

Análisis matemático y numérico de un método de contorno para la simulación de la dispersión de ondas acústicas en altas frecuencias

V. DOMÍNGUEZ¹, I.G. GRAHAM², T. KIM², V. P. SMYSHLYAEV²

¹ *Dpto. Ing. Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Tudela*
E-mail: victor.dominguez@unavarra.es

² *Dpto. Mathematical Sciences, Universidad de Bath, Bath (Reino Unido).*
E-mails: iggmaths@bath.ac.uk, tk209@bath.ac.uk, vps@maths.bath.ac.uk

Palabras clave: Método de Contorno, dispersión de ondas, altas frecuencias

Resumen

En este trabajo estudiamos la resolución numérica de problemas de dispersión de ondas acústicas de altas frecuencias en problemas bidimensionales. El objeto es supuesto blando al sonido, de frontera regular y convexo. La solución del problema se reduce, mediante técnicas de contorno, a una ecuación integral sobre la frontera más una fórmula de representación. De entre las formulaciones posibles escogemos una que hace de la la incógnita de la ecuación integral una cantidad física del problema. Se persigue con ello contar con la máxima información posible a priori sobre la solución. Para la resolución numérica consideraremos métodos de tipo Galerkin. El espacio discreto, mediante análisis de tipo asintótico, se diseña de forma que proporciona una buena aproximación de la solución del problema en medias y altas frecuencias. Analizamos el error que comete la mejor aproximación en el espacio discreto y, bajo ciertas hipótesis, trasladamos dicho error al error del esquema numérico. Mostramos así que la dependencia del número de onda, aunque persiste, es lo suficientemente débil como para que el algoritmo sea aplicable para muy altas frecuencias.

1. Introducción

La simulación numérica de la dispersión de ondas acústicas en el régimen de altas frecuencias ha despertado gran interés en la comunidad científica en los últimos años (véase por ejemplo [1, 2, 4] y las referencias ahí citadas). Estos problemas quedan marcados porque la solución es altamente oscilante. Los métodos clásicos requieren espacios discretos cuya

dimensión sea proporcional al número de onda lo que los hace prohibitivos para problemas de altas frecuencias.

La utilización de técnicas asintóticas ha demostrado ser de gran ayuda en estos problemas. Dichos resultados proporcionan información sobre cómo es la solución que se desea aproximar y dicha información puede ser incorporada en los espacios discretos. El método se especializa pero gana a cambio robustez y la dependencia del número de onda, si bien no desaparece, sí se reduce hasta unos márgenes tolerables.

En este trabajo estudiamos la dispersión de una onda incidente acústica plana

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \exp(ik \mathbf{x} \cdot \mathbf{d})$$

(\mathbf{d} es el vector unitario que marca la dirección de desplazamiento, $k > 0$ es el número de onda) que provoca un objeto bidimensional de frontera convexa y suave Ω y blando al sonido. La respuesta del objeto se modela suponiendo que éste emite una onda dispersa, o *scattered*, u^s que satisface ciertas condiciones de decrecimiento en el infinito. De esta forma la solución del problema es

$$u = u^{\text{inc}} + u^s.$$

La función u , también conocida como onda total, es solución del problema de contorno ($\Gamma = \partial\Omega$)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \quad \gamma_\Gamma u = 0.$$

Además, admite la siguiente representación integral

$$u(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \Phi_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

donde Φ_k es la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz. La densidad λ es la única solución de la ecuación integral

$$\mathcal{L}_k \lambda := \frac{1}{2} \lambda + (\mathcal{S}_k - i\eta \mathcal{D}_k) \lambda = g_k, \quad \text{en } \Gamma.$$

En la expresión anterior, $g_k := \partial_\nu u^{\text{inc}} - i\eta \gamma_\Gamma u^{\text{inc}}$, ∂_ν es la derivada normal exterior en Γ ,

$$\mathcal{S}_k \lambda(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \Phi_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathcal{D}_k \lambda(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \partial_{\nu(\mathbf{x})} \Phi_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (1)$$

son el operador de capa simple y el (adjunto del) operador capa doble respectivamente. El coeficiente $\eta \neq 0$ es un término de acoplamiento entre las dos partes constituyentes de la ecuación. Diversos trabajos sugieren $\eta \approx k$ como una elección óptima para estabilizar el condicionamiento del operador cuando $k \rightarrow \infty$. En lo que sigue supondremos que se satisface el siguiente resultado:

Hipótesis. Existe $c(k) > 0$ tal que para todo k suficientemente alto

$$\text{Re} \int_\Gamma \bar{\lambda} \mathcal{L}_k \lambda > c(k) \int_\Gamma |\lambda|^2.$$

□.

Este resultado, con $c(k) = 1/2$ para $\eta = k$ se ha probado rigurosamente en el círculo unidad en 2D (y la esfera en 3D) en [4]. Aunque hay evidencias que apoyan la idea de que la hipótesis es cierta en situaciones mucho más generales, no se dispone de una demostración hasta la fecha (ver [3] y las referencias ahí citadas para algunas contribuciones en esta dirección).

Nos centraremos en lo que sigue en la resolución numérica de (1) para $k \gg 1$. Proponemos para ello un método de tipo Galerkin. Esto es, dado S_h un espacio discreto, buscamos $\lambda_h \in S_h$ tal que

$$\int_{\Gamma} \overline{\xi_h} \mathcal{L}_k \lambda_h = \int_{\Gamma} \overline{\xi_h} g_k, \quad \forall \xi_h \in S_h.$$

La hipótesis anterior asegura la estabilidad del método con un resultado de tipo Lema de Céa

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq c(k) \|\mathcal{L}_k\|_{L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)} \inf_{\xi_h \in S_h} \|\lambda - \xi_h\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Nótese por tanto que la constante que liga el error del método con el error de la mejor aproximación depende únicamente del operador. Volviendo al ejemplo del círculo/esfera, dicha constante crece como $k^{1/3}$ y por tanto es de esperar cierto deterioro de la solución cuando nos internemos en el mundo de las altas frecuencias.

El otro factor por controlar radica en las propias propiedades de aproximación del espacio discreto. Es en este momento cuando el hecho de que λ es una cantidad física del problema cobra especial importancia. En efecto,

$$\lambda = \partial_\nu u = \partial_\nu (u^{\text{inc}} + u^{\text{s}}).$$

Al estudio de qué información tenemos sobre λ y cómo se puede aprovechar en el diseño del espacio discreto dedicaremos la siguiente sección.

2. Comportamiento asintótico de la solución

Con objeto de describir de forma precisa la solución λ , tomaremos una parametrización $\mathbf{x} : [0, L] \rightarrow \Gamma$ regular de $\Gamma := \partial\Omega$. Supondremos que $t_1 < t_2$ son los puntos tangenciales, es decir,

$$\mathbf{x}'(t_1) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{x}'(t_2) \cdot \mathbf{d} = 0,$$

y que $t_1 < t < t_2$ se corresponde, vía la parametrización \mathbf{x} , con la zona *iluminada*, esto es, con la parte de la curva sobre la que incide la onda plana (ver Figura 1).

Consideremos la siguiente factorización de

$$\lambda(\mathbf{x}(s)) = ikV(s, k) \exp(ik(\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{d})), \quad s \in [0, L]$$

Habida cuenta de que λ es la derivada norma de la onda total (de ahí el factor k), se puede esperar que ésta oscile como la onda incidente. De esta forma el comportamiento oscilante queda recogido esencialmente en la exponencial compleja y $V(s, k)$ es una función suave y *a priori* más simple de aproximar.

Esta impresión es, *grosso modo*, correcta en la zona *iluminada*. En el entorno de los puntos $\mathbf{x}(t_1)$ y $\mathbf{x}(t_2)$, esto es, donde la dirección de desplazamiento de la onda plana es

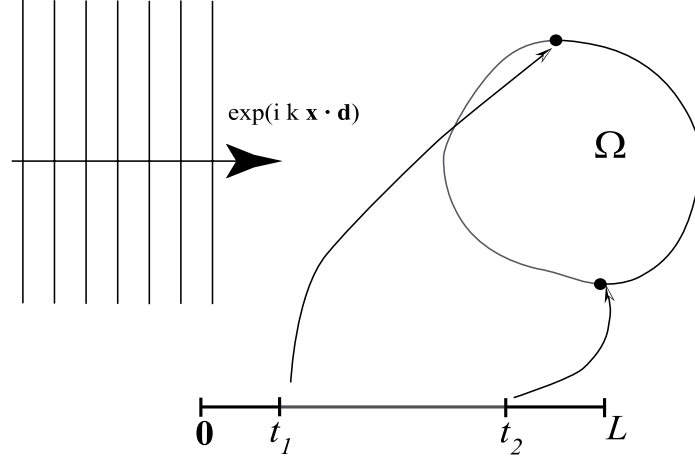


Figura 1: Geometría del problema

tangencial a la curva, hay un cambio brusco de comportamiento de V que pasa a decrecer de forma exponencial a cero (en términos de k y su distancia a los puntos tangenciales) en la parte en *sombra*.

Esta idea queda enunciada formalmente en el siguiente teorema

Teorema 1 (Teorema 5.4 de [4]) *Para todo $n \geq 0$ existe $C_n > 0$ tal que*

$$|D_s^n V(s, k)| \leq \begin{cases} C_n, & \text{si } n = 0, 1, \\ C_n \left[1 + \frac{k^{(n-1)/3}}{(1 + k^{1/3} |(s - t_1)(s - t_2)|)^{n+2}} \right], & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \quad (2)$$

Es más, para todo $n \geq 0$ y $\delta > 0$ existe $C_{n,\delta}$ y $\beta_\delta > 0$ tal que para $s \in [0, t_1]$

$$|D_s^n V(s, k)| \leq C_{n,\delta} \exp(-\beta_\delta k^{1/3-\delta} |t_1 - s|),$$

mientras que para $s \in [t_2, L]$

$$|D_s^n V(s, k)| \leq C_{n,\delta} \exp(-\beta_\delta k^{1/3-\delta} |s - t_2|),$$

De esta forma se puede deducir de (2) que para $s \in [t_1 + c, t_2 - c]$ ($c > 0$ independiente de k) la función es suave en el sentido de que sus derivadas están acotadas independientemente de k . Ello es debido a que las potencias negativas de k en (2) se vuelven activas y contrarrestan el término $k^{(n-1)/3}$. Sin embargo al acercarnos a t_1 ó t_2 la situación cambia radicalmente, puesto que las potencias negativas anteriormente citadas se anulan, de forma que $D_s^n V(t_1, k) \approx k^{(n-1)/3}$.

Finalmente, cuando nos movemos a la zona en sombra, por ejemplo si $(t_1 - s) \geq k^{-1/3+\delta}$, la solución decrece rápidamente a cero, aunque de una manera muy oscilante (oscilaciones que el teorema anterior no muestra). Ésta es la zona de las *creeping waves* cuya aproximación no consideraremos aquí por la dificultad que conlleva.

3. Espacios discretos

En vista de los resultados mencionados en la sección anterior, parece evidente que cualquier espacio discreto deberá comportarse de forma diferente en la zona iluminada, en las zonas de transición y en la parte en sombra.

Dados $c_1, c_2 > 0$, definimos

$$I = [t_1 + c_1, t_2 - c_2], \quad T_1 = [t_1 - c_1, t_1 + c_1], \quad T_2 = [t_2 - c_2, t_2 + c_2].$$

La parte restante, $[0, L] \setminus (I \cup T_1 \cup T_2)$ corresponde a la zona en sombra. En las zonas de transición T_1, T_2 consideramos un mallado refinado

$$\{x_j\}_{j=-n}^n := \left\{ t_1 + c_1 (|j/n|^q \text{sign}(j)) \right\}_{j=-n}^n$$

(de forma análoga en T_2) donde $q \geq 1$. Los espacios discretos que consideraremos serán, en la zona iluminada simplemente polinomios de grado d , mientras que en T_1 y T_2 trabajaremos con splines cúbicos regulares. Esto es

$$S_{h,d} := \left\{ u_h \mid u_h|_I \in \mathbb{P}_d, \quad u_h|_{T_1} \in S_n^q(T_1), \quad u_h|_{T_2} \in S_n^q(T_2) \right\}$$

con

$$S_n^q(T_1) := \left\{ v_h \in \mathcal{C}^2(T_1) \mid v_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_3, \quad j = -n, \dots, n-1 \right\}.$$

($S_n^q(T_2)$ se define de forma análoga). La solución es en cualquier caso aproximada en la zona en sombra por cero.

Proposición 2 *Para todo r existe $C_r > 0$ tal que si $d \geq r - 1$*

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_d} \|V(\cdot, k) - p\|_{L^2(I)} \leq C_r d^{-r}$$

donde C_r es independiente de k .

Este resultado, probado ya en [4], es consecuencia de propiedades de aproximación de los polinomios y del Teorema 1.

En una aproximación polinómica similar en T_1 y T_2 aparecen términos de la forma $k^{r/3}$ que marcan claramente un deterioro cuando $k \rightarrow \infty$. Este deterioro queda mitigado si tomamos T_1 y T_2 dependientes de k , ($[t_1 - ck^{-1/3}, t_1 + ck^{-1/3}]$ resulta ser la opción óptima hasta el punto de que desaparecen estas potencias de k). Sin embargo, ello conlleva que I crezca con k y en este momento la constante en la proposición anterior pasa a estar multiplicada por una potencia pequeña, pero relevante, de k . En [4] estudiamos estos errores y proponíamos formas óptimas de tomar estos intervalos para reducir la dependencia de k .

Mantener las tres zonas implicadas I, T_1 y T_2 fijas e independientes de k (dependientes, eso sí, de la dirección de la onda incidente) tiene efectos beneficiosos. Así, por ejemplo, la implementación efectiva de este tipo de métodos (ver [5]) conjuga cambios de variables altamente no lineales con la integración de funciones oscilantes. La primera parte de estos cálculos dependen únicamente de la partición de la curva, de forma que si ésta no depende de k , estos cálculos pueden ser reutilizados para diferentes números de onda.

Sin embargo, el comportamiento drástico de V en los entornos de t_1 y t_2 sigue estando presente. De ahí que se ha sugerido en este trabajo un espacio discreto en las zonas de transición, más flexible, que combinado con una malla refinada, busque aproximar de forma eficiente la solución en esta zona. El resultado que se obtiene queda recogido en la siguiente proposición.

Proposición 3 *Para todo n suficientemente alto y con $q = 3$, existe $C > 0$ tal que*

$$\inf_{v_h \in S_n^3(T_i)} \|V(\cdot, k) - v_h\|_{L^2(T_i)} \leq C \frac{1}{n^4} \left[1 + \frac{k}{n^9} \right], \quad i = 1, 2.$$

Esto es, el error se mantiene constante si permitimos que el número de grados de libertad crezca como $k^{1/9}$ lo que en situaciones prácticas puede ser tomado como independiente de k . Elecciones de q mayores permiten reducir aún más esta dependencia pero el costo que se paga es la necesidad de manejar intervalos muy pequeños cerca de t_1 y t_2 lo que dificulta enormemente su implementación práctica.

El siguiente resultado ya es consecuencia inmediata del Teorema 1 y las Proposiciones 2 y 3.

Teorema 4 *Bajo las hipótesis anteriores, para todo $\delta > 0$ y $r \leq d - 1$ existe $C_{\delta,r}, \beta_\delta > 0$ independiente de k tal que*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\delta,r} c(k) k \|\mathcal{L}k\|_{L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)} \left(d^{-r} + \frac{1}{n^4} \left[1 + \frac{k}{n^9} \right] + \exp(-\beta_\delta k^{1/3-\delta}) \right)$$

El factor k no es relevante, dado que $\lambda \approx k$ cuando $k \rightarrow \infty$ (recordemos que es una derivada normal) y por tanto desaparece si nos ocupamos de medir errores relativos.

4. Esquema de la demostración de la Proposición 3

Mostraremos en lo que sigue en trazos gruesos cómo se procede para demostrar la Proposición 3. En primer lugar, el problema se puede reducir, vía un cambio de variable afín, a aproximar una función W que satisfaga

$$D_t^n W(t) \leq C_n (1 + k^{(n-1)/3} (1 + k^{1/3} |t|)^{-n-2}), \quad t \in [-1, 1], \quad n = 2, 3, \dots \quad (3)$$

El espacio discreto es entonces

$$S_h^q := \left\{ w_h \in \mathcal{C}^2[-1, 1] \mid w_h|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 \right\}$$

donde

$$t_j := \text{sign}(j) \left| \frac{j}{n} \right|^q, \quad j = -n, \dots, n.$$

Utilizamos en este paso que existe una proyección $P_h : L^2(-1, 1) \rightarrow S_h^q$ que cumple

$$\|P_h u - u\|_{L^2(t_j, t_{j+1})} \leq C (t_{j+4} - t_{j-3})^4 \|D_t^4 u\|_{L^2(t_{j-3}, t_{j+4})}, \quad j = -n, \dots, n-1,$$

con la convención de que $t_j = t_n$ y $t_{-j} = t_{-n}$ si $j \geq n$. La demostración de este resultado es similar a la del Lemma 2.2 de [6] y es reflejo de que existe una base compacta de \widehat{S}_h^q ,

los B-splines (notemos que el soporte de un B-spline es $[t_i, t_{i+4}]$ y que por tanto $[t_{j-3}, t_{j+4}]$ es simplemente el intervalo que contiene los soportes de los B-splines que son diferentes de cero en $[t_j, t_{j+1}]$).

Por simetría, podemos limitarnos a estudiar el error en $[0, 1]$. Tenemos por tanto que estudiar

$$\|W(s) - P_h W\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{j \in I_1(n,k)} \|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 + \sum_{j \in I_2(n,k)} \|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2,$$

donde $I_1(n, k)$ e $I_2(n, k)$ son dos conjuntos de índices

$$I_1(n, k) := \left\{ j \in \{0, \dots, n-1\} \mid t_{j-3} \leq k^{-\varepsilon} \right\}, \quad I_2(n, k) := \{0, \dots, n-1\} \setminus I_1(n, k).$$

La razón de esta división en el sumatorio es clara. Para los elementos presentes en la primera suma, esto es, en $I_1(n, k)$, (3) proporciona la cota

$$\|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq (t_{j+4} - t_{j-3})^9 \|D_t^4 W\|_{L^\infty(t_{j-3}, t_{j+4})}^2 \leq (t_{j+4} - t_{j-3})^9 k^2.$$

El refinamiento de la malla amortigua el coeficiente k^2 (es precisamente en esta zona donde es más acusado) de forma que un análisis local prueba entonces que

$$\sum_{j \in I_1(n,k)} \|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq C \left[\frac{k}{n^{9(q-1)/2}} \right]^2 \frac{1}{n^8}$$

donde C es independiente de n y k .

Por contra, para el sumatorio $I_2(n, k)$, la potencia negativa presente en (3) se activa, compensa en parte las potencias positivas de k , de forma que para estos términos es posible deducir

$$\|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq (t_{j+4} - t_{j-3})^9 \left[1 + k^{-1} x_{j-3}^{-6} \right]^2.$$

Dado que para todo $j \geq 4$

$$(t_{j+4} - t_{j-3}) \leq (t_{j+4})^{1-1/q} \frac{1}{n} = 8^{1-1/q} (t_{j-3})^{1-1/q} \frac{1}{n},$$

se deduce que para $j \in I_2(n, k)$,

$$\|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq C \left[1 + k^{-2} t_{j-3}^{9(1-1/q)-12} \right] \frac{1}{n^9} \leq C \left[1 + t_{j-3}^{9(1-1/q)-6} \right] \frac{1}{n^9}$$

donde hemos utilizado que $k^{-1/3} \leq t_{j-3}$. De ahí se sigue que con $q = 3$,

$$\sum_{j \in I_1(n,k)} \|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 + \sum_{j \in I_2(n,k)} \|P_h W - W\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq \frac{C}{n^8} \left[1 + \left[\frac{k}{n^9} \right]^2 \right]$$

y se tiene el resultado.

5. Comentarios Finales

Los resultados anteriores pueden generalizarse a splines de cualquier grado. Entre los motivos que justifican el tomar splines regulares está el hecho de los elementos de la base B-spline son relativamente regulares (\mathcal{C}^2 en el presente caso) lo que permite aplicar reglas de cuadratura sin detenerse a considerar en qué zonas son regulares. Esto es especialmente interesante dado que la implementación propuesta para estos métodos de Galerkin pasa por un cambio de variable altamente no lineal que reescribe las oscilaciones del núcleo de la ecuación integral en una forma más manejable pero que complica en gran medida los soportes de las funciones de base de los espacios discretos.

Habida cuenta del fuerte decrecimiento de la solución en la zona en sombra, se pueden plantear tomar $T_1 = [t_1 - ck^{-1/3+\beta}, t_1 + c]$ donde $\beta > 0$. El Teorema 4 queda esencialmente igual.

Como problema abierto, y objeto de futuras investigaciones, persiste el diseño de fórmulas de cuadratura eficientes que permitan la implementación práctica del problema.

Agradecimientos

El presente trabajo está parcialmente financiada por el proyecto “Simulación y análisis numérico de problemas evolutivos en mecánica de sólidos y fluidos”, ref. MEC/FEDER Ref. MTM2007-63204

Referencias

- [1] O.P. Bruno, C.A. Geuzaine, J.A. Monro, F. Reitich. *Prescribed error tolerances within fixed computational times for scattering problems of arbitrarily high frequency: the convex case*. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 362 (2004), no. 1816, 629–645.
- [2] S.N. Chandler-Wilde, S. Langdon. *A Galerkin boundary element method for high frequency scattering by convex polygons*. SIAM J. Numer. Anal. 45 (2007), no. 2,
- [3] S.N. Chandler-Wilde, P. Monk. *Wave-number-explicit bounds in time-harmonic scattering*. SIAM J. Math. Anal. 39 (2008), no. 5, 1428–1455.
- [4] V. Domínguez, I.G. Graham, V.P. Smyshlyaev. *A hybrid numerical-asymptotic boundary integral method for high-frequency acoustic scattering*. Numer. Math. 106 (2007), 471–510.
- [5] V. Domínguez, I.G. Graham, Tatiana Kim. *Practical hybrid numerical-asymptotic boundary integral methods for high-frequency acoustic scattering*. En preparación.
- [6] J. Elschner, *On spline approximation for a class of integral equations. II. Galerkin's method with smooth splines*. Math. Nachr. 140 (1989), 273–283.