

Simulación numérica de fumarolas negras en el océano

M. BRAACK¹, J. CARPIO²

¹ *Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (Alemania).*

E-mail: braack@math.uni-kiel.de

² *Dpto. Ing. Organización, Adm. Empresas y Estadística,
Universidad Politécnica de Madrid. E-mail: jaime.carpio@upm.es.*

Palabras clave: Fumarolas negras, fluidos en medios porosos, simulación numérica, método semi-lagrangiano, método de elementos finitos

Resumen

En esta comunicación se presentará el problema de la formación de fumarolas negras ('black smokers'), fuentes hidrotermales en el fondo del océano localizadas comúnmente en lugares volcánicamente activos como son las dorsales oceánicas. El comportamiento de estos penachos de agua caliente está muy condicionado por las inestabilidades físicas causadas por los términos convectivos en el medio poroso donde se desarrollan, entre zonas volcánicas calientes y el fondo oceánico.

Las ecuaciones que modelan el fenómeno físico serán resueltas numéricamente utilizando una formulación semilagrangiana en el tratamiento de los términos convectivos y el método de elementos finitos para resolver la parte parabólica de las mismas. Se tendrá en consideración el fuerte carácter no lineal de las propiedades del agua con la temperatura y la presión. Finalmente se compararán los resultados de las simulaciones numéricas con datos experimentales.

1. Introducción

Una de las principales atracciones que los turistas pueden disfrutar en el Parque Nacional de Yellowstone (Wyoming, EEUU) es el geiser *Old Faithful*. En el fondo oceánico un fenómeno similar tiene lugar; hay grietas de las cuales fluye agua geotérmicamente caliente. A estas zonas se las denomina *fuentes hidrotermales*, también traducido a veces como *fumarolas hidrotermales*. Estas fuentes se encuentran comúnmente en lugares que son volcánicamente activos donde el magma está relativamente cerca de la superficie del océano, como son las dorsales oceánicas. El agua asciende desde profundidades volcánicas hasta el fondo oceánico por un medio poroso, por el que arrastra gran cantidad de minerales como sulfuros de cobre, hierro y cinc. Las presiones que se dan a profundidades de

2500 m el agua sigue siendo líquida a altas temperaturas, pero cuando este agua entra en contacto con el agua del mar casi congelada, los minerales precipitan formando chimeneas ricas en sulfuros metálicos de hasta 60 metros de altura. La tonalidad oscura de estas partículas al precipitarse hace que a las fuentes hidrotermales se las conozca popularmente con el nombre de 'fumarolas negras'. En la Figura 1 puede verse una zona de fumarolas negras activa y las típicas estructuras de sulfuros metálicos creadas como resultado de la precipitación y cristalización.

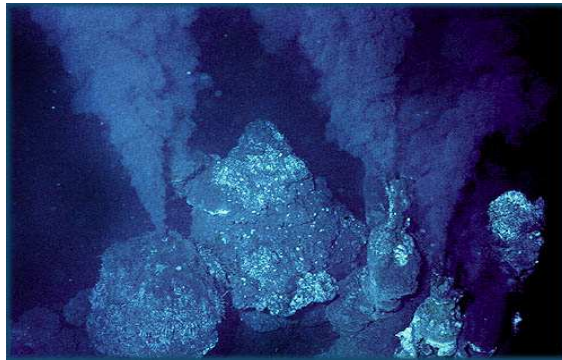


Figura 1: Fotografía tomada por el Dr. Michael Perfit (University of Florida) y el programa NOAA VENTS en el 'Monolith vent site' localizado en la dorsal Juan de Fuca ($44^{\circ} 58'N$ y $130^{\circ}14'W$).

Las fumarolas negras son importantes porque la química del océano está controlada en parte por la gran cantidad de calor y sustancias químicas que emiten estas fuentes. Esta energía es muy productiva biológicamente, hospedando grandes comunidades de seres vivos que se alimentan de las sustancias químicas disueltas en los fluidos que emite. Estos organismos además participan en la formación de las chimeneas de sulfuros metálicos, que son ricas en materiales preciosos. Más información sobre estas fumarolas negras puede obtenerse en la página web del Museo Americano de Historia Natural (New York) [1].

La mayoría de las cuestiones científicas sobre los sistemas submarinos hidrotermales están relacionadas con la temperatura del agua que emerge de dichas fuentes en el fondo del océano como puede verse en [9]; pues las zonas volcánicas tienen temperaturas entorno a los $1000^{\circ}C$, y sin embargo el máximo de temperatura del agua que emerge de las fumarolas negras no es nunca mayor que $400^{\circ}C$. Adicionalmente, variaciones temporales y espaciales de estas temperaturas todavía son una cuestión abierta en la comunidad científica [8].

Los datos experimentales y simulaciones numéricas recientes muestran que el comportamiento del fluido es muy irregular y los términos convectivos mucho más inestables que los obtenidos en estudios previos, siendo por tanto éstos los que controlan la dinámica del fluido. Por eso, aquí se presenta un esquema numérico que trata los términos convectivos con la nueva formulación semilagrangiana desarrollada por Bermejo y Carpio [5]. El artículo se estructura como sigue: En la Sección 2 se presentan las ecuaciones del movimiento fluido, el dominio, las condiciones de contorno y los parámetros físicos necesarios para la resolución del problema. El método numérico será expuesto brevemente en la Sección 3. Finalmente en la Sección 4 se mostrarán resultados numéricos de las simulaciones.

2. Ecuaciones del problema

La dinámica de las fuentes hidrotermales en las dorsales oceánicas se plantea en el medio poroso que se extiende desde el material volcánico hasta la superficie del océano como puede verse en [6]. En dinámica de fluidos e hidrología, la ley de Darcy describe el comportamiento de un fluido a través de un medio poroso:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu_f} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}), \quad (1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de Darcy, k la permeabilidad del terreno, p la presión, μ_f la viscosidad dinámica, ρ_f la densidad del fluido y \mathbf{g} el vector aceleración de la gravedad.

La conservación de masa de un fluido monofásico moviéndose en un medio poroso obedece a la siguiente ecuación:

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \rho_f). \quad (2)$$

con ϕ la porosidad del medio.

La densidad del fluido ρ_f es función de la temperatura y la presión $\rho_f = \rho_f(p, T)$, teniendo estas 2 magnitudes un rango de variabilidad grande en el problema. Considerando este hecho, de (1) y (2) se obtiene la siguiente ecuación para el campo de presiones:

$$\phi \rho_f \left(\beta_f \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_f \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left(\rho_f \frac{k}{\mu_f} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \right) \quad (3)$$

donde α_f es el coeficiente de expansión térmica del fluido $\alpha_f = -\frac{1}{\rho_f} (\partial \rho_f / \partial T)_p$ y β_f el coeficiente de compresibilidad $\beta_f = \frac{1}{\rho_f} (\partial \rho_f / \partial p)_T$. Para escribir la ecuación de conservación de la energía se asume equilibrio térmico entre rocas y fluido, y además que el fluido no cambia de fase durante todo el proceso. Por lo tanto la ecuación de convección-difusión para la temperatura puede escribirse:

$$(\phi \rho_f c_{pf} + (1 - \phi) \rho_r c_{pr}) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{pf} \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (K \nabla T) \quad (4)$$

siendo c_{pf} el calor específico del fluido, ρ_r la densidad de las rocas, c_{pr} calor específico de las rocas, y K la conductividad térmica del conjunto.

2.1. Dominio Ω y condiciones de frontera

Tradicionalmente se ha venido modelando el problema en un dominio bidimensional con frontera abierta en la parte superior, coincidiendo con el fondo oceánico. Ya que se cree que la circulación de aguas profundas en las dorsales oceánicas tiene lugar fundamentalmente en el plano donde la permeabilidad por fractura de roca es mayor y que la ausencia de una capa de sedimentos en el fondo oceánico permite que el fluido oceánico entre y salga libremente por la corteza oceánica. Por lo tanto el dominio será rectangular $\Omega := [0, 3600]m \times [0, 1000]m$ con condiciones de frontera apropiadas en la presión p y la temperatura T para resolver las ecuaciones (3) y (4), respectivamente. Éstas se muestran esquemáticamente en la Figura 2, para más detalle vease [6].

Ecuaciones (3) y (4) son dependientes del tiempo, por lo que se necesita definir condiciones iniciales para T y p . Inicialmente se considerará el medio poroso saturado con agua a temperatura $T_0 = 10^\circ C$ y a la presión hidrostática $p_0 = 25 - 1015 \cdot 9,8(z - 1000)10^{-6} MPa$.

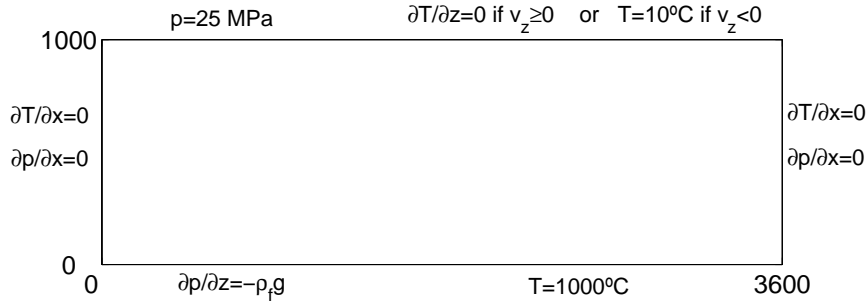


Figura 2: Condiciones de frontera del problema.

2.2. Parámetros físicos de las ecuaciones

En este trabajo se utilizará la ecuación de estado del agua pura aceptada por la IAPWS-84 (International Association for the Properties of Water and Steam en 1984) para determinar el valor de ρ_f , μ_f , c_{pf} , α_f , and β_f . Estos coeficientes se pueden obtener como función de la temperatura y la presión (las incógnitas del problema) en la librería PROST 4.1 desarrollada por O. Bauer en la Technische Universität Hamburg-Harburg, Alemania, [4]. En la Figura 3 se han representado las propiedades del agua pura como función de la temperatura $10^\circ C < T < 1000^\circ C$ y la presión $25 MPa < p < 32 MPa$.

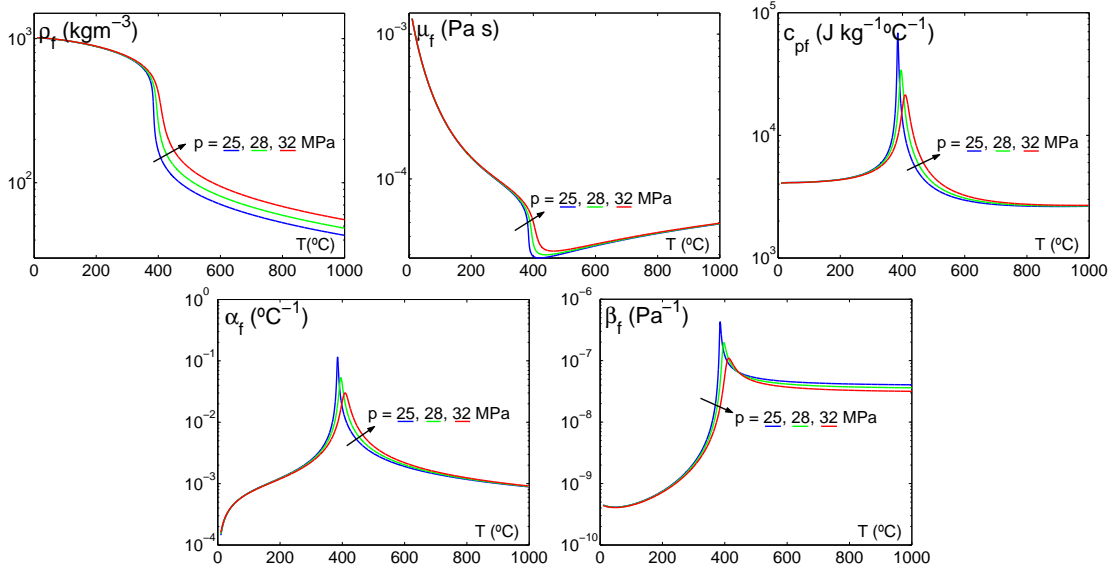


Figura 3: Propiedades del agua pura obtenidas con la librería PROST 4.1 [4].

El resto de coeficientes que aparecen en las ecuaciones se considerarán constantes y sus valores se muestran a continuación: $k = 10^{-14} m^2$, $\phi = 0,1$, $\rho_r = 2700 kg m^{-3}$, $c_{pr} = 880 J (kg^\circ C)^{-1}$, $K = 2 W (m^\circ C)^{-1}$ y $|\mathbf{g}| = 9,8 m s^{-2}$.

3. Método numérico

Aquí se presenta la discretización temporal de las ecuaciones (1-3-4) mediante el método de elementos finitos. El dominio es rectangular $\Omega := [0, 3600]m \times [0, 1000]m$, con frontera $\partial\Omega := \Gamma_D^i \cup \Gamma_N^i$, siendo Γ_D^i y Γ_N^i trozos de la frontera con condiciones de Dirichlet y Neumann, respectivamente, con i pudiendo ser T (Temperatura) o p (presión). Para obtener la solución numérica del problema se genera una triangulación regular y conforme del dominio Ω_h compuesta por elementos triangulares K_j , $1 \leq j \leq NE$, donde NE es el número de elementos de la malla. En la simulación aquí presentada se considera una malla con $NE = 50032$.

Se emplearán polinomios cuadráticos para la temperatura T y la presión p , sin embargo para la velocidad \mathbf{v} polinomios lineales serán utilizados, en cada triángulo K_j . Se definen por tanto los siguientes espacios de elementos finitos.

$$W_h := \left\{ w_h \in C^0(\bar{\Omega}) : T_h|_{K_j} \in P_2(K_j), 1 \leq j \leq NE \right\},$$

$$V_h := \left\{ \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega})^2 : T_h|_{K_j} \in P_1(K_j)^2, 1 \leq j \leq NE \right\}.$$

Asociados con el espacio de elementos finitos W_h se tienen, W_h^i y W_{h0}^i , espacios de elementos finitos contenidos en W_h que en la frontera dirichlet asociada (con $i = T$ o p) toman el valor de las condiciones de contorno (W_h^i) o cero (W_{h0}^i).

Para resolver las ecuaciones en tiempo, se considera un periodo de intergración de $\tau = 4000$ años, suficientemente largo para alcanzar un estado 'cuasi-estacionario' y un paso de tiempo constante $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ (aquí se ha tomado $\Delta t = 0,2$ años). Considerando que en el instante $t_n = n\Delta t$, T_h^{n-1} y $T_h^{n-2} \in W_h^T$, p_h^{n-1} y $p_h^{n-2} \in W_h^p$, \mathbf{v}_h^{n-1} y $\mathbf{v}_h^{n-2} \in V_h$ son conocidos, a continuación se muestra el método para calcular $T_h^n \in W_h^T$, $p_h^n \in W_h^p$, y $\mathbf{v}_h^n \in V_h$.

3.1. Resolución de la ecuación para la temperatura (4)

La discretización de elementos finitos para la ecuación (4), puede ser formulada como: Encontrar $T_h^n \in W_h^T$, tal que para todo $\varphi_h \in W_{h0}^T$ satisfaga

$$c_h^n \frac{1}{2\Delta t} \left(4T_h^n - 3\bar{T}_h^{n-1} + \bar{T}_h^{n-2}, \varphi_h \right)_\Omega + K (\nabla T_h^n, \nabla \varphi_h)_\Omega = 0, \quad (5)$$

donde se ha aplicado un esquema de discretización BDF de segundo orden en tiempo. Algunos comentarios a tener en cuenta para resolver este problema son:

Comentario 1: En la (5), \bar{T}_h^{n-1} y $\bar{T}_h^{n-2} \in W_h^T$ son las aproximaciones de $\bar{T}_h^{n-1}(x) = T_h^{n-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_{n-1}))$ and $\bar{T}_h^{n-2}(x) = T_h^{n-2}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_{n-2}))$, calculadas con el siguiente método semilagrangiano:

1. Se calculan $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_{n-1})$ y $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_{n-2})$, los pies de las curvas características del operador derivada material $cD/Dt := c\partial/\partial t + b\mathbf{v} \cdot \nabla$ en los instantes de tiempo t_{n-1} y t_{n-2} , respectivamente, que alcanza el punto de malla \mathbf{x} en t_n . Estos puntos son calculados integrando la siguiente EDO:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t)}{dt} = \frac{b(T, p)}{c(T, p)} \mathbf{v}(x, t), \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_n) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Consideraciones sobre esta ecuación y un método para su resolución numérica puede seguirse en [2].

- Hay varias formas de aproximar $\bar{T}_h^l(x) = T_h^l(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_l))$ (con $l = n-1$ o $n-2$), en el espacio de elementos finitos W_h^T . Aquí se usará el método 'semi-Lagrange Galerkin' introducido recientemente en [5]. La idea del método es realizar una proyección L^2 de $T_h^l(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_n; t_l))$ sobre $W_h^{*l,T}$. Siendo $W_h^{*l,T}$ el espacio de elementos finitos asociado a la partición Ω_h^{*l} , que es la imagen de la partición fija Ω_h al desplazar cada uno de sus triángulos K_j por las curvas características hacia atrás en el tiempo.

Comentario 2: Los coeficientes b_h^n y c_h^n dependen de la temperatura y la presión $b_h^n = b(T_h^n, p_h^n)$ y $c_h^n = c(T_h^n, p_h^n)$ como una función no lineal a través de las propiedades del agua $b = \rho_f c_{pf}$ y $c = \phi \rho_f c_{pf} + (1-\phi) \rho_r c_{pr}$. Estas propiedades tienen una gran dependencia con la temperatura pero no con la presión, como puede verse en la Figura 2; más aún, la presión se difunde más rápidamente a un estado estacionario que la temperatura en estas zonas geotermales como se ha comentado en [3]. Por lo tanto, en la evaluación de los coeficientes b_h^n y c_h^n se considera la presión previa p_h^{n-1} . Esta simplificación permite desacoplar la ecuación de la presión y la de la temperatura en una manera similar a la propuesta en [3] y [7]. Así pues, solamente se tiene una ecuación no lineal en los coeficientes para la temperatura, por lo tanto se pueden usar iteraciones de punto fijo para resolverla.

3.2. Resolución de la ecuación para la presión (3)

La discretización de elementos finitos en la ecuación (3), puede ser formulada como: Encontrar $p_h^n \in W_h^p$, tal que para todo $\varphi_h \in W_{h0}^p$ satisface

$$\begin{cases} \frac{2\beta_h^n}{\Delta t} (p_h^n, \varphi_h)_\Omega + \gamma_h^n (\nabla p_h^n, \nabla \varphi_h)_\Omega = \\ = \frac{\beta_h^n}{2\Delta t} (3p_h^{n-1} - p_h^{n-2}, \varphi_h)_\Omega + \frac{\alpha_h^n}{2\Delta t} (4T_h^n - 3T_h^{n-1} + T_h^{n-2}, \varphi_h)_\Omega + (\delta_h^n \mathbf{g}, \nabla \varphi_h)_\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

donde se ha aplicado también un esquema de discretización temporal BDF.

Los coeficientes α_h^n , β_h^n , γ_h^n , y δ_h^n toman el valor $\alpha = -\phi \rho_f \alpha_f$, $\beta = \phi \rho_f \beta_f$, $\gamma = \rho_f k / \mu_f$ y $\gamma = \rho_f^2 k / \mu_f$ y las mismas consideraciones que se expusieron en el Comentario 2 pueden hacerse aquí. Por lo tanto, los coeficientes pueden ser evaluados como $\alpha_h^n \simeq \alpha(T_h^n, p_h^{n-1})$, $\beta_h^n \simeq \beta(T_h^n, p_h^{n-1})$, $\gamma_h^n \simeq \gamma(T_h^n, p_h^{n-1})$ y $\delta_h^n \simeq \delta(T_h^n, p_h^{n-1})$.

3.3. Resolución de la ecuación para la velocidad (1)

Finalmente, con la ecuación de Darcy (1) se calcula la velocidad. Las propiedades del fluido serán evaluadas con la temperatura T_h^n y la presión p_h^n en el instante t_n . La velocidad $\mathbf{v}_h^n(x)$ será calculada con una proyección L^2 en el espacio de elementos finitos V_h

$$(\mathbf{v}_h^n, \phi_h)_\Omega = \left(-\frac{k}{\mu_f} (\nabla p_h^n - \rho_f \mathbf{g}), \phi_h \right)_\Omega. \quad (7)$$

4. Resultados

En esta sección se muestran los resultados de la simulación numérica que serán comparados con el comportamiento real de las fuentes hidrotermales, siguiendo los comentarios realizados en [6]. Se divide el estudio en 2 zonas, los primeros instantes de tiempo y los tiempos finales donde se ha alcanzado una situación más estacionaria.

4.1. Comportamiento en los primeros instantes:

Después de una etapa difusiva, los términos convectivos se van haciendo importantes y se empiezan a desarrollar penachos de agua caliente que ascienden por convección natural ($t \sim 100$ años). Puede verse una evolución de los penachos de agua caliente en su ascensión en la Figura 4. Inicialmente todos los penachos tienen anchuras similares, pero al unirse rápidamente unos con otros se obtienen penachos de anchura variable. Los penachos más anchos protegen la generación de sus pequeños vecinos, que tras un tiempo acaban uniéndose a ellos.

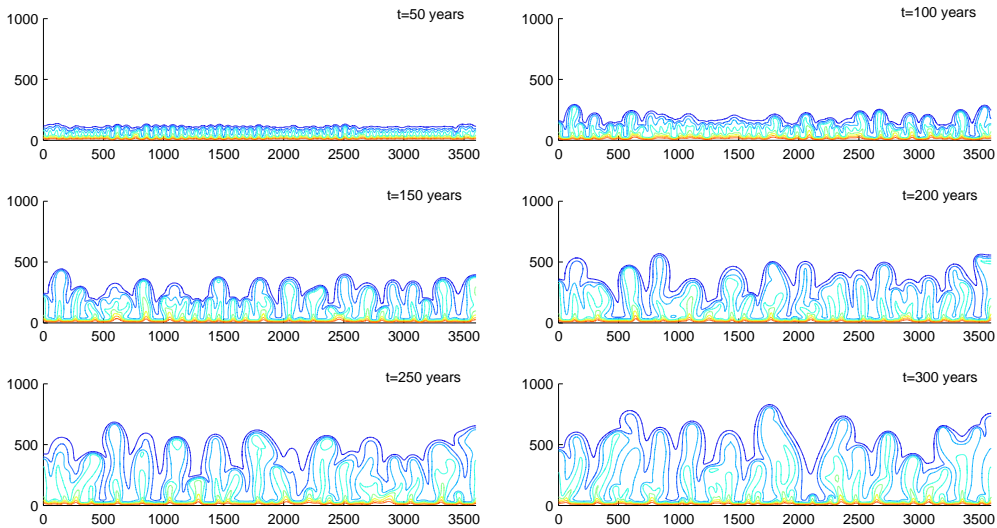


Figura 4: Líneas de nivel de la temperatura desde $100^{\circ}C$ a $800^{\circ}C$ en los primeros instantes de tiempo.

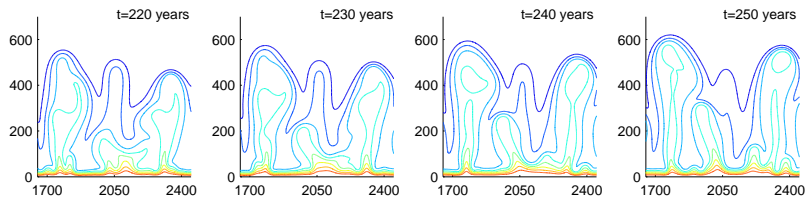


Figura 5: Ruptura térmica de varios penachos de agua caliente ascendente. Líneas de nivel de la temperatura desde $100^{\circ}C$ a $800^{\circ}C$.

Cuando la anchura del penacho es elevada el penacho tiende a romperse, fenómeno conocido como 'splitting plumes' que puede verse en la Figura 5. Esto tiene lugar cuando la convección y sus inestabilidades dominan la transmisión de calor, para ello es necesario que la permeabilidad del terreno tenga un valor suficientemente alto, en nuestro caso $k = 10^{-14}m^2$.

4.2. Comportamiento en régimen permanente

Cuando ha pasado suficiente tiempo ($t \sim 2000$ años), el sistema se vuelve más estable. Se puede observar como los penachos alcanzan la parte superior del dominio y se distribuyen de forma regular. Esta configuración 'cuasi-estacionaria' puede ser mantenida durante miles de años en el océano, aunque ocasionalmente alguna parte del sistema se vuelve inestable, produciendo el ocasional colapso y formación de nuevos penachos. Este comportamiento puede verse reflejado en la Figura 6.

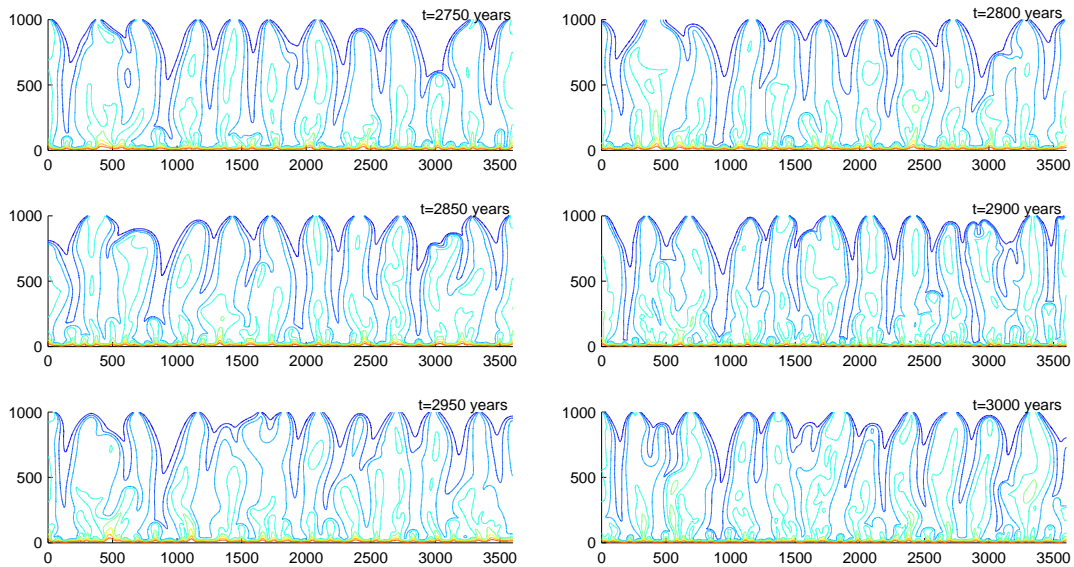


Figura 6: Líneas de nivel de la temperatura de $100^{\circ}C$ a $800^{\circ}C$ en régimen permanente.

Según la literatura vista en [6], al alcanzar el penacho la parte superior del dominio su anchura se reduce considerablemente y penachos que tengan anchuras de $\sim 200m$, pasarán en su parte superior a tener $\sim 60m$. Otra propiedad de las fuentes hidrotermales es la razón de aspecto $A = D/(2H)$, que toma valores $A \sim 0,22$ (con D la distancia media horizontal entre la localización de una fuente hidrotérmica y su vecina; y H la distancia vertical del medio poroso, aquí $H = 1000m$). En cuanto a la temperatura, el fluido abandona el fondo oceánico con una temperatura oscilante entre $355^{\circ}C$ y $395^{\circ}C$. Aunque, también puede haber caídas hasta $250^{\circ}C$ e incluso podría la fuente hidrotermal dejar de emitir fluido caliente por periodos de duración de unas decenas de años. Este comportamiento se reproduce en la simulación numérica y puede verse en la Figura 7, donde se ha medido la temperatura de un punto caliente del fondo oceánico.

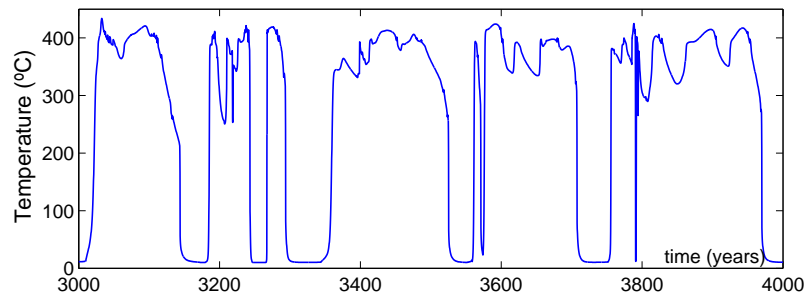


Figura 7: Evolución de la temperatura en un punto caliente de la frontera superior.

Se puede concluir diciendo que los resultados obtenidos con el método numérico propuesto, están en concordancia con aquéllos dados en la Literatura sobre fumarolas negras. Estos resultados nos animan a extender el método numérico de 2 a 3 Dimensiones y a introducir adaptación espacio-temporal en la resolución de las ecuaciones en un trabajo futuro.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer la financiación proporcionada por el Grupo de Excelencia de Kiel (Alemania) 'The Future Ocean' en el proyecto '3-D Simulation of Thermohaline convection in the Ocean's Crust with Adaptive Finite Elements'.

Referencias

- [1] American Museum of Natural History, New York City.
http://www.amnh.org/nationalcenter/expeditions/blacksmokers/black_smokers.html.
- [2] A. Allievi, R. Bermejo. 'Finite element modified method of characteristics for the Navier-Stokes equations'. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 32 (2000) pp. 439-464.
- [3] K. Aziz, A. Settari. 'Petroleum Reservoir Simulation'. Applied Science Publishers, Barking (1979).
- [4] O. Bauer, 'PROST 4.1, PROPERTIES of Water and STEAM'. Technische Universität Hamburg-Harburg, Germany. 2002.
<http://www.tt.tu-harburg.de/mitarbeiter/Ehemalige/engel/PROST/PROST.html>.
- [5] R. Bermejo, and J. Carpio. 'A semi-Lagrangian-Galerkin projection scheme for convection equations'. *IMA Journal of Numerical Analysis*. DOI: 10.1093/imanum/drn044.
- [6] D. Coumou, T. Driesner, S. Geiger, C.A. Heinrich, S. Matthäi, 'The dynamics of mid-ocean ridge hydrothermal systems: Splitting plumes and fluctuating vent temperatures'. *Earth and Planetary Science Letters* 245, (2006) 218-231.
- [7] S. Geiger, T. Driesner, S.K. Matthai, and C.A. Heinrich. 'Multiphase thermohaline convection in the Earth's crust I. A New Finite Element-Finite Volume solution technique combined with a new equation of state for NaCl-H₂O', *Transport Porous Med* 63 (2006) pp.399-434.
- [8] C.R. German, J. Lin. 'The thermal structure of the oceanic crust, ridge-spreading and hydrothermal circulation: How well do we understand their inter-connections?'. In C. R. German, J. Lin, L.M. Parson (Eds.), *Mid-ocean ridges: Hydrothermal Interactions between the Lithosphere and Oceans*, *Geophys. Monogr.*, Vol. 148, (2005) pp. 1-18.
- [9] T. Jupp, A. Schultz, 'A thermodynamic explanation for black smoker temperatures'. *Nature* 403 (6772) (2000) pp. 880-883.