

Propiedades dinámicas de las funciones de Newton asociadas a polinomios. Conjetura de Holmgren

FRANCISCO BALIBREA¹, MANUEL ZAMORA²

¹ Dpto. de matemáticas, Universidad Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Murcia. E-mail: balibrea@um.es.

² Dpto. de matemáticas, Universidad Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Murcia. E-mail: mzc07039@alu.um.es.

Palabras clave: Caos de Devaney, Función de Newton, Diagramas de bifurcación

Resumen

Se propone estudiar la dinámica de las funciones de Newton asociadas a polinomios $p(x)$ de variable real $\left(N_p(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}\right)$ que permita obtener aproximaciones a las ecuaciones $p(x) = 0$, es decir, estudiar los sistemas dinámicos de la forma (N_p, R) para entender los intervalos de convergencia del método de Newton-Raphson y la estructura de los subconjuntos de la recta real donde el comportamiento no es convergente e incluso caótico en el sentido Devaney.

Estos estudios han sido realizados para polinomios de grado dos y parcialmente para los de grado tres. Nos proponemos estudiar los de grado tres centrandonos en resolver parcialmente la conjetura de Holmgren.

1. Introducción y motivación

El clásico problema de resolver ecuaciones ha influido sustancialmente en la evolución de las matemáticas durante siglos y todavía a día de hoy tiene importantes aplicaciones en el campo de la computación.

Es bien sabido que en general no es posible resolver la ecuación polinómica de quinto grado o superior usando radicales. Consecuentemente, se requiere métodos numéricos para estimar con precisión las raíces de estos polinomios.

Muchos problemas matemáticos se reducen a averiguar las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, y el método de Newton consistente en encontrar una sucesión $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ que se aproxime a la solución dada por

$$x_{n+1} = N_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

es alguno de los algoritmos más comunes para resolver este problema. La interpretación geométrica de este método es sencilla, x_{n+1} es el punto donde la recta tangente $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ de la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ interseca al eje x .

La sucesión obtenida para el método de Newton son las órbitas de la correspondiente aplicación de Newton $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. La clave de esta aplicación es transformar el problema de encontrar soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en el problema de encontrar puntos fijos atractores para la aplicación de Newton. Pero desgraciadamente no para todo valor inicial x_0 la sucesión $(N_f^n(x_0))_n$ converge a alguna raíz (con $N_f^n(x_0)$ se denota la n -ésima iterada de la función N_f en el punto x_0). Además un problema interesante sería averiguar todos los puntos iniciales en \mathbb{R} para los cuales la anterior sucesión es convergente. Bajo suposiciones estandar se puede afirmar que el método de Newton es localmente convergente, es decir que es convergente en algún entorno de una solución de la ecuación. La posibilidad de que un pequeño cambio en x_0 llegue a producir drásticos cambios en la convergencia indica un caracter patológico de la convergencia del método.

Una transformación algebraica interesante y de caracter general es la llamada *transformación de Tschirnhaus*, que reduce la ecuación polinómica general de grado n

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

a una ecuación también polinómica del mismo grado pero con 3 términos menos

$$y^n + b_4y^{n-4} + \dots + b_{n-1}y + b_n = 0$$

Y manteniendo la siguiente relación entre las raíces de los polinomios

$$y_j = \gamma_4x_j^4 + \gamma_3x_j^3 + \gamma_2x_j^2 + \gamma_1x_j + \gamma_0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

donde γ_j puede ser expresado por radicales en términos de los c'_j s.

El resultado de las expresiones anteriores es un proceso algebraico muy complicado y que requiere de mucha computación. Pero esta reducción algebraica de parámetros provoca la pérdida de mucha información dinámica, ya que en general *las transformaciones de Tschirnhaus* son no invertibles y no lineales y por tanto no son conjugaciones topológicas, que serían las que garantizaría invarianza en las propiedades.

2. Resultados previos

Como hemos indicado en la introducción, la motivación de introducir la función de Newton, es para transformar el problema de encontrar soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, en el problema de encontrar puntos fijos atractores para la función de Newton. Para ello nos vamos a valer del siguiente teorema, cuya demostración será hecha para el caso de funciones polinómicas (que es el caso que nos interesa)(Ver [1]) pero no obstante puede hacerse para el caso de funciones diferenciables de clase C^1 , con el cuidado de trabajar con raíces de la función f donde $N_f(x)$ esté definida.

Teorema 2.1. *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si realizamos cancelaciones de factores comunes de la expresión $N_p(x)$, entonces $N_p(x)$ está definida sobre las raíces de p . Además son equivalentes:*

1. r es un punto fijo de $N_p(x)$
2. r es una raíz de p

Obteniéndose además que todo punto fijo de $N_p(x)$ es un punto atractor.

Las nociones de *punto atractor*, *conjugación topológica*, *función topológicamente transitiva*, *dependencia sensible a las condiciones iniciales* y *caos en sentido Devaney* pueden verse en [1] y [2]. Además en [2] encontramos un teorema que caracteriza la existencia de una órbita densa para una función f con la existencia de caos. La utilidad del teorema anterior radica en que permite dar evidencias gráficas de cuando una función puede ser caótica en sentido Devaney.

El ser o no ser cierta función caótica, es un concepto puramente abstracto y frecuentemente resulta muy difícil de probar. Una buena motivación para aventurarnos a hacer su prueba, sería observar que existe una órbita densa.

3. Método de Newton para polinomios cúbicos

En esta sección se propone estudiar el método de Newton para polinomios cúbicos de la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Veremos que podemos simplificar el análisis reduciéndonos a casos, donde el comportamiento de N varía respecto de un parámetro.

Proposición 3.1. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $g(x) = x^3 + Ax + B$, donde $A = 9ac - 3b^2$ y $B = 27a^2d + 2b^3 - 9abc$, entonces la función $\tau(x) = 3ax + b$ es una conjugación topológica de $N_f(x)$ a $N_g(x)$. Es decir

$$\tau \circ N_f = N_g \circ \tau$$

Proposición 3.2. Sea $f(x) = x^3 + ax + b^3$ con $b \neq 0$ y definamos $g(x) = x^3 + cx + 1$ donde $c = \frac{a}{b^2}$. Entonces N_f y N_g son topologicamente conjugadas, via el homeomorfismo $\tau(x) = \frac{1}{b}x$.

De las dos proposiciones anteriores, obtenemos que la dinámica de la función de Newton asociada a un polinomio de grado tres arbitrario, es la misma que la asociada a alguno de estos polinomios

$$f_c(x) = x^3 + cx + 1 \qquad g_a(x) = x^3 + ax$$

La siguiente proposición indica que la función de Newton para los polinomios de la forma g_a , es topológicamente conjugada a la correspondiente a

$$p_+(x) = x^3 + x \qquad \text{ó} \qquad p_-(x) = x^3 - x \qquad \text{ó} \qquad p_0(x) = x^3$$

Proposición 3.3. Si $\tau(x) = \frac{1}{a}x$ donde $a \neq 0$, $g(x) = x^3 + a^2x$ y $p_+(x) = x^3 + x$. Entonces N_g y N_{p_+} son topologicamente conjugadas via τ . Por otro lado, si $f(x) = x^3 - a^2x$ y $p_-(x) = x^3 - x$. Entonces τ es una conjugación topológica entre N_g y N_{p_-} .

Usando estas propiedades y la anterior discursión, se concluye que todo polinomio cúbico $p(x)$, tiene función de Newton asociada, topologicmente conjugada a la función de Newton para $f(x) = x^3 + cx + 1$, ó bien para alguno de estos otros polinomios

$$p_+(x) = x^3 + x \qquad p_-(x) = x^3 - x \qquad p_0(x) = x^3$$

El análisis de N_{p_+} y N_{p_0} es sencillo. Los resultados obtenidos en esos casos, se resumen en esta proposición.

Proposición 3.4. *Sea $p_+(x) = x^3 + x$ y $p_0(x) = x^3$. Entonces el 0 es el único punto fijo de N_{p_+} y N_{p_0} , y el conjunto estable del 0, contiene al conjunto de los números reales, para ambas funciones.*

Más difícil de estudiar, es el comportamiento dinámico de $N_{p_-}(x)$. El siguiente teorema muestra, la grandeza del razonamiento matemático y cuestiona el razonamiento de una máquina, además nos enseña una situación en que la dinámica de la función de Newton asociada es interesante.

Teorema 3.5 (Método de Newton para $p(x) = x^3 - x$). *Sea $p(x) = x^3 - x$, y 0, 1 y -1 sus raíces. Entonces existe una sucesión monótona decreciente y otra monótona creciente, $(a_i)_i$ y $(b_i)_i$ respectivamente, donde no existe alguna iterada de la función de Newton. Además el comportamiento dinámico para esa función es el siguiente*

$$\begin{aligned} W^s(1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right) \cup \left(\bigcup_{t=0}^{+\infty} (a_{2t+1}, a_{2t}) \right) \cup \left(\bigcup_{t=0}^{+\infty} (b_{2t}, b_{2t+1}) \right) \\ W^s(-1) &= \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\bigcup_{t=0}^{+\infty} (a_{2t+2}, a_{2t+1}) \right) \cup \left(\bigcup_{t=0}^{+\infty} (b_{2t+1}, b_{2t+2}) \right) \\ W^s(\infty) &= \{a_i, b_i : i = 0, 1, 2 \dots\} \\ W^s(0) &= \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

Si resolviésemos numericamente el método para la condición inicial a_2 , observaríamos que éste converge a alguna raíz del polinomio. Sin embargo, razonábamos en el último apartado del teorema que tal método no es convergente para esa condición inicial. La razones de que ocurra este comportamiento, se debe a que un ordenador cuando realiza un algoritmo numérico trabaja siempre con números maquina, es decir, trabaja con aproximaciones a los números reales que produce pequeños errores y provoca la razón de la convergencia del método.

Volvemos ahora con el método de Newton para el polinomio $f(x) = x^3 + cx + 1$. En este caso, la función de Newton asociada es

$$N(x) = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + c}$$

Cuando $c > 0$, es fácil verificar que N tiene un único punto fijo y que el conjunto estable de ese punto contiene a todos los números reales.

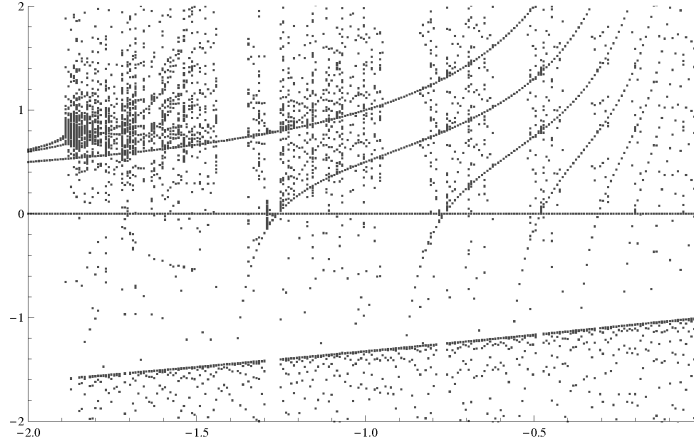


Figura 1: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$ donde N_c es la función de Newton asociada al polinomio $f_c(x) = x^3 + cx + 1$. Se han utilizado 250 valores del parámetro c comprendidos entre -2 y 0 , y n varía de 0 a 100 para cada c .

Cuando $c = 0$, existe una única raíz real del polinomio, y el conjunto estable para N de esa raíz contiene a todos los números reales excepto al 0 .

El caso $c < 0$, es el más interesante y el más complicado, incluso existen algunas cuestiones abiertas sobre la dinámica de la función de Newton asociada, que plantearé más adelante.

Notesé que la gráfica de f es simétrica respecto al punto $(0, 1)$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt{-\frac{c}{3}}$ y un máximo relativo en $x = -\sqrt{-\frac{c}{3}}$.

Llamemos x_m al punto donde f alcanza el mínimo relativo.

Observese que cuando c decrece, el mínimo y el máximo relativo decrece y crece respectivamente. Cuando $c = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, el mínimo relativo vale 0 , es decir, x_m es una raíz del polinomio f . Denotemos el punto $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx -1,8898$ por c_0 . Cuando $c < c_0$, f tiene 3 raíces reales; si $c > c_0$, f tiene únicamente una raíz real y finalmente cuando $c = c_0$ f tiene 2 raíces reales que además una de ellas será solución de la ecuación $f'(x) = 0$, donde $f'(x)$ es un polinomio de grado 2 que sabemos resolver, una vez hayamos resuelto la ecuación, factorizando obtenemos que $f(x) = (x - x_m)g(x)$ donde $g(x)$ nuevamente es un polinomio de grado 2 al que se le pueden calcular sus raíces fácilmente.

Observamos que el caso en que $c < c_0$, la gráfica de la función de Newton asociada es semejante al caso de Newton para polinomios de la forma $p(x) = x^3 - x$, esto nos induce a pensar que el comportamiento dinámico de ambas funciones sea el mismo.

Finalmente el caso más relevante es cuando $c > c_0$; una motivación especial tenemos por ejemplo si consideramos $c = -1$, en efecto, tomando como punto inicial $x = 0$, el siguiente valor es $N_f(0) = 1 > x_m$, el valor que encontramos en la siguiente iteración será $N_f^2(0) = N_f(1) = \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{3}} = x_m$, llegando a percibir un comportamiento extraño.

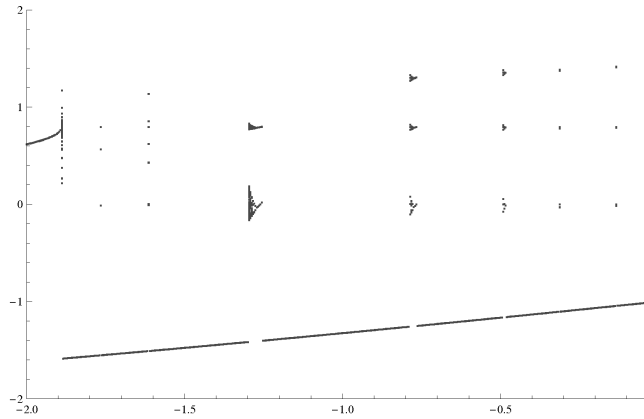


Figura 2: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$. Se han utilizado 500 valores del parámetro c comprendidos entre -2 y 0 , y todos los valores de n entre 500 y 600 para cada c .

Iterando con un ordenador obtendríamos

$$\begin{array}{lllll}
 x_0 = 0 & x_1 = 1 & x_2 = 0,5 & x_3 = 3 & x_4 = 2,038 \\
 x_5 = 1,39 & x_6 = 0,9212 & x_7 = 0,345 & x_8 = 1,428 & x_9 = 0,942 \\
 x_{10} = 0,405
 \end{array}$$

Aparentemente esta sucesión no es convergente y si lo es, convergerá muy lentamente. Observando la Figura 1, intuimos que en general el 0 no es atraído rápidamente hacia algunas de las raíces del polinomio, esa imagen también nos permite conjeturar para qué valores de c , el 0 es atraído a puntos al menos periódicos, por ejemplo, un indicio de este hecho quedaría reflejado cuando vemos en la figura valores de c para los cuales la zona más oscura es un conjunto de puntos finito, el periodo de tal punto es el cardinal de ese conjunto.

Para algunos valores de c , parece que la órbita del 0 es densa en cierto intervalo, lo que nos anima a pensar que en dicho intervalo la función de Newton asociada podría ser caótica. Si observamos la Figura 2, de nuevo no es inmediato buscar un patrón en el comportamiento de la órbita del 0 para ciertos valores del parámetro c , sin embargo, un gran porcentaje de órbitas aparentemente convergen a alguna raíz.

Si fijamos el parámetro $c = -1,265$, y consideramos la función N^2 , observaríamos que existe un punto fijo cuya derivada en módulo absoluto es menor que 1 .

La motivación geométrica de este hecho se basa en que la recta dibujada con pendiente -1 que pasa por el punto fijo de N^2 está más «inclinada» que la recta tangente a la gráfica de N^2 que pasa por ese punto, en otras palabras el módulo de su pendiente es mayor que el módulo de la pendiente de la recta tangente.

Lo sustancial de la observación anterior es que muestra la existencia de un punto periódico, cuyo primer periodo es 2 y además es atractor, lo que supondría a efectos dinámicos que el método de Newton no es convergente si tomamos como condición inicial el cero.

Si nos fijamos en la Figura 3, sería sorprendente no encontrar algo más interesante desde el punto de vista dinámico, cuando c recorre el rango de valores comprendido entre $-1,3$

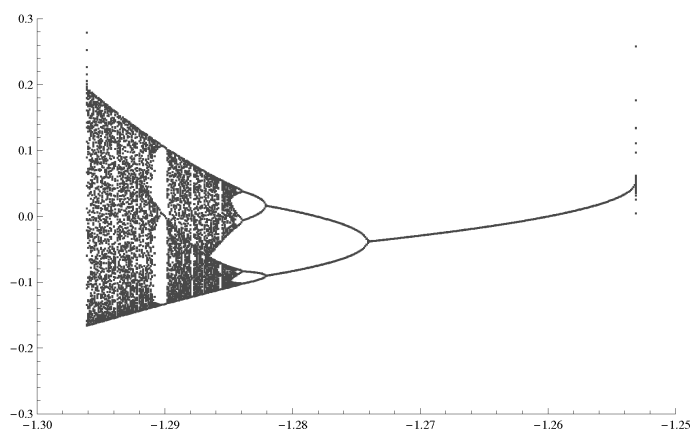


Figura 3: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$. Se han utilizado 500 valores del parámetro c comprendidos entre $-1,3$ y $-1,25$, y n varía de 500 a 650 para cada c .

y $-1,25$, que un simple punto periódico de primer periodo 2.

Curiosamente la figura muestra un *diagrama de bifurcación de duplicación de periodo* que en ocasiones nos motiva a pensar que existe algún subconjunto del dominio, donde la función de Newton podría ser caótica. Así que, para el caso cúbico obtenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 3.1. *Si $f(x) = x^3 - cx + 1$, entonces existe un $c > 0$ y un subconjunto de números reales donde N_f es caótica. Además, este conjunto es atractor.*

Indagando un poco en la conjetura con la ayuda del computador y basándonos en la Figura 3 observamos que la conjetura podría ser cierta para algún parámetro c comprendido entre $-1,3$ y $-1,29$.

Afinado más, consideramos el diagrama de bifurcación que aparece en la Figura 4 con parámetro c recorriendo el intervalo $(-1,296, -1,294)$. Podemos ver la existencia de un parámetro c comprendido entre $(-1,2952, -1,2950)$, donde intuitivamente la órbita del 0 no es densa en algún subconjunto del dominio, sino más bien es convergente a una cierta órbita periódica. Si observamos dicha zona con «lupa» obtendríamos la Figura 5, donde efectivamente se ratifica la existencia de dicho parámetro.

Siendo un poco más precisos y observando que aparentemente no existe más zonas donde para algún parámetro c , la órbita del 0 para la función de Newton converja a algún punto periódico, consideramos como rango de c el intervalo $(-1,2959, -1,29580)$ y observamos el diagrama de bifurcación de la Figura 6, efectivamente parece que N_c ha caído dentro de una cascada de bifurcación de periodo que generalmente viene acompañada de caos.

Tomemos como candidato $c = -1,2959$ y consideremos la función N^2 , el motivo de considerar N^2 en lugar de N es simplemente que al restringir N^2 al intervalo $[-0,5, 0,5]$ obtenemos la gráfica de una sencilla parábola que nos facilitará sustancialmente el estudio formal de la caoticidad en cierto subconjunto de ese intervalo.

Evidencias gráficas (vease 7) nos viene a decir que cuando $c = -1,2959$, N_c^2 es caótica en $[-\frac{5544909}{33554432}, \frac{6412915}{33554432}]$, siendo $\frac{6412915}{33554432}$ el menor punto de corte en el eje positivo de la gráfi-

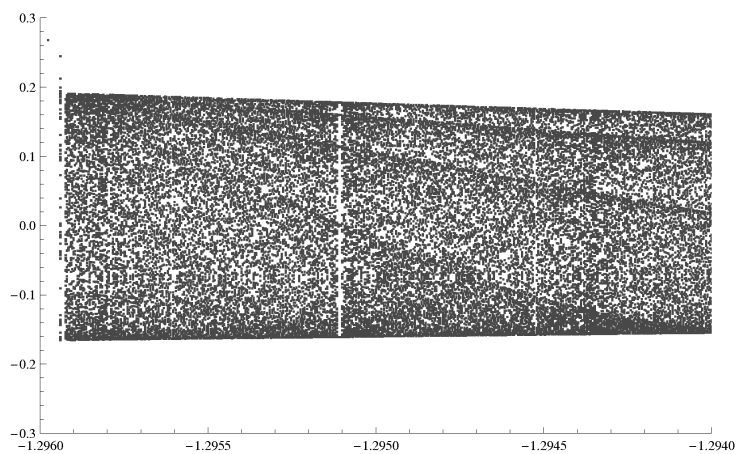


Figura 4: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$. Se han utilizado 500 valores del parámetro c comprendidos entre $-1,29620$ y $-1,2940$, y n varía de 500 a 650 para cada c .

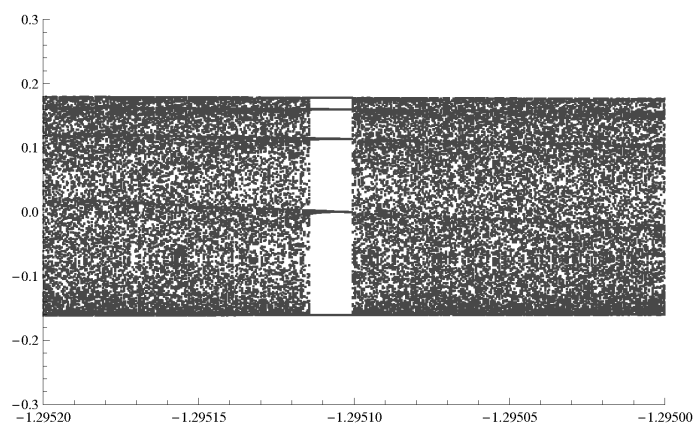


Figura 5: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$. Se han utilizado 500 valores del parámetro c comprendidos entre $-1,2952$ y $-1,2950$, y n varía de 500 a 650 para cada c .

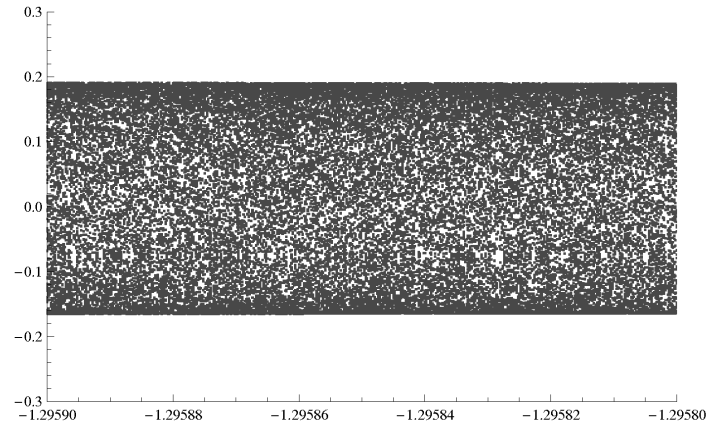


Figura 6: Representa los puntos $(c, N_c^n(0))$. Se han utilizado 500 valores del parámetro c comprendidos entre $-1,2959$ y $-1,2958$, y n varía de 500 a 650 para cada c .

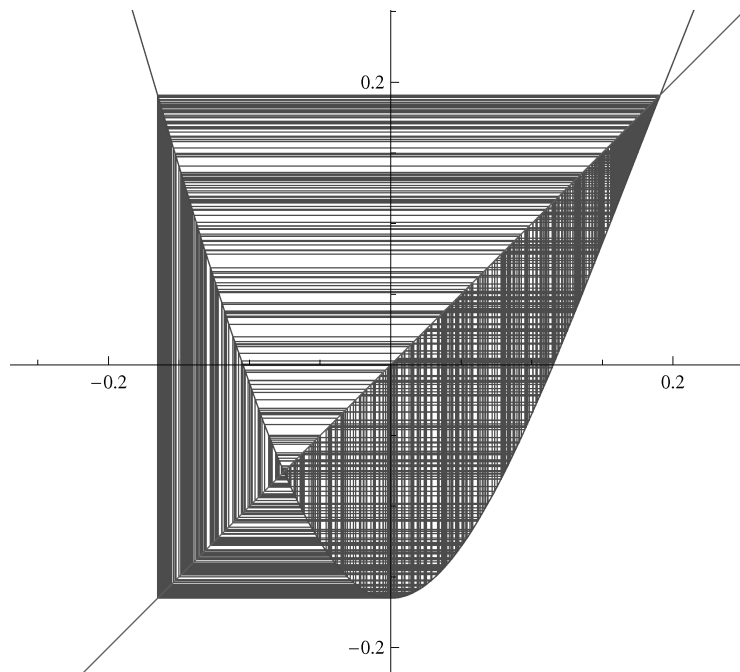


Figura 7: Análisis gráfico de 600 iteraciones de la función de Newton asociada al polinomio $p(x) = x^3 - 1,2959x + 1$ tomando como valor inicial el 0.

ca de N^2 con la gráfica de la identidad, y $-\frac{5544909}{33554432}$ la única raíz negativa de la ecuación $N^2(x) = \frac{6412915}{33554432}$.

Teniendo en cuenta que la caoticidad de la función N^2 en un intervalo I implica la caoticidad de N sobre el conjunto $N(I) \cup I$. Quedaría por probar analíticamente la existencia de un punto que con relación a N^2 tenga órbita densa y así concluiría la prueba de la conjetura.

Agradecimientos

Este artículo ha sido parcialmente financiado por *MCYT* proyectos *MTM2005-03860* y *MTM2005-06098-C02-01*, por Fundación Séneca, proyecto número *00684-FI-04* y por Junta de Castilla la-Mancha, proyecto *PAI06-0114* y *PBC05-011-3*.

Referencias

- [1] R.A. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, second edition, Universitext, 2000.
- [2] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, second edition, Addison-Wesley, 1989.