

Modelos reducidos para el estudio de dinámicas no lineales complejas

M.C. NAVARRO¹, L.M. WITKOWSKI²,

¹ *Dpto. Matemáticas, Facultad de C.C. Químicas. Universidad de Castilla-La Mancha, 13071, Ciudad Real, Spain. E-mails: mariacruz.navarro@uclm.es.*

² *LIMSI (UPR 3251) CNRS, UPMC, France E-mail: witko@limsi.fr.*

Palabras clave: modelos reducidos, dinámica no lineal, inestabilidades

Resumen

Hemos estudiado la habilidad de los modelos reducidos para reproducir la dinámica no lineal en el caso de la conocida ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Usamos tres técnicas numéricas: (i) integración temporal, (ii) Análisis de estabilidad lineal de los estados estacionarios vía el método de Arnoldi, (iii) proyección de las ecuaciones sobre un número limitado de autovectores reduciendo el sistema a unas cuantas ecuaciones diferenciales. El objetivo del trabajo es comprobar cómo los modelos reducidos son capaces de capturar dicha dinámica no lineal, comparando las técnicas (i) y (iii).

1. Introducción

El estudio numérico de comportamientos no lineales complejos en fluidos es un tema de gran interés. La técnica usual sigue siendo la integración temporal directa, que normalmente resulta adecuada en flujos en los que los requerimientos en términos de la resolución en espacio-temporal no sean demasiado rigurosas. Sin embargo, incluso en estos casos favorables, la integración temporal es insuficiente para describir y entender situaciones de bifurcaciones.

Otra herramienta es la combinación del método de Newton para seguir ramas de bifurcación estables e inestables y el método de Arnoldi para llevar a cabo el análisis de estabilidad lineal a lo largo de dichas ramas y detectar alguna nueva bifurcación ([10], [4]). El número de grados de libertad de las ecuaciones discretizadas depende de la elección de la base de funciones en la que las ecuaciones son proyectadas. Éste es en general elevado y puede variar dependiendo del método de discretización desde orden mil a un millón.

El desarrollo de técnicas para reducir el número de grados de libertad de un problema no lineal complejo es un área de investigación activa.

Una base de funciones alternativa son los autovectores principales (*i.e.* aquellos que corresponden a los autovalores con mayor parte real) obtenidos de las ecuaciones que gobiernan el sistema linealizadas en torno a un estado básico. El conjunto reducido de autovectores principales parece ser muy buen candidato a base de proyección de Galerkin y captura la mayor parte de la dinámica del flujo. En Refs. [6] and [7] encontramos dos trabajos usando esta base, en inestabilidad de Marangoni-Bénard en dominio cilíndrico y en una cavidad con flujo base no trivial. Estos resultados han sido extendidos por los autores [11] a un problema que combina dos configuraciones de mecánica de fluidos bien conocidas: la convección Rayleigh-Bénard en geometría cilíndrica y el flujo generado por dos discos en contra-rotación.

En el presente artículo mostraremos resultados previos obtenidos por los autores sobre el comportamiento de los modelos reducidos en una configuración sencilla, unidimensional (ecuación de Kuramoto-Sivashinsky) pero con una dinámica no lineal rica.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 describimos el problema en el que el método reducido será testado. La sección 3 introduce la técnica para reducir el número de grados de libertad y en la sección 4 describimos el método numérico usando para la discretización. En la sección 5 presentamos los resultados numéricos y finalmente, en la sección 6, las conclusiones.

2. La ecuación

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (K-S) ha sido derivada en muchos contextos físicos. Fue derivada por Sivashinsky [12] para modelar pequeñas inestabilidades termofusivas en frentes de llama laminares en dos dimensiones espaciales. También aparece en el contexto de inestabilidades interfaciales entre fluidos viscosos concurrentes, de ondas de flujo en plasma, flujos celulares cerca de una bifurcación, etc. ([1], [9])

Estos sistemas físicos y la ecuación K-S exhiben un comportamiento espacial y temporal no trivial incluyendo caos. El hecho de ser una ecuación escalar la hace más tratable para los cálculos numéricos. Consecuentemente esta ecuación ha sido ampliamente usada en el esfuerzo de entender y predecir el comportamiento dinámico complejo asociado con estos sistemas. Nosotros la utilizaremos para testar nuestro modelo reducido. Consideraremos la siguiente versión de la ecuación K-S con las correspondiente condiciones de contorno y condición inicial

$$u_t = -uu_x - u_{xx} - u_{xxxx} \quad \text{en} \quad [0, L] \times [0, T] \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)^2 \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 \quad (4)$$

donde L es la longitud del dominio espacial unidimensional y T el tiempo final de integración.

2.1. Integración temporal

Diferentes esquemas espacio-temporales pueden ser usados para resolver la ecuación (1). En el presente trabajo hemos usado un método de orden cuarto desarrollado por A-K. Kassam y L. N. Trefethen [8], que es una modificación de un método Runge-Kutta de cuarto orden para resolver problemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales rígidos.

Las soluciones de la ecuación (1) dependen del valor de la longitud del dominio espacial L . En la figura 1 mostramos las soluciones espacio-temporales para tres valores diferentes de L . Observamos cómo para $L = 5\pi$ y $L = 7\pi$ la dinámica comienza a ser complicada (ondas) y comienzan a darse síntomas de turbulencia.

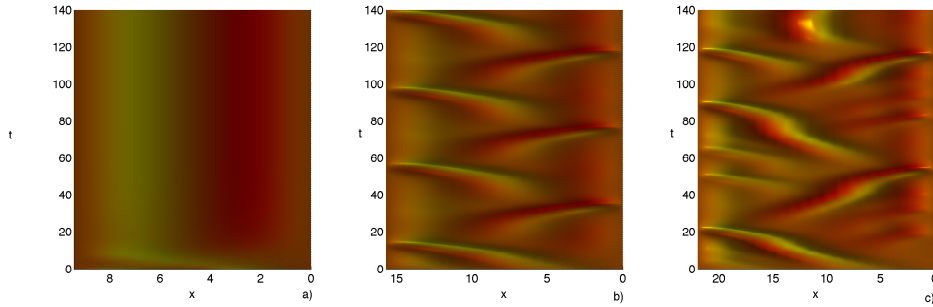


Figura 1: Comportamiento temporal de la solución de la ecuación K-S en función de L . a) $L = 3\pi$; b) $L = 5\pi$ y c) $L = 7\pi$.

3. Modelo reducido

En esta sección presentamos un método para reducir la ecuación (1) a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden bajo que permite representar la dinámica de la solución. Seguimos el método descrito en Ref. [7]. Expresamos la solución como

$$u(x, t) = u^b(x) + \bar{u}(x, t) \quad (5)$$

donde $u^b(x)$ es la solución estacionaria estable o inestable y $\bar{u}(x, t)$ la perturbación. Introduciendo esta expresión en (1) la evolución temporal de la perturbación $\bar{u}(x, t)$ puede expresarse como sigue

$$\bar{u}_t = -u^b \bar{u}_x - u^b_x \bar{u} - \bar{u}_{xx} - \bar{u}_{xxxx} - \bar{u} \bar{u}_x \quad (6)$$

o en forma más compacta

$$\partial_t \bar{u} = \mathcal{L}_{u^b} \bar{u} - \mathcal{N} \bar{u} \quad (7)$$

donde el operador $\mathcal{L}_{u^b}$ describe la parte lineal de la ecuación de la perturbación (6) y $\mathcal{N}$ la parte no lineal. Descomponemos $\bar{u}(x, t)$ en la forma

$$\bar{u}(x, t) = \sum_k A_k(t) \xi_k(x) \quad (8)$$

donde los $\xi_k(x)$'s son un conjunto de autovectores del Jacobiano $\mathcal{L}_u$ y los $A_k(t)$'s son los correspondientes coeficientes de la expansión. Introduciendo esta expansión en (6) obtenemos

$$\sum_k \frac{dA_k(t)}{dt} \xi_k(x) = \sum_k \lambda_k A_k(t) \xi_k(x) - \sum_{l,m} A_l(t) A_m(t) \xi_l(x) \cdot (\xi_m)_x(x) \quad (9)$$

donde λ_k es el autovalor correspondiente a $\xi_k(x)$. Para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales tomamos el producto interno de la ecuación (9) con el correspondiente conjunto de autovectores del adjunto del Jacobiano, $\eta_k(x)$. Se verifica que el conjunto de autovectores ξ_i es bi-ortogonal a η_i i.e.

$$(\xi_i(x), \eta_k(x)) = \delta_{ik} \quad (10)$$

Usando la propiedad de bi-ortogonalidad, derivamos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal:

$$\frac{dA_k}{dt} = \lambda_k A_k - \sum_{l,m} \mu_{klm} A_l A_m \quad (11)$$

donde $\mu_{klm} = (\xi_l(x) \cdot (\xi_m)_x(x), \eta_k(x))$. Si la serie de la ecuación (8) es truncada con k_0 términos, el número de grados de libertad de las ecuaciones originales se reduce a k_0 . Más detalles sobre el método pueden ser encontrados en [11].

4. Implemetación numérica

El modelo reducido presentado anteriormente puede ser usado con cualquier discretización (espectral, elementos finitos, diferencias finitas). Hemos elegido un método espectral expandiendo el campo solución con polinomios de Chebyshev

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(x). \quad (12)$$

y evaluando en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto (ver Refs. [2] and [5]). Hemos usado $N = 31$ en nuestros cálculos.

5. Resultados numéricos

Presentamos a continuación la comparación entre las soluciones obtenidas con el código temporal y las obtenidas con el modelo reducido. Consideraremos el caso intermedio $L = 5\pi$ que ya presenta una dinámica no lineal interesante.

El estado básico inestable es nulo en nuestro problema. Para $L = 5\pi$ se tienen cuatro modos inestables (los cuatro autovalores con mayor parte real son positivos). En la figura 2 mostramos los valores de los 12 primeros autovalores y los perfiles de las correspondientes autofunciones.

La figura 3 muestra la comparación entre los perfiles de la solución temporal obtenida con el código temporal (línea sólida) y con el método reducido (línea punteada) para un valor de x fijo, $x = 0,16$ (tercer punto del mallado espacial) considerando tres valores

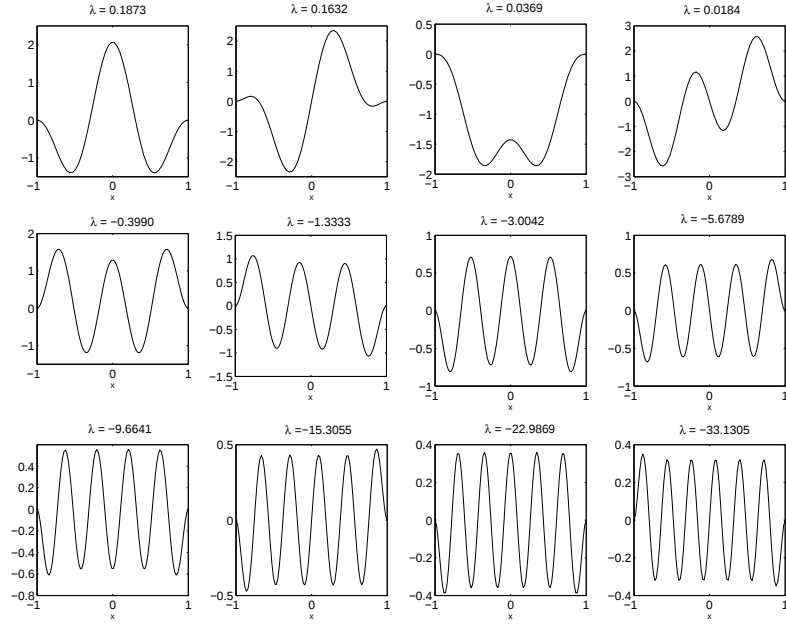


Figura 2: Autovalores y autofunciones del análisis de estabilidad lineal en el caso $L = 5\pi$.

distintos de k_0 (número de autofunciones utilizadas en el método reducido para reconstruir la solución). Como puede observarse en la figura 3 para $k_0 = 12$ se obtiene ya una buena aproximación de la solución, los 4 primeros modos inestables son estabilizados por los 8 modos siguientes. Para $k_0 = 28$ las soluciones con ambos métodos son indistinguibles.

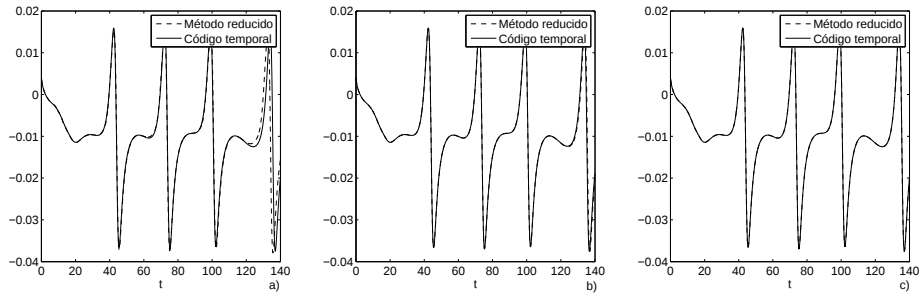


Figura 3: Comparación de la serie temporal en $x = 0,16$ usando el código temporal y el método reducido con diferentes valores de k_0 . a) $k_0 = 12$; b) $k_0 = 20$; c) $k_0 = 28$.

El perfil temporal, periódico y complejo, de los coeficientes $A_k(t)$ de la expansión (8) que permiten reconstruir la solución temporal, es mostrado en la figura 4 para $k_0 = 12$.

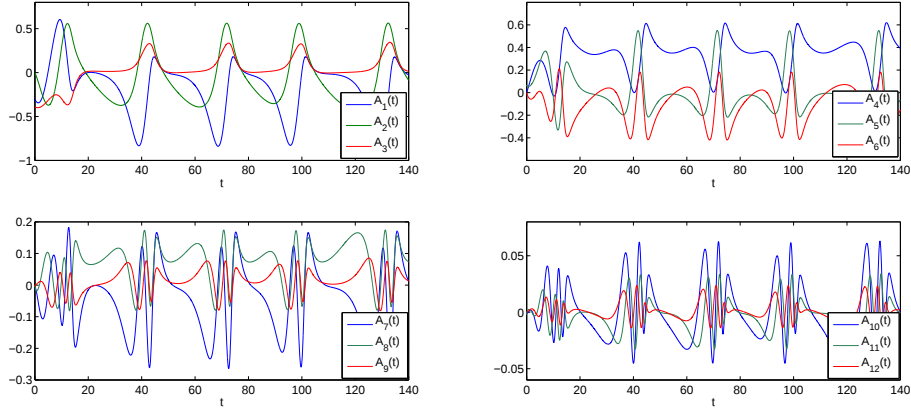


Figura 4: Perfil temporal de los coeficientes $A_k(t)$ de la expansión para $k_0 = 12$.

6. Conclusiones

Hemos estudiado la habilidad de los modelos reducidos para reproducir la dinámica no lineal de las soluciones de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. El hecho de ser una ecuación escalar no le resta importancia a la complejidad de sus soluciones. Eso hace de dicha ecuación un buen ejemplo para testar nuestro modelo reducido basado en la proyección de la solución en un número limitado de modos. En el presente trabajo hemos probado que los resultados obtenidos con este método reproducen con exactitud las soluciones calculadas mediante el código temporal. Evidentemente la potencia de este método radica en su utilización en problemas más complejos. Los autores han obtenido resultados interesantes en un problema que combina la convección de Rayleigh-Bénard en geometría cilíndrica y el flujo generado por dos discos en contra-rotación. La dinámica de soluciones en este caso es muy rica y compleja [3] y en [11] los autores muestran la habilidad de los modelos reducidos para capturarla en todos los casos. Los modelos reducidos se presentan ampliamente útiles en situaciones en las que el código temporal es muy costoso computacionalmente como ocurre en los modelados de problemas completamente 3D. El objetivo futuro de los autores es abordar tales situaciones.

Agradecimientos

M. C. N. agradece a la CCYT (JC de Castilla- La Mancha) por una beca de investigación posdoctoral. Los autores agradecen los comentarios de P. Le Quéré y L. S. Tuckerman.

Referencias

- [1] D. J. Benney, *Long waves on liquid films*, J. Math. and Phys. **45** 150-155 (1966).
- [2] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [3] L. Bordja et al. *Influence of counter-rotating von Kármán flow on onset of thermal convection in a cylinder* (in preparation for Chaos).

- [4] K. Boronska and L. S. Tuckerman, *Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard convection: II. Bifurcation diagram and symmetry classification*. Phys. Rev E, submitted (2009).
- [5] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer: Berlin, 1988.
- [6] P. C. Dauby, P. Colinet and D. Johnson, *Theoretical analysis of a dynamic thermoconvective pattern in a circular container*. Phys. Rev. E **61**, 3 2663-2668 (2000).
- [7] E. Gadoin, P. Le Quéré and O. Daube, *A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries: application to natural convection in enclosures*. Int. J. Numer. Meth. Fluids **37** 175-208 (2001).
- [8] A-K. Kassam and L. N. Trefethen, *Fourth-order time-stepping for stiff PDEs*. SIAM J. Sci. Comput. **26** 4 1214-1233 (2005).
- [9] Y. C. Lee and H. H. Chen, *Nonlinear dynamical models of plasma turbulence*, Phys. Scripta **2** 41-47 (1982).
- [10] M. C. Navarro, A. M. Mancho and H. Herrero, *Instabilities in buoyant flows under localized heating*. Chaos **17** 023105 1-10 (2007).
- [11] M. C. Navarro, L. M. Witkowski, L. S. Tuckerman and P. Le Quéré, *Building a reduced model to study non linear dynamics in Rayleigh-Bénard convection with counter-rotating disks*. Chaos, submitted (2009).
- [12] G. I. Sivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames-I. Derivation of basic equations*, Acta Astr. **4** 1177-1206 (1977).