2/v1 = x/n1 = (x - v2)/ (n1 - v1)$  -  $\rightarrow x = v2 + ( (n1 - v1)/v1 ) * v2$

**El problema 72**, que es una regla de 3 con  $n_1 = 45$ ,  $v_1 = 10$ ,  $v_2 = 100$ , lo resuelve como

1.- El exceso de 45 respecto de 10 es 35

2.-  $35 / 10 = 3 + 1/2$

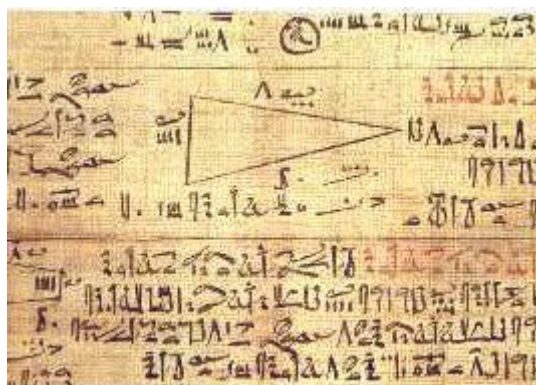
3.-  $100 * (3 + 1/2) = 350$

4.- Solución =  $350 + 100 = 450$

**Las progresiones aritméticas** aparecen reflejadas en el problema 64 del papiro. No sabemos si la resolución responde a la aplicación de una fórmula o simplemente a planteamientos lógicos, pero como puede verse en el capítulo dedicado al Papiro de Rhind el escriba sigue perfectamente el método que emplearíamos actualmente para resolver el problema.

## **5.9. GEOMETRÍA. Cálculo de áreas.**

La geometría es quizás la aplicación más importante de la matemática egipcia, debido a la necesidad de los agrimensores o "tensadores de cuerda", como los llamó Heródoto, para recalcular las lindes de los campos tras la inundación anual del Nilo. Después de ver las grandes construcciones que llevaron a cabo los egipcios deberíamos esperar una geometría muy avanzada. Pero desgraciadamente no es así, y las únicas fuentes que podemos analizar son el papiro Ahmes y el papiro de Moscú. Con los datos que tenemos en estos 2 papiros no descubrimos aspectos especiales de la geometría y lo único que nos aportan son algunos datos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas muy básicas. Los cálculos, aunque no correctos, si son lo suficientemente aproximados para cubrir las necesidades de la vida cotidiana. Además no existe distinción entre los cálculos exactos y los aproximados por lo que no sabemos si pensar que consideraban todos como exactos o sencillamente que no se planteaban el error que cometido. Como veremos en el artículo algunos de estos errores son realmente importantes, pero quizás fuese el hecho de haber aprendido cómo hacer los cálculos, sin demostración de ningún tipo y sin plantearse si estaban bien o mal, lo que les llevaba a cometer estos errores.



En primer lugar hay que tener en cuenta que hasta la llegada de los griegos, al igual que en Babilonia, no existía una división entre la geometría y la aritmética, o la matemática en general, y todas las ramas se englobaban dentro de una misma, limitándose a aplicar la aritmética al cálculo de áreas, volúmenes y algún otro problema geométrico. A pesar de que según Heródoto la geometría se desarrolló ante la necesidad de recalcular las lindes tras la inundación del Nilo, no parece que sea así. Indudablemente ésta era una de las aplicaciones más importantes pero desde luego no la única. Los Babilonios por ejemplo tenían una geometría muy similar a la desarrollada en Egipto y sin embargo no tenían necesidad de agrimensura.

Llama la atención el hecho de haber encontrado inscripciones en las que se calcula el área de figuras cuadrangulares, pertenecientes a campos de cultivo, en las que el método empleado es muy erróneo, y únicamente aproximado en el caso de campos que se aproximan a un rectángulo. Este método consistía en obtener el área de la figura multiplicando entre sí las semisumas de las longitudes de lados opuestos. En los muros del templo de Edfú aparece este método. Se dice que para calcular el área de un campo de lados  $a, b, c, d$  siendo  $a, b$  y  $c, d$  los lados opuestos se siga la regla

$$A = (a+b)/2 * (c+d)/2$$

Lógicamente esta fórmula es exacta para figuras rectangulares, pero cuanto más irregular sea la figura más error se comete. Incluso se utiliza para campos triangulares, en los que se afirma que debe tomarse el lado "d" como "nada". Como vemos no se puede afirmar que tuviesen una geometría muy

avanzada pues todo se basa en aproximaciones muy groseras a las fórmulas reales.

En el papiro Ahmes vemos que el cálculo de áreas tendía a emplear la conversión de la figura a analizar en "algo parecido a una figura conocida" que permita llegar al área buscada. Un sistema de cálculos parciales cuya suma permita obtener el área de la figura inicial. Veremos este método en el cálculo del área del círculo. Es quizás un primer paso hacia la demostración geométrica y un intento de encontrar las relaciones mutuas entre figuras geométricas, pero que se quedó ahí, en un primer paso, y al que nunca se le ha dado la importancia que tiene. Por este método se justifica el cálculo del **área de un triángulo isósceles**. Según Ahmes debe dividirse la mitad de la base y multiplicarlo por la altura. Como es lógico el escriba no emplea los términos base, altura o isósceles para expresarse, pero por la figura y la explicación que da debemos pensar que se trata de un triángulo isósceles. Ahmes justifica este cálculo afirmando que puede considerarse el triángulo formado por 2 triángulos rectángulos, de manera que el desplazamiento de uno de ellos da lugar a un rectángulo con lados de la misma longitud que el triángulo de partida. Curiosamente Ahmes describe el triángulo como "un pedazo de tierra de una cierta anchura en un extremo y que llega a un punto". Realmente resulta difícil que con una definición así se pueda determinar el área de la figura. Cuando Ahmes habla de altura no emplea más que un término genérico llamado "línea", afirmando que debe multiplicarse la base por la "línea". No tenemos claro si el escriba quería referirse, con este término, a la altura del triángulo o a un lado, aunque por los cálculos que aparecen en otros problemas parece más bien este último caso. Pero hay que plantearse qué se podía considerar base y qué lado. El error es grande si consideramos un triángulo isósceles, pero en el caso de triángulos con todos los lados diferentes,

El **problema 52** del mismo papiro trata sobre el **área de un trapecio isósceles** de base mayor 6, base menor 4 y distancia 20. Para resolverlo toma la semisuma de las bases "de forma que se transforme en un rectángulo" y lo multiplica por la distancia 20.

Es quizás el cálculo del **área del círculo** la parte de la geometría de la que más se ha escrito, sin duda por el misterio que rodea al número  $\pi$ . Según el papiro Rhind (**problema número 50**) Ahmes acepta que el área de un círculo de diámetro 9 es la misma que la de un cuadrado de lado 8. Esto nos lleva a aceptar un valor para  $\pi$  de 3.1605 ( $4(8/9)^2$ ). Esta es una muy buena aproximación del valor real de 3.1415926..., que siempre ha llamado la atención. Se ha dicho que los egipcios conocían el valor de  $\pi$ , pero lo cierto es que aunque la aproximación no es mala, es un valor calculado en base a una geometría muy básica. Además hay que tener en cuenta que los egipcios **no empleaban  $\pi$  como una constante**. No sabemos cómo se llegó a esta aproximación, pero se ha considerado que el **problema 48** del mismo papiro puede ser la respuesta. En este vemos que Ahmes construye un octógono a partir del cuadrado de lado 9 unidades, dividiendo cada lado en 3 partes y uniendo las esquinas, es decir anulando los 4 triángulos formados en las esquinas. Entonces el área del octógono es aproximada al área del círculo de diámetro 9.

Posiblemente **mayor importancia que la buena aproximación de  $\pi$**  tenga la afirmación egipcia de las relaciones entre área y perímetro del círculo y el cuadrado. Según los egipcios **la relación entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que la razón entre el área y el perímetro del cuadrado circunscrito**. Sin duda esta afirmación es mucho más importante geoméricamente hablando que la aproximación de  $\pi$ , si bien es cierto que muchos autores han destacado esta aproximación de  $\pi$  para afirmar que los egipcios conocían una matemática "oculta" mucho más desarrollada que la que actualmente aceptamos de las escasas fuentes que poseemos. En muchas ocasiones se ha tratado de crear leyendas en torno a las relaciones geométricas de la gran pirámide. Quizás la más llamativa y conocida es la que afirma que el perímetro de la base se planeó de manera que coincidiese con la circunferencia cuyo radio es la altura de la pirámide. Esta relación es efectivamente cierta, con una muy buena aproximación, para un valor de  $\pi$  de 3.14, pues la razón del perímetro a la altura es de  $44/7 = 2 \cdot 22/7$ , que nos da un valor para  $\pi$  de 3.14 y no 3.16 que sabemos que empleaban, aunque esta última afirmación tampoco podemos tomarla al pie de la letra puesto que no

parece que empleasen pi como una constante y posiblemente el propio concepto y su relación con el círculo les era desconocido totalmente, ya que no lo aplicaban por ejemplo al calcular el volumen de un cilindro.

También disponemos de información de las reglas empleadas por los egipcios para el cálculo de volúmenes del cubo, paralelepípedo, cilindro y figuras sencillas. En algunos casos estos métodos conducen a aproximaciones, pero en otros los cálculos son correctos. Los papiros dan como fórmula para calcular el volumen de un tronco de cono de altura h y circunferencias D y d:

$$V = h/12 [ 3/2 (D+d)] ** 2$$

Lógicamente no existe en los papiros una formulación así, sino que se explica con un ejemplo en el que se dice "Divide 18 entre 12, suma 7 y 4 .... ). Este método supone emplear un valor de  $\pi$  de 3, frente al 3.1605 que vimos empleaban en el cálculo de áreas, lo cual supone un error considerable que nos lleva a pensar en el empleo de métodos empíricos para llegar a tales conclusiones, puesto que lo que si podemos afirmar es que no se empleaba pi como constante, por lo que hemos de deducir que tampoco se conocía su relación con el perímetro o el área del círculo.

Sin duda alguna la **regla más importante**, por su precisión, es la referida al cálculo del volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada. El problema es el **número 14** del Papiro de Moscú. La fórmula, como es de suponer, no aparece en el papiro, pero se calcula el volumen exacto. Si empleamos una notación moderna la fórmula es la siguiente:

h = altura

a, b = lados

entonces tenemos :

$$V = h/3 ( a**2 + b**2 +ab)$$

Según el papiro de Moscú el volumen de un tronco de pirámide de bases 4 y 2 y altura 6 es 56. Lo curioso es que el escriba resuelve el problema aplicando los pasos que nos llevan a la fórmula anterior. Para ver la resolución exacta que da, consulta el capítulo dedicado al Papiro de Moscú. Si se

considera  $b=0$  se obtiene la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, tal y como aparece representada en el contrato de Edfú. No se sabe cómo los egipcios pudieron llegar a estos resultados, se ha afirmado que podría tener su origen en métodos experimentales, pero desde luego no es un método que resulte fácil. Para el cálculo del volumen del tronco parece más viable que descompusieran, al menos mentalmente, el tronco en figuras más sencillas como paralelepípedos, prismas o pirámides, que a su vez se descomponen en bloques rectangulares que podrían llevar a la fórmula, pero ciertamente no hay nada que lo demuestre y tampoco parece que el uso de una geometría basada en descomposiciones de figuras más sencillas prosperase en Egipto, y la única prueba está reflejada en los cálculos de áreas de ciertos triángulos y trapecios, como ya hemos visto.

## **5.10. TRIGONOMETRÍA.**

Aunque no se puede hablar de una trigonometría en un ámbito general de la matemática egipcia, queremos en este capítulo dar a conocer lo que podría denominarse una trigonometría rudimentaria y una pequeña teoría de triángulos semejantes que aparece en el papiro Rhind. Así como en lo relativo a la aritmética o la geometría disponemos de diferentes fuentes, aunque sean escasas, de trigonometría sólo disponemos del **problema 56** del Papiro de Rhind.

Si nos planteamos las grandes edificaciones que llevaron a cabo los egipcios, fundamentalmente la construcción de pirámides, hay que tener en cuenta que, tal y como están construidas, era necesario disponer de algún mecanismo trigonométrico para resolver ciertos problemas de construcción. Un problema esencial en la construcción de estas era el de mantener la pendiente uniforme en cada una de las caras, y a su vez la misma en las 4 caras. Quizás esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a emplear lo que denominaron "**seqt**", equivalente a lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada.

En mediciones verticales empleaban el "codo" y en horizontales la mano, que equivalía a  $1/7$  del codo. Tal como aparece en el problema 56 del



papiro de Ahmes en el que se pide calcular el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 de lado sería  $5 \frac{1}{25}$  manos por codo.

En el caso de la pirámide de Keops el seqt es  $5 \frac{1}{2}$  manos por codo.

### **5.11. UNIDADES, PESOS Y MEDIDAS.**

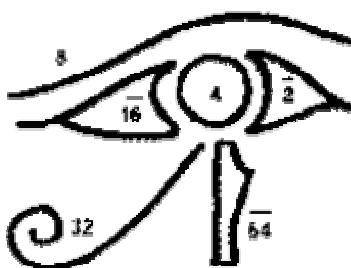
Damos a continuación un glosario de las unidades y términos empleados en la matemática egipcia. He intentado poner las equivalencias con unidades del S.I. Cuando no aparece esta equivalencia es porque no se conoce. Hay que tener en cuenta que las unidades variaron a lo largo del tiempo y su equivalencia no siempre fue la misma. Los valores que aparecen en el SI son los más corrientes.

#### **Medidas de superficie**

La unidad básica de superficie era el **setat** (sTAt) que equivalía a un cuadrado de lado 100 codos, es decir 100 codos cuadrados. Para superficies menores se empleaban el **remen** (rmn) ( $\frac{1}{2}$  setat), el **hebes** (Hbs) ( $\frac{1}{4}$  de setat) y el **sa** (sA) ( $\frac{1}{8}$  de setat), y además existía una medida llamada **jata** (xA-tA) que equivalía a 100 setat y se empleaba en grandes mediciones.

#### **Medidas de volumen**

La unidad de capacidad era el **heqat** (HqAt), representado como el Ojo de Horus. Se empleaba para medir el trigo y la cebada fundamentalmente y equivalía a unos **4.8 litros**. En mediciones más grandes, por ejemplo para almacenes, se empleaba una unidad que podríamos llamar "100 heqat cuádruples". Cada una de las partes del Ojo de Horus era una fracción de heqat y se conocen como fracciones "Ojo de Horus". La división era, considerando el ojo derecho



Las cejas equivalían a  $1/8$ , la pupila era  $1/4$ , la parte izquierda de la pupila era  $1/2$ , la parte derecha de la pupila era  $1/16$ , la parte inferior vertical bajo el ojo era  $1/32$  y la parte inferior diagonal del ojo representaba  $1/64$ .

El **Oipe** o ipet (ipt) contenía **4 heqat**, es decir 19.22 litros. 5 Oipes formaban un **jar** (XAr) (~ 96 litros), es decir un jar eran 20 heqats (en algunos textos he visto la equivalencia a 16 heqats) y a  $2/3$  de codo cúbico. Una unidad común en la medida de grano era 100 oipes (20 jar). Existía además una unidad llamada **Henu** (hnw) que aparece en el papiro Rhind definida como  $1/10$  de heqat, por tanto unos 0.48 litros, empleada en la medición de perfumes normalmente aunque parece que también se utilizó en medidas de grano. El **ro** (r) equivalía a  $1/320$  de heqat. Esta unidad se empleó sólo en medidas de grano. Cuando se medía el grano en heqats se usaban las fracciones ojo de Horus :  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$ ,  $1/64$  y para medidas inferiores a  $1/64$  de heqat se empleaban múltiplos de ro, de modo que un ro contenía 5 medidas de  $1/64$  de heqat, y por tanto nunca se utilizaba  $1/128$  de heqat sino  $2 \frac{1}{2}$  ro, que era también el término empleado para designar las fracciones. Se empleaba el signo seguido del denominador de la fracción, puesto que sólo se empleaban fracciones unitarias.

Nombre	Equivalencia
Heqat	4.8 l
Oipe o ipet	19.22 l
Jar	96 l
Henu	0.48 l
Ro	15 cc

## Medidas especiales de líquidos

Para medir líquidos se empleaban el **Des** (ds) o el **Secha** para la cerveza. Esta última era de muy poco contenido. Para el incienso usaban el **Men** (mn) y el **Hebenet** (hbnt). Para el vino se empleaba el **Hebenet**. No conozco las equivalencias en el SI.

## Medidas de longitud



### Cada división de la regla corresponde a un dedo

La unidad básica de longitud era el **codo o cubit (mH)**. El codo original medía unos 457 mm. A partir de la III dinastía se tomó como unidad de medida el codo real, que es el codo mas un palmo y equivalía a unos 523 mm. Posteriormente, durante el periodo grecoromano se emplearon el codo griego (~ 462,5 mm) y el codo romano (~ 443,5 mm). El codo se dividía en 7 **palmos** o **manos (shesep)**. Existían además otras unidades fraccionarias del codo, como el **dedo (yeba)** que representaba 1/28 de codo, es decir un cuarto de mano. El **nebiu** era un codo y medio y la **vara (jet)** o **cuerda** representaba 100 codos. Para medidas de longitud grandes se empleaba el **rio (iteru)** equivalente a 10.5 km (unos 20.000 codos), aunque en algunos textos esta unidad aparece como inferior. El **demen** era una unidad un tanto curiosa; el doble demen equivalía a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 codo. Sería el equivalente a la raíz cuadrada de 2 codos, es decir 0.739 metros

Nombre	Nombre egipcio	Equivalencia
Codo	Meh	0.523 m
Palmo	Shesep	7.471 cm
Dedo	Yeba	1.87 cm
Vara	Jet	52.3 m
Rio	Iteru	10.5 Km

### Medidas de peso

La unidad fundamental de peso era el **Deben**, empleada para intercambios y equivalía a 91 gramos, normalmente de cobre, aunque el valor de los productos podía aparecer expresado en debenes de oro o plata. El **qedety**. era una décima parte de un deben. El **Shat o anillo** equivalía a medio deben.

### Otras Unidades

**Pesu**: Unidad que expresa la calidad del pan o la cerveza; se refiere al número de panes fabricados por unidad de peso de grano. Cuanto mayor es el pesu peor calidad tiene el producto fabricado. También se conoce como "**fuerza**". Se media por el número de unidades que se fabricaban con un heqat. Si con un heqat de grano se fabricaban 20 barras de pan, entonces su pesu era 20.

**Shaty**: Esta unidad es sólo conocida a través del papiro Rhind. En el problema 62 de este papiro se le asigna un valor de  $1/12$  de un deben de oro. Un deben de plata contiene 6 shaty y un deben de plomo (?) equivale a 3 shaty.

**Seqt**: Pendiente de una superficie plana inclinada. En mediciones verticales empleaban el **codo** y en horizontales la **mano**, que equivalía a  $1/7$  del codo. El seqt se daba en manos por codos.

**Setat**: El setat era una medida de superficie y equivalía a un jet

cuadrado, es decir 10.000 codos cuadrados. A veces se emplea el término griego **aurora** para designar el setat. Además en el papiro Rhind se emplean signos especiales para denotar  $1/2$ ,  $1/4$  y  $1/8$  de setat, que posiblemente tuvieron nombres especiales.

## **BIBLIOGRAFÍA:**

- **BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA:**

- **PÁGINAS WEB CONSULTADAS:**

- ⌚ <http://topología.geomet.uv.es/naveira/DISCURSO.html>
    - ⌚ [www.argenmaticas.com.ar/historia/egipto.html](http://www.argenmaticas.com.ar/historia/egipto.html)
    - ⌚ [www.agrimensormonzon.com.ar/tendedores.html](http://www.agrimensormonzon.com.ar/tendedores.html)
    - ⌚ [www.egiptomania/mitologia/ciencia/papiro\\_rhind.htm](http://www.egiptomania/mitologia/ciencia/papiro_rhind.htm)

- **BIBLIOGRAFÍA DE INTERES:**

- **PÁGINAS WEB:**

- ⌚ <http://newton.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/madancientegyptpapyrus.html>
    - ⌚ [www.numbers.computations.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.html](http://www.numbers.computations.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.html)
    - ⌚ [www.gizagrip.fsnet.co.uk/html/math.htm](http://www.gizagrip.fsnet.co.uk/html/math.htm)
    - ⌚ [www.history.mes.st-and.ac.uk/-history/](http://www.history.mes.st-and.ac.uk/-history/)
    - ⌚ [www.mathax.truman.edu/-thammond/history/RhindPapyrus.html](http://www.mathax.truman.edu/-thammond/history/RhindPapyrus.html)
    - ⌚ [www.geometry.net/scientists/Ahmes.htm](http://www.geometry.net/scientists/Ahmes.htm)
    - ⌚ [www.cerezo.pntic.mec.es/-agarc170/paginas/Egipto\\_Antiguo.htm](http://www.cerezo.pntic.mec.es/-agarc170/paginas/Egipto_Antiguo.htm)
    - ⌚ [www.terra.es/persona/arey42/egipto.htm](http://www.terra.es/persona/arey42/egipto.htm)
    - ⌚ [www.arrakis.es/-mcj/cordoba.htm](http://www.arrakis.es/-mcj/cordoba.htm)
    - ⌚ [www.members.nbci.com/cienciaseduc/FINAL%20M.html](http://www.members.nbci.com/cienciaseduc/FINAL%20M.html)
    - ⌚ [www.iusb.edu/-journal/2000/zahrt.html](http://www.iusb.edu/-journal/2000/zahrt.html)
    - ⌚ [www.karrels.org/Ed/ACM/ec94/prob\\_g.html](http://www.karrels.org/Ed/ACM/ec94/prob_g.html)

---

○ **LIBROS Y ARTÍCULOS:**

- ≡ **Bruckheimer, M.** and **Y. Salomon.** Some Comments on R.J. Gillings' Analysis of the  $2/n$  Table in the Rhind Papyrus. *Historia Mathematica* 4 (1977): 445-452.
- ≡ **Chace, Arnold B.** *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058: Photographic Facsimile, Hieroglyphic Transcription, Transliteration, Literal Translation, Free Translation, Mathematical Commentary, and Bibliography.* Oberlin, OH: Mathematical Association of America, 1927-1929. Partially repr. as: *The Rhind Mathematical Papyrus: Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Transcriptions, Transliterations and Literal Translations* (= *Classics in Mathematics Education*, 8). Reston, VA: National Council of Teachers of Education, 1979.
- ≡ **Engels, Hermann.** Quadrature of the Circle in Ancient Egypt. *Historia Mathematica* 4 (1977): 137-140.
- ≡ **Gerdes, Paulus.** Three Alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of a Circle. *Historia Mathematica* 12 (1985): 261-268.
- ≡ **Gillings, Richard J.** The Division of 2 by the Odd Numbers 3 to 101 from the Recto of the Rhind Mathematical Papyrus (B.M. 10058). *Australian Journal of Science* 18 (1955): 43-49. [AEB 60287 English]
- ≡ **Gillings, Richard J.** The Egyptian  $2/3$  Table for Fractions: The Rhind Mathematical Papyrus (B.M. 10057-58). *Australian Journal of Science* 22 (1959): 247-250.
- ≡ **Gillings, Richard J.** "Think-of-a-Number:" Problems 28 and 29 of the Rhind Mathematical Papyrus (B.M. 10057-8). *The Mathematics Teacher* 54 (1961): 97-100. [61285 English]

- 
- ▮ **Gillings, Richard J.** The Egyptian Mathematical Leather Roll (B.M. 10250). *Australian Journal of Science* 24 (1962): 339-344. [AEB 62219 English]
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus. *The Mathematical Teacher* 55 (1962): 61-69.
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** The Addition of Egyptian Unit Fractions. *JEA* 51 (1965): 95-106. [AEB 65197 English]
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** The Area of the Curved Surface of a Hemisphere in Ancient Egypt/jr. *Australian Journal of Science/vl.30* (1967 – 68)
  
  - ▮ \* **Gillings, Richard J.** *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, MA: MIT Press, 1972. [AEB 72249 English]
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus: How did the Ancient Egyptian Scribe Prepare It? *Archiv for History of Exact Sciences* 12 (1974): 291-298.
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** Response to "Some Comments on R.J. Gillings' Analysis of the  $2/n$  Table in the Rhind Papyrus." *Historia Mathematica* 5 (1978): 221-227.
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus and the Egyptian Mathematical Leather Roll. *Historia Mathematica* 6 (1979): 442-447.
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** The Egyptian Mathematical Leather-Roll, Line 8: How did the Scribe do it? *Historia Mathematica* 8 (1981): 456-457.
  
  - ▮ **Gillings, Richard J.** and **W.J.A. Rigg.** The Area of a Circle in Ancient Egypt. *Australian Journal of Science* 32 (1969-1970): 197-199.
-



- 
- ≡ **Guggenbuhl, Laura.** The New York Fragments of the Rhind Mathematical Papyrus. *The Mathematics Teacher* 57 (1964): 406-410.
  - ≡ **Legon, John A.R.** A Kahun Mathematical Fragment. *DE* 24 (1992): 21-24.
  - ≡ **Mayer-Astruc, J.P.** A propos du papyrus mathématique Rhind. *CdE* 35, 69/70 (1960): 120-139.
  - ≡ **Newman, James R.** The Rhind Papyrus. *Scientific American* 187, 2 (1952): 24-27. [2501 English]
  - ≡ **Nims, Charles F.** The Bread and Beer Problems of the Moscow Mathematical Papyrus. *JEA* 44 (1958): 56-65.
  - ≡ **Parker, Richard A.** A Demotic Mathematical Papyrus Fragment. *JNES* 18 (1959): 275-279.
  - ≡ **Parker, Richard A.** Some Demotic Mathematical Papyri. *Centaurus* 14 (1969): 136-141.
  - ≡ **Parker, Richard A.** *Demotic Mathematical Papyri* (= *Brown Egyptological Studies*, 7). Providence: Brown University Press, 1972. [AEB 72542 English]
  - ≡ **Peet, Thomas E.** *The Rhind Mathematical Papyrus*. London: University of Liverpool, 1923.GR (Reprint) Reprinted 1977.eGR
  - ≡ **Robins, Gay and Charles Shute.** *The Rhind Mathematical Papyrus*. New York: Dover, 1987 .
  - ≡ **Silverman, David P.** Fractions in the Abu Sir Papyri. *JEA* 61 (1975): 248-249.

- ≡ **Struve, Vasili** (ed.). *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau* (= *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik und Physik*, 1). Berlin, 1930; repr., 1972.
  
- ≡ **van der Waerden, B.L.** The  $(2:n)$  Table in the Rhind Papyrus. *Centaurus* 23 (1980): 259-274.
  
- ≡ **Vogel, Kurt.** *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der  $2:n$  Tabelle des Papyrus Rhind*. Munich: Beckstein, 1929; repr., 1970.
  
- ≡ **Vogel, Kurt.** Ein arithmetisches Problem aus dem Mittleren Reich in einem demotischen Papyrus. *Enchoria* 4 (1974): 67-70.