XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–8)

Una nota sobre las estimas a priori del error para formulaciones mixtas aumentadas

Tomás P. Barrios[1], Edwin Behrens[2]

[1] *Dpto. Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Casilla 297, Concepción, Chile. E-mails:* `tomas@ucsc.cl`.
[2] *Dpto. de Ingeniería Civil, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Casilla 297, Concepción, Chile. E-mail:* `ebehrens@ucsc.cl`.

Palabras clave: Estimas a priori, formulaciones mixtas aumentadas.

Resumen

En este trabajo presentamos estimas a priori del error refinadas para formulaciones mixtas aumentadas. Específicamente, bajo hipótesis razonables, más la utilización de la formulación de elementos finitos tradicional y la formulación mixta dual, obtenemos estimas a priori del error independientes para cada una de las incógnitas involucradas, las cuales para soluciones suficientemente suaves, mejoran el resultado conocido. Finalmente, se incluyen ejemplos numéricos que confirman el resultado teórico.

1. Introducción

Sea Ω un dominio acotado simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dado $f \in L^2(\Omega)$, consideramos el problema modelo: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{1}$$

Denotamos por V_h al subespacio de elementos finitos de $H_0^1(\Omega)$. Cuando la solución $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1) se aproxima por $u_h^{\mathrm{s}} \in V_h$ usando el método de elementos finitos tradicional, se satisface que

$$a(u,v) = \int_\Omega f\,v\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,, \quad a(u_h^{\mathrm{s}}, v_h) = \int_\Omega f\,v_h\,dx \quad \forall\, v_h \in V_h\,, \text{ y} \tag{2}$$

$$a(u - u_h^{\mathrm{s}}, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h\,, \tag{3}$$

donde la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ está definida por $a(w,v) := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\,dx$. La matriz asociada al esquema discreto resulta ser simétrica y definida positiva, las cuales son propiedades muy apetecidas al momento de escoger métodos de resolución veloces (ver [2], [4], [6] y [7]). Sin embargo, cuando estamos interesados en aproximar el flujo, es bien sabido que los métodos mixtos entregan mejor aproximación de éste. Para deducir esta formulación, re-escribimos la ecuación (1) como el siguiente sistema de primer orden: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ y $\sigma \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{\sigma} \,=\, -\nabla u \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,. \tag{4}$$

Luego, procediendo de manera usual, obtenemos la siguiente formulación variacional mixta dual de (4): Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \quad - b(u,\boldsymbol{\tau}) \quad &= \,0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,, \\ b(w,\boldsymbol{\sigma}) \quad &= \int_\Omega f\, w\, dx \qquad \forall\, w \in L^2(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde las formas bilineales $d : H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega) \to \mathbb{R}$ y $b : L^2(\Omega) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega) \to \mathbb{R}$ estan dadas por

$$d(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx \quad \text{y} \quad b(w,\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega w\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx\,,$$

Usando la condición de Babuška-Brezzi puede demostrarse que existe una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times L^2(\Omega)$ de (5). Sin embargo, para el esquema discreto esta condición no siempre se satisface, por lo cual necesitamos adicionar algunas hipótesis. Para este fin, sean $W_h \subset L^2(\Omega)$ y $\Sigma_h \subset H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ los respectivos subespacios de elementos finitos. En lo que sigue, suponemos que

(A1) $W_h = \mathrm{div}\,\Sigma_h$.

(A2) La condición de Babuška-Brezzi se satisface uniformemente.

Bajo estas hipótesis, la siguiente versión discreta de (5): Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u_h^{\mathrm{m}}) \in \Sigma_h \times W_h$ tal que

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}},\boldsymbol{\tau}_h) \quad - b(u_h^{\mathrm{m}},\boldsymbol{\tau}_h) \quad &= \,0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma_h\,, \\ b(w_h,\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) \quad &= \int_\Omega f\, w_h\, dx \qquad \forall\, w_h \in W_h\,, \end{aligned} \tag{6}$$

tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u_h^{\mathrm{m}}) \in \Sigma_h \times W_h$, y se satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$d(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\tau}_h) - b(u - u_h^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma_h\,, \tag{7}$$

y

$$b(w_h, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) = 0 \quad \forall\, w_h \in W_h\,. \tag{8}$$

Además, si W_h contiene a las funciones constante a trozos y f es una función constante a trozos, entonces $(A1)$ implica que estos esquemas poseen una propiedad de conservación de masa local, en el sentido que $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) = 0$ en cada elemento de la triangulación.

Desde el punto de vista práctico, la naturaleza de punto de silla que poseen los métodos mixtos duales conlleva una serie de dificultades. Por ejemplo, la hipótesis $(A1)$ implica que no es posible usar el mismo orden de interpolación para los subespacions de elementos finitos, definidos con respecto a la misma triángulación, para ambas incógnitas. Más aún, la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales a resolver, suele ser indefinida (ver [5], [8], [9]).

Una forma de saldar dichas dificultades consiste en utilizar técnicas de estabilización. Los métodos mixtos aumentados son un caso particular de las técnicas de estabilización que mantienen la propiedad de conservación de masa local. Para deducir la formulación variacional mixta aumentada asociada a (4), seguimos el camino expuesto en [1], e incluimos los siguientes términos de cuadrados mínimos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u + \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v - \boldsymbol{\tau})\, dx \;= 0 \quad \forall\, (v, \boldsymbol{\tau}) \in H_0^1(\Omega) \times H(\mathrm{div}\,; \Omega)\,, \tag{9}$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \;=\; \int_\Omega f\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad\; \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}\,; \Omega)\,. \tag{10}$$

De este modo, sumando las ecuaciones (5), (9) y (10), obtenemos la formulación: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;\; = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{11}$$

donde la forma bilineal $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$, y el funcional lineal $F : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ vienen dados por

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\zeta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;:=& \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \;-\; \int_\Omega w\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \;+\; \int_\Omega v\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\zeta})\, dx \\ &+ \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\zeta})\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \;+\; \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla w + \boldsymbol{\zeta}) \cdot (\nabla v - \boldsymbol{\tau})\, dx\,, \end{aligned} \tag{12}$$

y

$$F(\boldsymbol{\tau}, v) \;:=\; \int_\Omega f\, v\, dx \;+\; \int_\Omega f\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx\,, \tag{13}$$

para todo $(\boldsymbol{\zeta}, w)$, $(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}$. No es difícil ver que la forma bilineal es continua y coerciva en $\mathbf{H}$ (ver Teorema 2.1 en [1] para detalles). De este modo, el Lema de Lax-Milgram implica que la solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ es única y dados los subespacios de elementos finitos $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ y $\Sigma_h \subset H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, existe un único par $(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}, u_h^{\mathrm{a}}) \in \mathbf{H}_h := \Sigma_h \times V_h$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}, u_h^{\mathrm{a}}), (\boldsymbol{\tau}_h, v_h)) \;\; = F(\boldsymbol{\tau}_h, v_h) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}_h, v_h) \in \mathbf{H}_h\,, \tag{14}$$

y se satisface la relación de ortogonalidad

$$A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}, u - u_h^{\mathrm{a}}), (\boldsymbol{\tau}_h, v_h)) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}_h, v_h) \in \mathbf{H}_h\,. \tag{15}$$

2. Estimas a priori refinadas

Lema 2.1 *Asumimos (A1). Entonces se tiene que*

$$A((\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h), (\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h)) = \frac{1}{2} d(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\theta}_h) \;-\; \frac{1}{2}\, b(u - u_h^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{\theta}_h) \;+\; \frac{1}{2}\, b(\eta_h, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\,, \tag{16}$$

Demostración. De (15) tenemos que:

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) = & \; A((\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) + A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}, u-u_h^{\mathrm{a}}),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) \\ = & \; A((\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u-u_h^{\mathrm{s}}),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) \end{aligned}$$

de donde, usando la definición de A (ver ecuación (12)), luego (3) e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) = & \; \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\cdot\boldsymbol{\theta}_h\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u-u_h^{\mathrm{s}})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\theta}_h)\,dx \\ + & \; \frac{1}{2}\int_\Omega \eta_h\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\,dx + \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\theta}_h)\,dx \end{aligned}$$

Además, de la hipótesis $(A1)$ y (8), tenemos que $\int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\theta}_h)\,dx = 0$, por lo tanto la demostración se sigue de las definiciones de las formas bilineales d y b. □

En lo que sigue, con el objetivo de reformular (16), introducimos el siguiente problema auxiliar: Hallar $(\boldsymbol{\kappa}, w) \in \mathbf{H}$ tal que

$$\boldsymbol{\kappa} = -\nabla w \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\kappa} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\theta}_h \quad \text{en} \quad \Omega\,. \tag{17}$$

Claramente, existe un único par $(\boldsymbol{\kappa}, w) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$d(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\tau}) - b(w,\boldsymbol{\tau}) + b(q,\boldsymbol{\kappa}) = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\theta}_h)\,q\,dx \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau},q)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times L^2(\Omega)\,, \tag{18}$$

más aún, bajo las hipótesis $(A1)$ y $(A2)$, existe un único $(\boldsymbol{\kappa}_h, w_h)\in\Sigma_h\times W_h$ tal que

$$d(\boldsymbol{\kappa}_h,\boldsymbol{\tau}_h) - b(w_h,\boldsymbol{\tau}_h) + b(q_h,\boldsymbol{\kappa}_h) = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\theta}_h)\,q_h\,dx \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}_h,q_h)\in\Sigma_h\times W_h\,. \tag{19}$$

El siguiente lema será de gran utilidad para re-escribir (16).

Lema 2.2 *Suponemos válidos* $(A1)$ *y* $(A2)$*. Sean* $(\boldsymbol{\kappa}, w)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times L^2(\Omega)$ *y* $(\boldsymbol{\kappa}_h, w_h)\in \Sigma_h\times W_h$*, las soluciones de (18) y (19), respectivamente. Entonces para todo* $q_h\in W_h$*, se cumple*

$$d(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}},\boldsymbol{\theta}_h) = d(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}},\boldsymbol{\kappa}_h-\boldsymbol{\kappa}) + b(w-q_h,\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})\,,$$

y para todo $v_h\in V_h$

$$b(u-u_h^{\mathrm{s}},\boldsymbol{\theta}_h) = a(u-u_h^{\mathrm{s}}, w-v_h)\,.$$

Demostración. Ver Lema 3.3 en [3] para detalles. □

Una aplicación directa de los Lemas 2.2 y 2.3 es el siguiente resultado.

Lema 2.3 *Para todo* $w_h\in W_h$ *y* $v_h\in V_h$ *tenemos*

$$A((\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h),(\boldsymbol{\theta}_h,\eta_h)) = \frac{1}{2}d(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}},\boldsymbol{\kappa}_h-\boldsymbol{\kappa}) + b(w-q_h+\frac{1}{2}\eta_h,\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) - \frac{1}{2}a(u-u_h^{\mathrm{s}}, w-v_h)$$

Demostración. Es consecuencia directa de los Lemas 2.1 y 2.3. □

Ahora, estamos en posición de establecer el resultado principal de esta nota. Para ello, introducimos las siguientes hipótesis

(A3) Para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe $C > 0$ tal que la solución u de (1) satisface

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)} .$$

(A4) Para todo $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^2$ con $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in H^1(\Omega)$, existe $\boldsymbol{\tau}_h \in \Sigma_h$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C\, h\, \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \quad \text{y} \quad \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{H^1(\Omega)} .$$

(A5) Para todo $v \in H^2(\Omega)$, existe $v_h \in V_h$ tal que

$$\|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|v\|_{H^2(\Omega)} .$$

Notamos que $(A3)$ implica que el problema (1) es $H^2(\Omega)-$regular, lo cual se satisface si la frontera Γ tiene la regularidad suficiente o si Ω es convexo (ver Teorema I.1.8 en [8] para detalles). Bajo este supuesto, tendremos que $(\boldsymbol{\kappa}, w) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, la solución del problema auxiliar (17), tiene la misma regularidad adicional y se satisface

$$\|\boldsymbol{\kappa}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\operatorname{div} \boldsymbol{\theta}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\theta}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} . \tag{20}$$

Las hipótesis $(A4)$ y $(A5)$ son relativas a propiedades de aproximación de los subespacios Σ_h y V_h. Ellas se cumplen, por ejemplo, para espacios de elementos finitos de Raviart-Thomas y de tipo Lagrange, respectivamente (ver [5], [9], [2], [4], [6] y [7]).

Teorema 2.1 *Suponemos válidas* $(A1) - (A5)$*. Entonces existe* $C > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|(\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h)\|_{\mathbf{H}} \leq C\, h\, \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u - u_h^{\mathrm{s}})\|_{\mathbf{H}}$$

Demostración. Primero notamos que la coercividad de la forma bilineal $A(\cdot,\cdot)$ y el Lema 2.3 implican que existe $\alpha > 0$ tal que para todo $q_h \in W_h$ y $v_h \in V_h$ tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha\, \|(\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq\ & A((\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h), (\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h)) \\
=\ & \tfrac{1}{2} d(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\kappa}_h - \boldsymbol{\kappa}) + b(w - q_h + \tfrac{1}{2}\eta_h, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) - \tfrac{1}{2} a(u - u_h^{\mathrm{s}}, w - v_h) \\
\leq\ & \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \left(\|\boldsymbol{\kappa}_h - \boldsymbol{\kappa}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|w - q_h + \tfrac{1}{2}\eta_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + \|u - u_h^{\mathrm{s}}\|_{H^1(\Omega)} \|w - v_h\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

donde $(\boldsymbol{\kappa}, w) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $(\boldsymbol{\kappa}_h, w_h) \in \Sigma_h \times W_h$ son las soluciones únicas de los problemas auxiliares (18) y (19), respectivamente.

Ahora, eligiendo $q_h \in W_h$ como la proyección L^2-ortogonal de $w + \frac{1}{2}\eta_h$ sobre W_h, $v_h \in V_h$ tal que $(A5)$ se satisface, y notando que $(A4)$ y (20) implica que $\|\boldsymbol{\kappa}_h - \boldsymbol{\kappa}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C\, h\, \|\boldsymbol{\theta}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}$, obtenemos

$$\|(\boldsymbol{\theta}_h, \eta_h)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C\, h\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}\|_{[L^2(\Omega)]^2} (\|\boldsymbol{\theta}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \|\eta_h\|_{H^1(\Omega)}) + C\, h\, \|u - u_h^{\mathrm{s}}\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\theta}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}$$

de donde la demostración se sigue fácilmente. □

Observamos que una consecuencia directa del Teorema 2.1 es la posibilidad de obtener estimas *a priori* refinadas para el método mixto aumentado; por ejemplo, si V_h es el espacio de los polinomios cuadráticos continuos (P_2), y Σ_h el espacio de Raviart-Thomas de orden más bajo (RT_0). Bajo el supuesto de regularidad adicional de la solución u de (1), esto es, $u \in H^3(\Omega)$, tenemos que la estima a priori del esquema aumentado sólo dá un $\mathcal{O}(h)$ (ver Teoremas 3.1 y 3.2 en [1]), mientras que, por una simple desigualdad triangular y el Teorema 2.1 obtenemos

$$\|u - u_h^{\mathrm{a}}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h^{\mathrm{s}}\|_{H^1(\Omega)} + C\,h \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u - u_h^{\mathrm{s}})\|_{\mathbf{H}} \leq C\,h^2 \,.$$

En otras palabras, en algunos casos, el Teorema 2.1 nos permite mejorar la estima a priori para un esquema mixto aumentado. Por supuesto, una observación similar ocurre con $\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)}$. Resaltamos esta observación en el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u - u_h^{\mathrm{a}}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h^{\mathrm{s}}\|_{H^1(\Omega)} + C\,h \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u - u_h^{\mathrm{s}})\|_{\mathbf{H}} \,,$$

y

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + C\,h \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u - u_h^{\mathrm{s}})\|_{\mathbf{H}} \,.$$

Demostración. Es consecuencia de la desigualdad triangular y el Teorema 2.1. □

Finalmente, hacemos notar que el Corolario 2.1 también nos da la posibilidad de transferir los resultados de superconvergencia desde la formulación tradicional y la mixta al método mixto aumentado.

3. Ejemplos numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos ilustrando el resultado del Teorema 2.1 y el Corolario 2.1. Todos los resultados numéricos expuestos en este trabajo fueron obtenidos usando un código escrito en Matlab. Además, los errores en cada triángulo fueron calculados usando una regla de cuadratura de 7 puntos.

En lo que sigue, los errores individuales están definidos por

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \,, \quad \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \,,$$

$$\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{s}}) := |u - u_h^{\mathrm{s}}|_{H^1(\Omega)} \,, \quad \mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{a}}) := |u - u_h^{\mathrm{a}}|_{H^1(\Omega)} \,,$$

$$\mathbf{e}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}}) := |u_h^{\mathrm{s}} - u_h^{\mathrm{a}}|_{H^1(\Omega)} \,, \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}) := \|\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \,,$$

donde $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$, $(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}, u_h^{\mathrm{m}}) \in \Sigma_h \times W_h$, $(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}, u_h^{\mathrm{a}}) \in \Sigma_h \times V_h$, y $u_h^{\mathrm{s}} \in V_h$ son las soluciones únicas de (4), (6), (14) y (2), respectivamente. Además, introduciomos las razones de convergencia experimentales

$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})/\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}))}{\log(h/h')} \,, \quad \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})/\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}))}{\log(h/h')} \,,$$

$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})/\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}}))}{\log(h/h')} \,, \quad \mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{s}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{s}})/\mathbf{e}'_u(u_h^{\mathrm{s}}))}{\log(h/h')} \,,$$

$$\mathbf{r}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}})/\mathbf{e}'_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}}))}{\log(h/h')} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{a}}) := \frac{\log(\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{a}})/\mathbf{e}'_u(u_h^{\mathrm{a}}))}{\log(h/h')} \,,$$

donde $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\cdot)$ y $\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\sigma}}(\cdot)$ (resp. $\mathbf{e}_u(\cdot)$ y $\mathbf{e}'_u(\cdot)$, $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_h^m}(\cdot)$ y $\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\sigma}_h^m}(\cdot)$, o $\mathbf{e}_{u_h^s}(\cdot)$ y $\mathbf{e}'_{u_h^s}(\cdot)$) denota los errores correspondientes a dos triangulaciones consecutivas con tamaño de mallas h y h', respectivamente.

Tomamos Ω como $]0,1[^2$, y elegimos el dato f tal que la solución exacta resulta ser $u(x_1,x_2) = x_1\, x_2(x_1-1)(x_2-1)$. Observamos que la solución es suficientemente regular, es decir, está en $H^2(\Omega)$. Esto, de acuerdo al resultado tradicional, da 1 como razón de convergencia esperada, cuando se utilizan espacios de orden más bajo. Luego, la razón de convergencia de la comparación de las diferentes aproximaciones debería ser 2. Los espacios de elementos finitos Σ_h, V_h y W_h, para aproximar $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$, se escogen como Raviart-Thomas de orden más bajo (RT_0), lineales a trozos y continuas (P_1) y constante a trozos (P_0), respectivamente.

En la Tabla 1 damos los errores individuales y sus respectivas razones de convergencia para ambas incógnitas, en una sucesión de mallas uniformes. Aquí, dada una triangulación uniforme inicial, cada malla subsiguiente se obtiene de la previa dividiendo cada triángulo en los cuatro resultantes de unir los puntos medios de sus aristas. Notamos que las razones de convergencia obtenidas para este caso, confirma las estimas a priori "clásicas". Además, en la Tabla 2 damos los errores de la comparación de las diferentes aproximaciones y sus respectivas razones de convergencia, lo cual está en correspondencia con lo predicho en el Teorema 2.1.

h	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})$	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{s}})$	$\mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{s}})$	$\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{a}})$
0.3536	1.005E-1	—	1.005E-1	—	5.882E-2	—	5.900E-2	—
0.1768	5.126E-2	0.9716	5.126E-2	0.9717	3.017E-2	0.9634	3.019E-2	0.9665
0.0884	2.576E-2	0.9929	2.576E-2	0.9929	1.518E-2	0.9907	1.518E-2	0.9916
0.0442	1.289E-2	0.9982	1.289E-2	0.9982	7.603E-3	0.9977	7.604E-3	0.9979
0.0221	6.449E-3	0.9996	6.449E-3	0.9996	3.803E-3	0.9994	3.803E-3	0.9995

Tabla 1: Errores individuales y razón de convergencia usando RT_0, P_1 y P_0.

h	$\mathbf{e}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$
0.3536	7.485E-03	—	2.459E-03	—
0.1768	2.023E-03	1.8877	6.500E-04	1.9197
0.0884	5.157E-04	1.9716	1.649E-04	1.9790
0.0442	1.296E-04	1.9928	4.137E-05	1.9947
0.0221	3.243E-05	1.9982	1.035E-05	1.9987

Tabla 2: Comparación de diferentes aproximaciones usando RT_0, P_1 y P_0.

Finalmente, para ilustrar el Corolario 2.1, notamos que la solución u tiene regularidad suficiente, en particular $u \in H^3(\Omega)$. En Tablas 3 y 4 damos los errores individuales, el error de las comparaciones, y las razones de convergencia para ambas incógnitas, en una sucesión de mallas refinadas uniformemente. Usamos Raviart-Thomas de orden más bajo (RT_0), polinomios cuadráticos a trozos y continuos (P_2) y constante a trozos (P_0) como espacios de elementos finitos para $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$, respectivamente. Vemos en estas tablas que la razón de convergencia de la aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ es $\mathcal{O}(h)$, mientras que para la varaiable u y las respectivas comparaciones son $\mathcal{O}(h^2)$, lo cual ilustra los resultados del Corolario 2.1 y Teorema 2.1, para el esquema aumentado. Recordamos que la estima "clásica" para la formulación aumentada sólo nos da $\mathcal{O}(h)$ para este caso (ver Teoremas 3.1 y 3.2 en [1]).

h	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}})$	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{s}})$	$\mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{s}})$	$\mathbf{e}_u(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_u(u_h^{\mathrm{a}})$
0.3536	1.00516E-1	—	1.00515E-1	—	8.263E-3	—	9.639E-3	—
0.1768	5.12571E-2	0.9716	5.12570E-2	0.9716	2.110E-3	1.9694	2.467E-3	1.9663
0.0884	2.57551E-2	0.9929	2.57551E-2	0.9929	5.305E-4	1.9918	6.204E-4	1.9915
0.0442	1.28934E-2	0.9982	1.28934E-2	0.9982	1.328E-4	1.9979	1.553E-4	1.9979
0.0221	6.44870E-3	0.9996	6.44870E-3	0.9996	3.322E-5	1.9995	3.884E-5	1.9995

Tabla 3: Errores individuales y razón de convergencia usando RT_0, P_2 y P_0.

h	$\mathbf{e}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{u_h^{\mathrm{s}}}(u_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$	$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{m}}}(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{a}})$
0.3536	4.965E-03	—	4.11793E-04	—
0.1768	1.278E-03	1.9578	1.27774E-04	1.6883
0.0884	3.216E-04	1.9907	3.36821E-05	1.9235
0.0442	8.051E-05	1.9979	8.53255E-06	1.9809
0.0221	2.013E-05	1.9995	2.14521E-06	1.9919

Tabla 4: Comparación de diferentes aproximaciones usando RT_0, P_2 y P_0.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por CONICYT-Chile, a través de sus proyectos FONDECYT 11060014 y 11070085.

Referencias

[1] T.P. Barrios and G.N. Gatica, *An augmented mixed finite element method with Lagrange multipliers: A priori and a posteriori error analyses.* Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 200 (2007), 653–676.

[2] D. Braess, *Finite element: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, 2001.

[3] Brandts, Y. Chen and J. Yang, *A note on least-squares mixed finite elements in relation to standard and mixed finite elements.* IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 26 (2006), 779–789.

[4] S.C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Verlag, 1994.

[5] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer-Verlag, 1991.

[6] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, 2nd edn. SIAM Classics in Applied Mathematics, 2002.

[7] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Element*, Springer-Verlag, 2004.

[8] V. Girault, and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer Verlag, 1986.

[9] J.E. Roberts and J.-M. Thomas, *Mixed and Hybrid Methods.* In: Handbook of Numerical Analysis, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North-Holland, Amsterdam, 1991.