

Un modelo bicapa de tipo Shallow Water con efectos de viscosidad y fricción

G. NARBONA-REINA¹, J.D. ZABSONRÉ², E.D.
FERNÁNDEZ-NIETO¹, D. BRESCH³

¹ *Dpto. Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla. E-mails: gnarbona@us.es, edofer@us.es.*

² *Univ. Polytechnique de Bobo-Dioulasso, Burkina Faso. E-mail: jzabsonre@univ-ouaga.bf.*

³ *Laboratoire de Mathématiques, Univ. Savoie, Francia. E-mail: didier.bresch@univ-savoie.fr*

Palabras clave: ecuaciones Shallow-Water, modelo bicapa, viscosidad, fricción.

Resumen

En este trabajo presentamos un nuevo modelo de ecuaciones de aguas someras bicapa en dimensión dos donde se han tenido en cuenta los efectos de viscosidad y fricción tanto en el fondo como entre las dos capas de fluido. Siguiendo el trabajo de Gerbeau & Perthame [3] para la deducción del modelo, realizamos el análisis asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales e imponemos la hipótesis de presión hidrostática. Para obtener en el modelo los efectos de viscosidad es necesario desarrollar asintóticamente las ecuaciones hasta el segundo orden. Estos efectos son importantes para, por ejemplo, los problemas de rotura de presa como mostramos mediante un test numérico.

1. Introducción

Este trabajo está dedicado a la obtención de un nuevo modelo de ecuaciones de aguas someras bicapa bidimensional con efectos de viscosidad y fricción.

Las ecuaciones de aguas someras se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes imponiendo la denominada hipótesis de presión hidrostática. Estas ecuaciones se utilizan para simular un gran número de aplicaciones geofísicas como por ejemplo la evolución del océano, ríos, zonas costeras, etc. Pero hay situaciones en las que no son suficientes, es el caso, por ejemplo, del Estrecho de Gibraltar donde intervienen las dos corrientes de aguas provenientes del Océano Atlántico y del Mar Mediterráneo con diferentes propiedades físicas. Es necesario entonces el estudio de modelos que incluyan dos capas.

Podemos encontrar varios trabajos dedicados a la obtención de modelos de aguas someras para una y dos capas, ver por ejemplo [1], [2], [4] y [5].

Desde otro punto de vista, es importante señalar el efecto de la viscosidad en estos modelos, que sobre todo se vuelve esencial en problemas de roturas de presa o grandes saltos hidráulicos (ver [3]). Por tanto, en nuestro objetivo de conseguir un modelo lo más completo posible, consideraremos dos capas de fluidos con distintas características físicas y tendremos en cuenta los efectos derivados de la viscosidad, la fricción y la tensión.

En el trabajo desarrollado por Gerbeau & Perthame en [3] se deduce un modelo viscoso de ecuaciones de aguas someras para un problema de una capa y en una dimensión. Para ello los autores realizan el estudio asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes y muestran cómo es necesario llegar al desarrollo de segundo orden en las ecuaciones para que sean visibles los efectos de viscosidad en el modelo. Asimismo es necesario hacer una corrección del término de fricción para conseguir también la influencia de la viscosidad en éste.

La deducción del modelo bicapa presentado en este trabajo ha sido obtenido realizando el análisis asintótico de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales con la hipótesis de presión hidrostática incluyendo la fuerza de Coriolis, efectos de fricción (en la interfaz y fondo) y de tensión (en la superficie e interfaz). Siguiendo el trabajo de Gerbeau & Perthame hemos desarrollado las ecuaciones al segundo orden para obtener los efectos de viscosidad.

En primer lugar expondremos brevemente los diferentes pasos llevados a cabo para la deducción del modelo y a continuación mostramos un test numérico de un problema de rotura de presa en dimensión dos, donde se comparan los resultados obtenidos para el modelo a orden 1 con el modelo a orden 2.

2. Definición del problema de partida

Consideramos dos capas de fluidos inmiscibles en un dominio periódico Ω en \mathbb{R}^2 con diferentes viscosidad y densidad. Por simplicidad en este trabajo supondremos que el fondo es plano. El caso con fondo variable junto con la deducción detallada del modelo se puede consultar en [6].

En lo referente a la notación, de forma general asumimos que el índice 1 corresponde a la capa superior y el índice 2 a la inferior. Si denotamos por h_i el espesor de cada capa, definimos el dominio como $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dado por:

$$\Omega_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \omega, \omega \subset \mathbb{R}^2, z \in (h_2, h)\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \omega, \omega \subset \mathbb{R}^2, z \in (0, h_2)\}$$

donde hemos denotado por $h = h_1 + h_2$ la altura total. La frontera del dominio viene definida como $\partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_b$, la unión de las fronteras de la superficie, interfaz y del fondo respectivamente.

Definimos también $u_i = (v_i, w_i)$ la velocidad de cada capa, ρ_i la densidad y p_i la presión.

Consideramos que la hidrodinámica de cada capa viene definida por las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho_i \partial_t u_i + (\rho_i u_i \nabla) u_i - \operatorname{div} \sigma_i + 2\rho_i \vec{\Omega} \times u_i = -\rho_i g e_z; \\ \operatorname{div} u_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

La fuerza de Coriolis viene representada por el término $2\rho_i\vec{\Omega}\times u_i$ donde $\vec{\Omega} = \Omega(0, \cos\theta, \sin\theta)$ es el vector de rotación de la tierra, siendo θ la latitud. $\sigma_i = 2\mu_i D(u_i) - p_i \text{Id}$ es el tensor de esfuerzos, donde $D(v) = \frac{\nabla v + \nabla^T v}{2}$ es el tensor de deformaciones y por μ_i denotamos la viscosidad dinámica. e_z representa el vector $(0, 0, 1)$ y g la constante de gravedad.

Para que el problema esté bien definido, completamos estas ecuaciones con condiciones de contorno adecuadas:

- Sobre la superficie libre $z = h(t, x)$ imponemos la condición cinemática según la velocidad u_1 :

$$\partial_t h + v_1 \cdot \nabla_x h = w_1. \quad (2)$$

Consideramos el efecto de la tensión superficial que viene dado por la siguiente condición:

$$\sigma_1 \cdot n_s = \alpha_1 \kappa \cdot n_s, \quad (3)$$

siendo n_s el vector normal exterior a la superficie libre, κ la curvatura ($\kappa = \text{div}(n_s)$) y α_1 una constante.

- Sobre la interfaz $z = h_2(t, x)$ imponemos primero la condición cinemática:

$$\partial_t h_2 + v_j \cdot \nabla_x h_2 = w_j, \quad \text{for } j = 1, 2; \quad (4)$$

y en segundo lugar consideramos los efectos de fricción entre ambas capas, en este caso influye la componente tangencial (denotada por el subíndice τ) del tensor de esfuerzos,

$$(\sigma_i \cdot n_{2,1})_\tau = -\gamma(v_2 - v_1)_\tau \quad \text{for } i = 1, 2, \quad (5)$$

siendo $n_{2,1}$ el vector normal con sentido de la capa inferior a la superior y γ el coeficiente de fricción de la interfaz. Por último consideramos los efectos de tensión en la interfaz:

$$(\sigma_2 \cdot n_{2,1})_n = (\sigma_1 \cdot n_{2,1})_n + ((\alpha_2 - \alpha_1)\kappa_{2,1} \cdot n_{2,1})_n, \quad (6)$$

donde $\kappa_{2,1} = \text{div}(n_{2,1})$ es la curvatura y α_2 una constante.

- Sobre el fondo $z = 0$ consideramos una condición de tipo Navier para la fricción:

$$(\sigma_2 \cdot n_b)_\tau = \alpha(u_2)_\tau \quad (7)$$

con α la constante de fricción en el fondo y n_b el vector normal exterior. Consideramos también la condición de no-penetración: $w_2 = 0$.

3. Derivación del modelo

En esta sección damos una breve descripción de la deducción del modelo. Como mencionamos en la introducción, esta deducción ha sido desarrollada a partir del trabajo [3] con las adaptaciones apropiadas. La deducción completa del modelo se encuentra en [6].

En general la derivación del modelo se divide en dos pasos, describimos a continuación las ideas principales.

En primer lugar consideramos escalas características para las variables implicadas en el problema y escribimos el sistema de ecuaciones en forma adimensional. A continuación imponemos la hipótesis de presión hidrostática, suponiendo que la ratio entre la altura característica H y la longitud característica L es muy pequeña, $\epsilon = H/L$. De esta manera imponemos también que las variaciones verticales son mucho más pequeñas que las horizontales. Usando la aproximación hidrostática eliminamos los términos de orden dos en ϵ , obteniendo lo que llamamos el sistema hidrostático que finalmente integramos en altura para obtener el promedio vertical de las variables.

Sistema de ecuaciones de aguas someras.

Nivel 1. Aproximación de primer orden.

Realizamos el análisis asintótico del sistema obtenido al integrar las ecuaciones hidrostáticas. Para ello suponemos las siguientes hipótesis sobre los datos:

$$\mu_i = \epsilon\mu_{0i}, \quad \alpha = \epsilon\alpha_0, \quad \alpha_i = \epsilon\alpha_{0i}, \quad \gamma = \epsilon\gamma_0.$$

A continuación desarrollamos las incógnitas h_i, u_i, p_i en función de ϵ , es decir, $h_i = h_i^0 + \epsilon h_i^1 + \epsilon^2 h_i^2 + \dots$ (y análogamente para u_i y p_i).

Como en este primer paso sólo buscamos el primer orden para la velocidad, u_i^0 , sólo consideramos los términos de orden ϵ en el desarrollo de las variables. Utilizando además las condiciones de contorno y la fórmula de Leibnitz obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para $i = 1, 2$:

$$(BL1) \begin{cases} \partial_t h_i + \operatorname{div} (h_i v_i) = 0; \\ \rho_i \partial_t (h_i v_i) + \rho_i \operatorname{div} (h_i v_i \otimes v_i) + \frac{1}{2} \rho_i g \nabla_x h_i^2 + TC_i + TA_i = TF_i. \end{cases} \quad (8)$$

A continuación especificamos las expresiones para los términos en la ecuación:

- Términos de Coriolis: $TC_i = 2\rho_i \Omega \sin \theta h_i v_i^\perp$.
- Términos de Acoplamiento: $TA_i = \rho_i g h_i \nabla_x h_j$, con $j \neq i$.
- Términos de Fricción: $TF_1 = \gamma(v_2 - v_1)$ y $TF_2 = -\rho_1 \gamma(v_2 - v_1) - \alpha v_2$.

Nivel 2. Aproximación de segundo orden.

En este segundo paso consideraremos también los términos de orden 2 para el desarrollo de las variables. Para tener en cuenta la variabilidad vertical realizamos además una corrección parabólica en z para la velocidad horizontal (cf. [3]). Esta corrección nos proporciona además los términos de viscosidad y una modificación en los términos de fricción tanto del fondo como de la interfaz.

El sistema final queda (para $i = 1, 2$):

$$(BL2) \begin{cases} \partial_t h_i + \partial_x (h_i v_i) = 0; \\ \rho_i \partial_t (h_i v_i) + \rho_i \operatorname{div} (h_i v_i \otimes v_i) + \frac{1}{2} \rho_i g \nabla_x h_i^2 + TC_i + TA_i = \\ = TF_i + TV_i + TT_i; \end{cases} \quad (9)$$

Los términos de Coriolis (TC_i) y los términos de acoplamiento (TA_i) coinciden con las definiciones dadas para el sistema (8), especificamos el resto de términos:

- Términos de Fricción: $TF_1 = \delta^{-1}\gamma \left(\beta \frac{\alpha h_2}{6\mu_2} v_2 + (v_2 - v_1) \right)$ y
 $TF_2 = -\rho_1 TF_1 - \beta\alpha \left(v_2 + \delta^{-1}\rho_1 \frac{\gamma h_2}{6\mu_2} (v_2 - v_1) \right).$
- Términos de Viscosidad: $TV_i = 2\mu_i \operatorname{div} (h_i D_x(v_i)) + 2\mu_i \nabla_x (h_i \operatorname{div} v_i).$
- Términos de Tensión: $TT_i = \alpha_i h_i \nabla_x \Delta_x h_i + \alpha_i h_i \nabla_x \Delta_x h_j$, con $j \neq i$.

Donde $\beta = \left(1 + \frac{\alpha h_2}{3\mu_2}\right)^{-1}$ y $\delta = 1 + \frac{\gamma}{3} \left(\rho_1 \frac{h_2}{\mu_2} + \frac{h_1}{\mu_1}\right).$

Observación 3.1 *Es importante señalar que los términos de fricción que hemos obtenido son del mismo orden que los de partida, es decir, si suponemos que los coeficientes μ_i, α_i, α y γ son de orden ε , con $\varepsilon \sim 10^{-3}$, entonces se puede probar (ver [6]) que los términos TF_i en la ecuación (9) son de orden ε también.*

4. Resultados numéricos

Presentamos en esta sección un ensayo numérico en el que resolvemos un problema de rotura de presa en dimensión 2. Para ello utilizamos los dos modelos obtenidos: el modelo sin viscosidad (BL1) definido en (8) y con viscosidad (BL2) dado por (9). El objetivo es realizar una comparación para ver la influencia de los efectos de viscosidad incluidos en el segundo modelo, así como de la fricción, modificada para este último.

Definición del ensayo numérico.

Consideramos un problema de rotura de presa circular en ambas capas, es decir, en la superficie y en la interfaz.

El dominio es el cuadrado $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ y el fondo viene definido por la siguiente función:

$$b(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(1 + \cos(2\pi x))(1 + \cos(2\pi y)) & (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 0,1^2; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La condición inicial viene dada por:

$$h_2(t = 0) + b(x, y) = \begin{cases} 1,1 & (x - 0,9)^2 + (y - 1)^2 \leq 0,2^2; \\ 0,6 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

para la capa inferior y para la capa superior tomamos:

$$h_1(t = 0) + h_2(t = 0) + b(x, y) = \begin{cases} 1,7 & (x - 1,6)^2 + (y - 1)^2 \leq 0,1^2; \\ 1,2 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y $q_1(t = 0) = q_2(t = 0) = 0$.

En la Figura 1 se muestra un corte longitudinal del dominio en $y = 1$ donde podemos ver la condición inicial considerada.

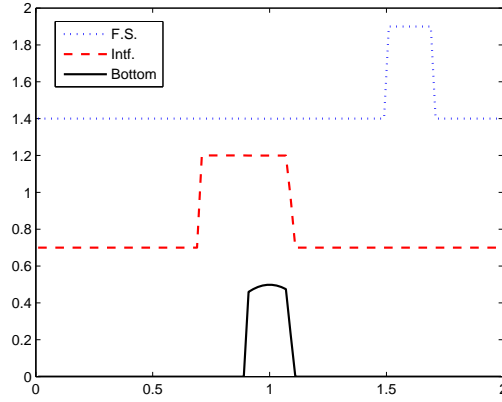


Figura 1: Condición inicial

La condición CFL se ha tomado con el valor de 0.7 y para la malla hemos considerado una partición de paso $\Delta x = \Delta y = 0.02$, el tiempo final de ejecución es de $T = 2$ segundos. Los coeficientes de fricción y de viscosidad que hemos considerado son $\gamma = \alpha = \mu_1 = \mu_2 = 10^{-3}$ y para la densidad tomamos $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.8$.

En las Figuras 2 a 4 representamos un corte longitudinal en $y = 1$, para mostrar la evolución del sistema.

Así, las alturas de las capas están representadas en la Figura 2 donde podemos apreciar que la diferencia entre las soluciones obtenidas por los problemas (8) y (9) va siendo cada vez mayor con el tiempo. Este mismo comportamiento se puede también comprobar en los caudales de ambas capas, representados en las Figuras 3 para la capa inferior y 4 para la superior.

Agradecimientos

El trabajo de investigación de los autores E.D. Fernández-Nieto y G. Narbona-Reina ha estado parcialmente subvencionado por el proyecto del Ministerio de Educación y Ciencia MTM2006-1275.

Referencias

- [1] Audusse E. *A multilayer Saint-Venant model*. Disc. Cont. Dyn. System. Series B, 5(2): 189-214, 2005.
- [2] Ferrari S., Saleri F. *A new to dimensional Shallow-Water model including pressure effects and slow varying bottom topography*. M2AN, vol. 38, No 2, (2004), 211-234.
- [3] Gerbeau J.F and Perthame B., *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar Shallow-Water; Numerical validation*. Disc. and Cont. Dynam. Syst. Series B, 1(1): 89-102, 2001.
- [4] Marche F. *Theoretical and numerical study of Shallow Water models. Applications to Nearshore hydrodynamics*. Tesis de la Universidad de Bordeaux, 2005.
- [5] Peybernes M., *Analyse de problème mathématiques de la mécanique des fluides de type bi-couche et à frontière libre*. Tesis de la Universidad de Pascal Paoli, 2006.
- [6] Narbona-Reina G.; Zabsonré J.D.; Fernández-Nieto E.D. and Bresch D. *Derivation of a bilayer model for Shallow Water equations with viscosity. Numerical validation*. Sometido para publicación (2008).

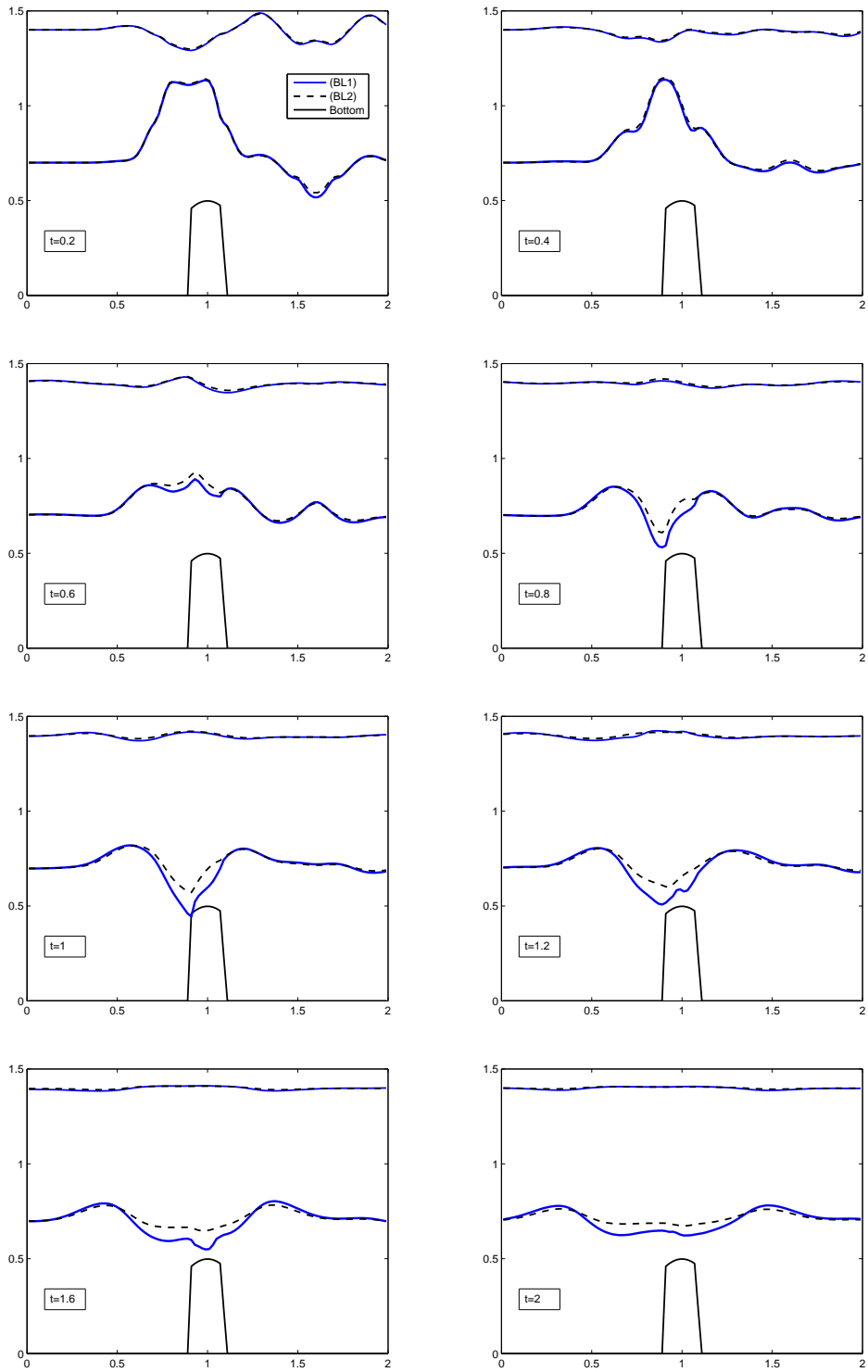


Figura 2: Sección longitudinal de las alturas.

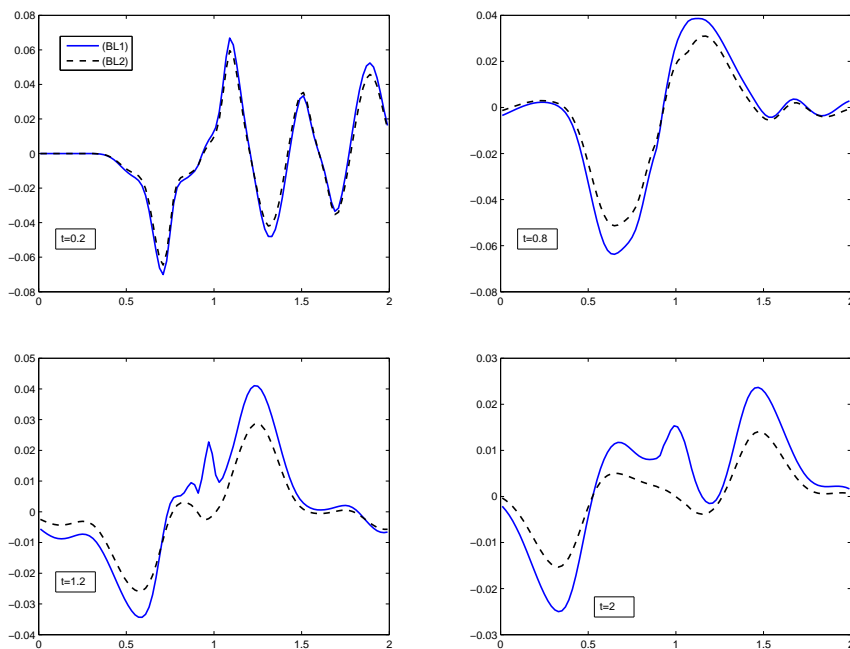


Figura 3: Caudal de la capa 2.

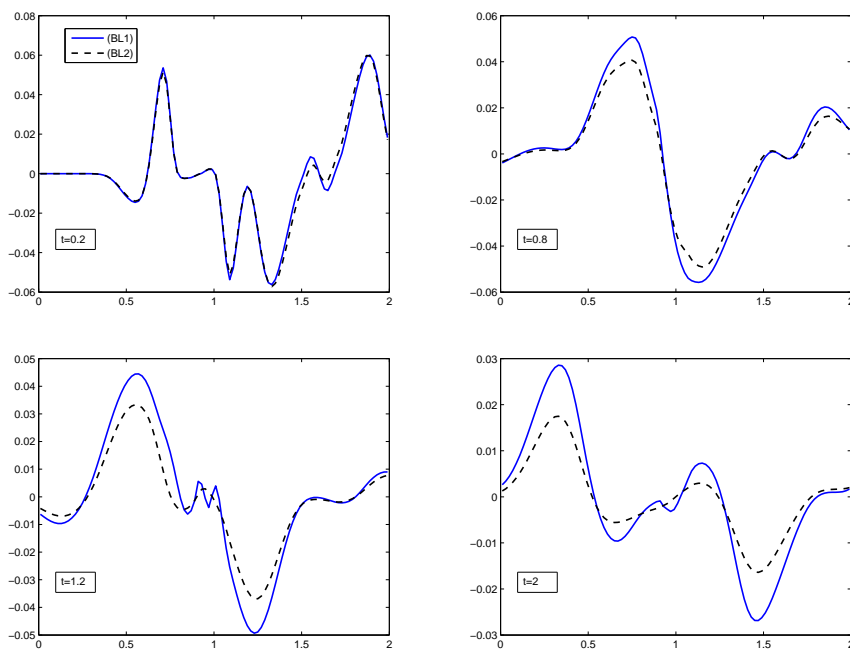


Figura 4: Caudal de la capa 1.