

Dos bifurcaciones de ciclos límite en sistemas lineales a trozos en \mathbb{R}^3 .

JAUME LLIBRE¹, ENRIQUE PONCE² FRANCISCO TORRES²,

¹ *Dpto. Matemàtiques, Universitat Autònoma Barcelona, E-08193 Bellaterra, Barcelona. E-mail: jllibre@mat.uab.cat.*

² *Dpto. de Matemàtica Aplicada II, Universidad de Sevilla Avenida de los Descubrimientos s/n, E-41012 Sevilla. E-mails: eponcem@us.es, ftorres@us.es.*

Palabras clave: Sistemas lineales a trozos, bifurcaciones, ciclos límite

Resumen

En esta comunicación estudiamos dos bifurcaciones de órbitas periódicas que se dan en una familia de sistemas lineales a trozos continuos con tres zonas de linealidad. La existencia de órbitas periódicas se establece probando la existencia de soluciones de las ecuaciones de cierre. En primer lugar, determinaremos algebraicamente la existencia de una órbita periódica hiperbólica en un sistema simétrico en el que los autovalores de la matriz que rige la dinámica en la zonas externas son $-\alpha, -2\alpha, -3\alpha$, siendo α un número real y positivo, mientras que los autovalores en la zona central son $0, \pm i$. También estudiamos la existencia de otras órbitas periódicas en una perturbación del sistema anterior. En este caso obtenemos unas ecuaciones de cierre singulares, al no ser directamente aplicable el teorema de la función implícita, realizamos previamente una reducción de Liapunov-Schmidt.

1. Introducción

En el estudio de sistemas tridimensionales se conocen pocos resultados que prueben rigurosamente la existencia de ciclos límite. Un procedimiento para establecer la existencia de órbitas periódicas consiste en estudiar las perturbaciones de sistemas degenerados en los que resulta más simple probar dicha existencia. En esta comunicación consideramos la determinación de ciclos límite en una clase de sistemas definidos en \mathbb{R}^3 , siguiendo la estrategia mencionada.

Concretamente, nuestro punto inicial es la consideración de sistemas lineales a trozos con tres zonas de linealidad, simétricos con respecto al origen, que poseen un continuo

acotado de órbitas periódicas en la región central mientras que el flujo en las regiones externas está determinado por matrices cuyo espectro depende de un único parámetro.

Partiremos de un sistema lineal a trozos continuo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ con tres zonas de linealidad $x < -1$, $|x| \leq 1$ y $x > 1$, y simétrico respecto del origen, es decir $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. Logicamente, las matrices de las dos zonas $|x| > 1$ coinciden. Supondremos que se satisface la condición genérica de observabilidad, de manera que el sistema no puede ser descompuesto en otros sistemas más simples, véase [4]. También supondremos que la matriz de las zonas externas posee tres autovalores reales y negativos, $-\alpha$, -2α y -3α , mientras que la matriz de la zona central posee los autovalores $\pm i$ y 0. La elección proporcional de los autovalores de las zonas externas es esencial, como veremos, para reducir los cálculos a expresiones de carácter algebraico.

Nuestro sistema puede ser escrito en la forma de Lure, véase [4] de nuevo,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \text{sat}(x), \quad (1)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -6\alpha & -1 & 0 \\ 11\alpha^2 & 0 & -1 \\ -6\alpha^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6\alpha \\ 1 - 11\alpha^2 \\ 6\alpha^3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

la función $\text{sat}(\cdot)$ representa la saturación normalizada,

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} 1, & u > 1, \\ u, & |u| \leq 1, \\ -1, & u < -1, \end{cases}$$

y con el punto sobre la variable representamos derivación respecto del tiempo.

En las zonas externas $|x| \geq 1$, tenemos el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \pm \mathbf{b}$ y en la zona central $|x| \leq 1$, el sistema (1) se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

El siguiente resultado se deduce con facilidad.

Proposición 1. *El sistema (1)-(2) es invariante bajo la transformación*

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z, \quad t \rightarrow -t, \quad \alpha \rightarrow -\alpha.$$

Como consecuencia de la Proposición 1, podemos restringir el análisis de nuestro sistema al caso $\alpha > 0$. El caso $\alpha = 0$ no se considera porque entonces $\dot{z} = 0$, y el sistema es esencialmente bidimensional.

Es importante destacar que los únicos equilibrios del sistema (1)-(2) se localizan en la zona central constituyendo el segmento $(x, 0, x)$, $|x| \leq 1$. Además, resulta evidente que la dinámica del sistema (1)-(2) en el interior de la zona central $|x| \leq 1$ es independiente del parámetro α .

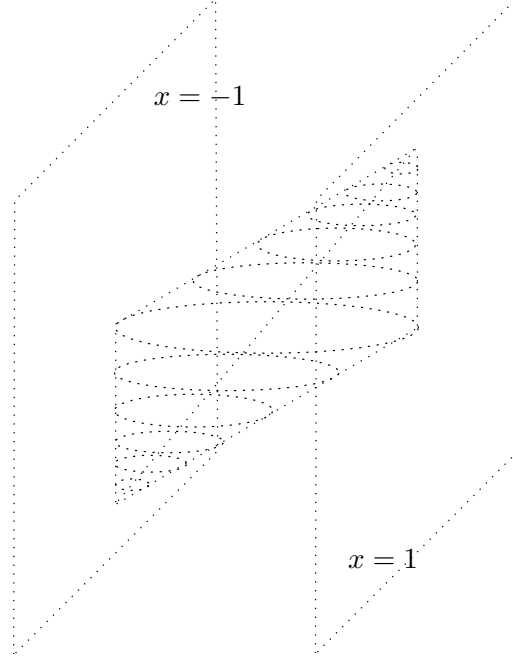


Figura 1: Estructura de órbitas periódicas para $\epsilon = 0$.

Un cálculo directo muestra que la solución del sistema (3) con condiciones iniciales (x_1, y_1, z_1) viene dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{Bt} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 1 - \cos t \\ \sin t & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

de forma que la correspondiente órbita está contenida en la circunferencia

$$(x(t) - z_1)^2 + y^2(t) = (x_1 - z_1)^2 + y_1^2, \quad z(t) = z_1. \quad (5)$$

Si asumimos que el sistema (3) está definido en todo el espacio \mathbb{R}^3 , toda solución es periódica. Sin embargo, como el sistema (3) se considera únicamente en la región $|x| \leq 1$, sólo las órbitas totalmente contenidas en la zona central son órbitas periódicas del sistema (1). Estas órbitas periódicas constituyen un conjunto acotado con la forma de dos conos sólidos que poseen como base común el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ del plano $z = 0$, ver Figura 1.

A continuación, se establecerán los principales resultados para, posteriormente, en la Sección 3, presentar un esquema de su prueba. En la última sección se recogen algunas cuestiones para posteriores investigaciones.

2. Principales Resultados

Es conocido que un sistema lineal no posee ciclos límite, es decir órbitas periódicas aisladas, luego los ciclos límite deben cruzar al menos un plano de separación. Los ciclos

límite que sólo cruzan un plano de separación serán denominados bizonaes y hablaremos de ciclos límite trizonaes cuando crucen los dos planos de separación.

La existencia de ciclos límite se establecerá probando la existencia de soluciones para las denominadas ecuaciones de cierre. Consideraremos dos escenarios diferentes, en el primero estudiaremos la determinación de órbitas simétricas con respecto al origen y en el segundo órbitas no simétricas.

Supongamos que queremos determinar la existencia de un ciclo límite Γ , simétrico respecto del origen, de manera que si (x, y, z) pertenece a Γ , entonces $(-x, -y, -z)$ también pertenece a Γ . La simetría del problema exige que los ciclos límite simétricos vivan en las tres zonas, por lo que existirá un punto $(1, y_0, z_0)$ de Γ situado en el plano $x = 1$, de manera que al crecer el tiempo, la órbita evolucionará en la zona externa $x > 1$ hasta volver a cruzar transversalmente el plano $x = 1$ en un punto $(1, x_1, y_1)$, después de un tiempo τ_E . A continuación, la órbita recorrerá la zona central hasta que, después de un tiempo τ_C , cortará transversalmente al plano $x = -1$ en un punto, que debido a la simetría, necesariamente será $(-1, -y_0, -z_0)$.

Por otra parte, el carácter lineal a trozos permite obtener explícitamente las soluciones del sistema en cada una de las zonas de linealidad, por lo que podemos plantear un sistema de ecuaciones, comúnmente denominadas ecuaciones de cierre, que reflejan las condiciones de existencia de trayectorias cerradas. Si este sistema posee solución, tendremos garantizada la existencia de una órbita periódica.

Estamos ya en condiciones de establecer nuestro primer resultado de existencia de órbitas periódicas.

Teorema 2. *Consideremos el sistema (1)-(2) con $\alpha > 0$. Para $\alpha = 1$ el sistema experimenta una bifurcación que da lugar a un ciclo límite. El ciclo límite bifurca desde la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ y persiste para todo $\alpha > 1$, siendo hiperbólico y estable.*

El ciclo límite posee periodo T dado por la expresión

$$T = \arctan \left(\frac{(1-u^2)\sqrt{(1+u^2)^2(4u-1-u^2)}}{1-2u-2u^2-2u^3+u^4} \right) - \frac{1}{\alpha} \log(u),$$

pasa sucesivamente por los puntos $P_0 = (1, y_0, z_0)$, $P_1 = (1, y_1, z_1)$, $P_2 = (-1, -y_0, -z_0)$, $P_3 = (-1, -y_1, -z_1)$, donde

$$y_0 = \frac{2(1-u)}{\alpha(1+u)(1-4u+u^2)}, \quad z_0 = -\frac{\alpha(1-u)^2}{2}y_0, \quad y_1 = -u^2y_0, \quad z_1 = -z_0$$

y

$$u = \frac{2\alpha^2 - \sqrt{(\alpha^2 - 1)(3\alpha^2 + 1)}}{\alpha^2 + 1} \in (2 - \sqrt{3}, 1)$$

Una vez establecido este primer resultado de existencia de ciclos límite, fijaremos el parámetro α a un valor $\alpha > 1$ y perturbaremos el vector \mathbf{b} en el sistema (1). Así pues, consideraremos ahora sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_p \text{sat}(x), \tag{6}$$

donde la matriz \mathbf{A} esta definida en (2) y el vector \mathbf{b}_p viene dado por

$$\mathbf{b}_p = \begin{pmatrix} 6\alpha - \epsilon \\ 1 - 11\alpha^2 - \epsilon^2 \\ 6\alpha^3 + \epsilon + \epsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, en las zonas $|x| \geq 1$ nuestro sistema se convierte en $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \pm \mathbf{b}_p$ mientras que en la zona central $|x| \leq 1$, tenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\epsilon & -1 & 0 \\ 1 - \epsilon^2 & 0 & -1 \\ \epsilon + \epsilon^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = B_p \mathbf{x},$$

con lo que el espectro en la zona central pasa de ser $\{0, \pm i\}$ a $\{\epsilon, -\epsilon \pm i\}$.

El Teorema 2 nos garantiza la existencia de una órbita periódica simétrica e hiperbólica en el sistema (6) cuando $\epsilon = 0$. En consecuencia, puede asegurarse que dicha órbita periódica trizonal persiste cuando $\epsilon \neq 0$, si es suficientemente pequeña la perturbación.

Supongamos ahora que buscamos ciclos límite no simétricos ocupando dos zonas. Entonces existirá un punto $P_0 = (1, y, z)$ que se transformará, después de un tiempo τ_E , mediante el flujo de la zona $x > 1$, en otro punto P_1 del plano $x = 1$, que a su vez volverá, usando el flujo de la zona central, al punto inicial P_0 . En esta caso obtenemos que las ecuaciones de cierre resultantes son singulares, por lo que no se puede aplicar directamente el teorema de la función implícita. Sin embargo, probaremos la existencia de soluciones de las ecuaciones de cierre mediante una reducción de Liapunov-Schmidt.

A continuación, y siguiendo la estrategia indicada, presentamos un segundo resultado de existencia de órbitas periódicas.

Teorema 3. *Supongamos $\alpha > 1$ en el sistema (1)-(2). Entonces para $\epsilon = 0$ el sistema experimenta una bifurcación que da lugar a dos ciclos límite que aparecen para $\epsilon > 0$. Uno de ellos bifurca a partir de la circunferencia*

$$(x - z_0)^2 + y^2 = (1 - z_0)^2, \quad z = z_0 = \frac{\alpha^2}{\delta + \alpha^2},$$

donde $\delta = \alpha^2 - 1$, pasa por el punto $(1, y_\epsilon, z_\epsilon)$ donde

$$\begin{aligned} y_\epsilon &= -\frac{\delta}{\delta + \alpha^2} \left(\frac{\pi}{2\alpha\delta}\right)^{1/3} \epsilon^{1/3} - \frac{2\alpha\delta}{\delta + \alpha^2} \left(\frac{\pi}{2\alpha\delta}\right)^{2/3} \epsilon^{2/3} + \mathcal{O}(\epsilon), \\ z_\epsilon &= \frac{\alpha^2}{\delta + \alpha^2} + \frac{\alpha^2(5\delta + 4)}{(\delta + \alpha^2)^2} \left(\frac{\pi}{2\alpha\delta}\right)^{2/3} \epsilon^{2/3} + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned}$$

y su periodo viene dado por la expresión

$$T = 2\pi - \frac{(11\delta + 10)\pi}{3\alpha\delta} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^{5/3}).$$

El otro ciclo límite es simétrico al anterior respecto del origen.

3. Esquema de las pruebas

En esta sección presentaremos los esquemas de las pruebas de los teoremas anteriormente enunciados. El Teorema 2 considera la existencia de un ciclo límite simétrico y el Teorema 3 considera la existencia de un par de ciclos límite gemelos y no simétricos.

3.1. Teorema 2

Debido a la simetría, sólo tenemos que considerar dos transiciones: el paso del punto $(1, y_0, z_0)$ al punto $(1, y_1, z_1)$ por la zona $x > 1$, que emplea un tiempo τ_E y el paso del punto $(1, y_1, z_1)$ al punto $(-1, -y_0, -z_0)$ mediante el flujo de la zona central, después de un tiempo τ_C .

Para la región externa, el único punto de equilibrio es $(1, 0, 1)$, luego la primera transición se realiza de acuerdo con la ecuación,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 - 1 \end{pmatrix} = e^{A\tau_E} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 - 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Puesto que los autovalores de la matriz A son $\{-\alpha, -2\alpha, -3\alpha\}$, las entradas de la matriz $e^{A\tau_E}$ dependen de las exponenciales $e^{-k\alpha\tau_E}$, donde $k = 1, 2, 3$. Si ahora introducimos la nueva variable $u = e^{-\alpha\tau_E}$, conseguimos expresar los elementos de la matriz A en función de las potencias u, u^2, u^3 y finalmente de (7) obtenemos las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \alpha(1 - 3u)y_0 + (1 - u)(z_0 - 1) &= 0, \\ 2y_1\alpha - u(-5 + 16u - 9u^2)y_0\alpha - u(1 - u)(3u - 5)(z_0 - 1) &= 0, \\ z_1 - 1 - 3\alpha u(1 - u)^2y_0 - u(3 - 3u + u^2)(z_0 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando ahora el sistema restringido a la zona central, de (4) y (5) obtenemos,

$$\begin{aligned} (-1 - z_1)^2 + y_0^2 &= (1 - z_1)^2 + y_1^2, \\ z_1 &= -z_0, \\ \tan \tau_C &= \frac{(1 + z_0)y_0 + u^2y_0(1 - z_0)}{(1 + z_0)(z_0 - 1) + u^2y_0^2}. \end{aligned}$$

La estabilidad y la hiperbolicidad se deducen del estudio de la derivada de la aplicación de Poincaré, que puede realizarse en términos de la variable auxiliar u .

3.2. Teorema 3

Los ciclos límite descritos por el teorema (3) cortarían al plano de separación en dos puntos, $P = (1, y, z)$ y $Q = (1, Y, Z)$. Estudiaremos las transiciones $P \rightarrow Q$ por la zona exterior y la transición $Q \rightarrow P$ por la zona interior. Estas transiciones emplean tiempos τ_E y τ_C respectivamente.

Nuestro sistema tiene dos puntos de equilibrio, el origen y el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(1 + \frac{\epsilon + \epsilon^3}{6\alpha^3}, -\epsilon - \frac{\epsilon + \epsilon^3}{\alpha^2}, 1 - \epsilon^2 + 11\frac{\epsilon + \epsilon^3}{6\alpha} \right),$$

La solución que comienza en el punto $P = (1, y_\epsilon, z_\epsilon)$ y evoluciona en la zona exterior viene descrita por la ecuación,

$$\begin{pmatrix} x(\tau_E) - \bar{x} \\ y(\tau_E) - \bar{y} \\ z(\tau_E) - \bar{z} \end{pmatrix} = e^{A\tau_E} \begin{pmatrix} 1 - \bar{x} \\ y_\epsilon - \bar{y} \\ z_\epsilon - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, denotemos mediante $(X(\tau_C), Y(\tau_C), Z(\tau_C))$ el punto de la zona central tal que la solución que comienza en dicho punto llega, después de un tiempo τ_C , al punto inicial P . Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_\epsilon \\ z_\epsilon \end{pmatrix} = e^{B\tau_C} \begin{pmatrix} X(\tau_C) \\ Y(\tau_C) \\ Z(\tau_C) \end{pmatrix}.$$

Si ahora introducimos la variable $\mathbf{w} = (\tau_C, \epsilon, y, z, \tau_E)$, podemos escribir las correspondientes ecuaciones de cierre $\mathbf{G}(\mathbf{w}) = (G_1(\mathbf{w}), G_2(\mathbf{w}), G_3(\mathbf{w}), G_4(\mathbf{w})) = \mathbf{0}$, donde

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{w}) &= x(\tau_E) - 1, \\ G_2(\mathbf{w}) &= X(\tau_C) - 1, \\ G_3(\mathbf{w}) &= y(\tau_E) - Y(\tau_C), \\ G_4(\mathbf{w}) &= z(\tau_E) - Z(\tau_C). \end{aligned} \tag{8}$$

Para probar la existencia de soluciones de las ecuaciones de cierre con $\tau_C > 0$ y $\tau_E > 0$, podríamos en principio intentar aplicar el teorema de la función implícita. Una vez explicitadas las ecuaciones (8), resulta evidente que $\mathbf{w}_0 = (2\pi, 0, 0, z_0, 0)$, con $0 < z_0 < 1$ es siempre solución. Dichas soluciones corresponden a las órbitas periódicas del continuo existente en el sistema no perturbado localizadas en los planos de la forma $z = z_0$, y que resultan tangentes al plano $x = 1$. Nótese que si $z_0 = 1$, la órbita periódica degenera en un punto de equilibrio.

Un cálculo directo nos permite obtener la matriz jacobiana,

$$D_{\mathbf{w}}\mathbf{G}(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi(1 - 2z_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{z_0 - 1}{2} \\ 1 - z_0 & 0 & 0 & 0 & 1 - z_0 \\ 0 & 2\pi z_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz posee rango 2 cuando $z_0 = 1$ y rango 3 en otro caso, por lo que no se puede aplicar directamente el teorema de la función implícita.

En esta situación, considerando sólo el caso mínimamente degenerado, hemos realizado una reducción de Liapunov-Schmidt y probado la existencia de soluciones de las ecuaciones de cierre. Los primeros términos de las correspondientes series de las soluciones aparecen en el enunciado del teorema, garantizando la existencia de un ciclo límite cuyos puntos verifican $0 < z < 1$ para ϵ suficientemente pequeño. De nuevo la simetría del problema nos asegura la existencia de un ciclo límite gemelo que es simétrico del anterior respecto del origen.

4. Observaciones finales

Describimos aquí, algunas cuestiones que quedan pendientes para futuros trabajos.

Para cierta perturbación del sistema (1)-(2), hemos encontrado un par de ciclos límite gemelos. Sin embargo, queda pendiente establecer su estabilidad y el tamaño de la perturbación compatible con la existencia de dichos ciclos límite; en otras palabras, el rango de validez de los desarrollos en serie del Teorema 3.

Los ciclos límite estudiados del sistema perturbado viven en dos zonas adyacentes. De manera natural surge la cuestión de la existencia para ese mismo sistema perturbado de ciclos límite que ocupen las tres zonas.

Finalmente, queda también por estudiar el comportamiento del sistema en el caso de mayor degeneración de las ecuaciones de cierre, cosa que sucede para $z_0 = 1$, es decir cuando la solución de partida de las ecuaciones de cierre no corresponden con una órbita periódica del sistema no perturbado, sino con un punto de equilibrio. En este caso, la situación es muy degenerada y se requieren técnicas diferentes de las empleadas hasta ahora.

Agradecimientos

El primer autor está parcialmente financiado por la ayuda MEC/FEDER de referencia MTM2008-03437. El segundo y tercer autor están parcialmente financiados por la ayuda MEC/FEDER de referencia MTM2006-08247 y por la ayuda de la Junta de Andalucía de referencia P08-FQM-03770.

Referencias

- [1] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros, J. & Torres, F. [2005] “Limit Cycle Bifurcation in 3D Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones. Application to Chua’s Circuit.”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 15, No. 10, 3153-3164.
- [2] Freire, E., Ponce, E. & Ros, J. [2007] “A Biparametric Bifurcation in 3D Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones. Application to Chua’s circuit ”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17, No. 2, 445-457.
- [3] Freire, E., Ponce, E. & Ros, J. [2007] “The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Symmetric 3D Piecewise Linear Systems. ”. *SIAM Journal of Applied Mathematics* , Vol. 65, No. 6, 1933-1951.
- [4] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. & Torres, F. [2002] “On simplifying and classifying piecewise linear systems.”. *IEEE Trans. Circuits Systems I* ., Vol. 49, 609-620.
- [5] Llibre, J., Ponce, E. & Ros, J. “Algebraic Determination of Limit Cycles in 3-Dimensional Piecewise Linear Differential Systems. ”. *Preprint*.
- [6] Kuznetsov, Y. A. [1997] *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag .
- [7] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. [1985] *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.1, Springer-Verlag .